

ION S. ANTONIU
H. ALBERT

CULEGERE DE PROBLEME DE ELECTROTEHNICA

CHESTIUNI SPECIALE

EDIȚIA A II-a

EDITURA ENERGETICĂ DE STAT

Dr. Ing. ION S. ANTONIU
Ing. HERMINA ALBERT

Din cartile mele

Hermina

CULEGERE DE PROBLEME DE ELECTROTEHNICĂ

CHESTIUNI SPECIALE

EDIȚIA II-a

REVĂZUTĂ ȘI ADĂUGITĂ

Hermina



EDITURA ENERGETICĂ DE STAT

PREFATA LA EDIȚIA II-a

Trecerea dela nivelul primelor cercetări organizate și până la nivelul cunoștințelor noastre actuale asupra fenomenelor electromagnetice, evoluția dela modesta pilă a lui Volta și până la centralele electrice de azi, evoluția dela primele experiențe ale acțiunilor electrodinamice efectuate de Ampère și până la aplicațiile electromecanice actuale, evoluția dela enunțarea principiului lui Lenz și până la realizarea mașinilor de inducție pe baza acestui principiu sub diversele lui forme, evoluția dela enunțarea lui Maxwell a existenței și deplasării undelor electromagnetice și până la realizările în radiotransmisiune, toate aceste cuceriri au depășit orice prevedere inițială.

Aceleași progrese se constată și în domeniul realizărilor de transport și distribuția energiei electrice cât și al mașinilor și aparatajului respectiv, constituind desigur unul dintre capitolele cele mai importante ale electrotehnicii.

Progresul continuu realizat în acest domeniu, atât din punct de vedere al cantității de energie distribuită, cât și al distanței de transport, au scos în evidență o serie de fenomene complexe, la început neobservate și ignorate, dar care azi nu se mai pot neglija.

Dacă fenomenele tranzitorii, fenomenele de dezechilibraj, fenomenele deformante, nu apăreau decât ca o simplă curiozitate științifică pe circuite de cercetări sau pe micile rețele, funcționând sub tensiune joasă și în regim de puteri reduse, cu totul alta este situația în actualele condiții de extensiune a marilor electrificări, în care aceste fenomene, prin manifestările lor, de data aceasta sunt departe de a mai putea fi neglijate.

Aprofundarea studiului acestor fenomene a condus la elaborarea de teorii noi. Astfel a fost elaborată teoria coordonatelor simetrice necesare studiului sistemelor dezechilibrate. Deasemenea, funcționarea a o serie de aparate industriale ca, de exemplu: supape electronice, redresoare, inductanțe cu fier saturat, liniile de foarte înaltă tensiune prin efectul corona, conduc la apariția unui regim nesinusoidal, care se intensifică pe măsura extensiunii instalațiilor de electrificare. Eu însumi am considerat mai de mult că astfel de fenomene nu mai pot fi totdeauna neglijate sau tratate prin vechea metodă simplistă a sinusoidelor

echivalente. În felul acesta am fost condus la preconizarea studiului unora din manifestările acestor fenomene, prin intermediul proprietăților unei mărimi noi, puterea deformantă, care ne permite a explica o serie de manifestări, care nu mai pot rămâne ignorate și nici studiate satisfăcător prin o simplă asimilare cu un regim sinusoidal.

Pe de altă parte toate aceste fenomene noi au condus la elaborarea și dezvoltarea unor noi instrumente matematice superioare de investigație.

Intră în acest domeniu, în special, metodele de calcul prin mărimi complexe, calculul operațional, transformările conforme și altele. Studiul rețelelor a condus la operațiile de calcul prin dispozitive de dipoli, cuadripoli, la introducerea calculului matricial, cum și la o serie întreagă de teoreme și metode noi.

Toate aceste teorii, atât referitoare la fenomenele fizice propriu zise, cât și la metodele de investigație matematică devin azi indispensabile atât cercetătorului teoretician, cât și inginerului practician.

Cunoașterea acestor teorii de o profundă semnificație nu este însă posibilă fără o ilustrare suficientă în domeniul aplicativ.

Acest rol este îndeplinit cu mult succes de Culegerea de probleme de Electrotehnică — Chestiuni speciale — întocmită de Dr. Ing. I. S. Antoniu și Ing. H. Albert. Apariția în a doua ediție a acestei lucrări nu mai are nevoie de o recomandare specială. Epuizarea în scurt timp a primei ediții a scos în evidență cu prisosință importanța și necesitatea acestei lucrări.

Autorii, în această a doua ediție, au adus revizuirii și completări importante față de prima ediție. Nu numai numărul problemelor a fost mărit, dar însăși chestiunile tratate au fost completate, atât în cadrul vechilor capitole, cât și prin introducerea unui nou capitol referitor la regimul tranzitoriu în circuite neliniare.

Intregul conținut al acestei lucrări este prezentat la un înalt nivel științific și cu multă competență. Breviarul, atât prin extensiunea sa, cât și prin felul cum e prezentat, dă o interesantă expunere condensată a tuturor proprietăților teoretice la care se referă.

Răspunsurile conțin numeroase indicații și îndrumări de rezolvare însoțite, acolo unde e cazul, de planșe și tabele de calcul.

Intreaga lucrare, prin caracterul său original, umple un gol puternic resimțit în aprofundarea unor importante capitole de Electrotehnică.

Această „Culegere de Probleme” se adresează atât inginerilor cât și cercetătorilor într-un domeniu important teoretic și practic al Electrotehnicii.

Apariția acestei lucrări corespunde, deasemenea, unei necesități de actualitate, când opera de electrificare a țării este în faza realizării.

Prof. C. BUDEANU

PREFAȚĂ LA EDIȚIA I

Studiul unei discipline teoretice este fructuos dacă este completat cu aplicații practice imediate ale diverselor probleme.

Diversele capitole speciale de electrotehnică alcătuiesc cursul pe care prof. I. S. Antoniu, unul dintre autori, îl predă de câțiva ani la Facultățile de Energetică și de Electrotehnică ale Institutului Politehnic din București. Deși problemele tratate sunt de natură pur teoretică, ele au totuși o aplicare imediată în practică. Pentru a întări afirmația de mai sus este suficient a cita capitolele privind circuitele echivalente, analiza armonică sau calculul scurtcircuitelor în rețelele electrice.

Problemele cuprinse în această culegere reprezintă, în majoritatea lor, aplicațiile ce au fost date la seminariile cursului sau probleme date la examenele parțiale sau la cele generale. Acestea din urmă au fost însemnate cu inițialele IPB (Institutul Politehnic București) indicându-se și anul când a fost dată problema.

Problemele din această culegere sunt, în majoritatea lor, alcătuite de autori, cu elemente practice luate din tratate sau din practică. Literatura sovietică a fost izvorul de inspirație cel mai fecund, atât prin problemele cu conținut interesant ce se găsesc în culegerile de probleme ce au putut fi consultate, cât și prin problemele teoretice cuprinse în tratatele speciale de mașini electrice, rețele electrice, electrotehnică generală, etc. Dintre autorii care au fost consultați cităm: Crug, Neiman și Calantarov, Costenco, Atabecov, colectivul Crug, Lomonosov, Perecalin, Polivanov, Aronson, Mansurov și Popov, Contorovici, Gutenmaher, etc.

Planul ales de autori în alcătuirea acestei culegeri, este identic cu planul cursului corespunzător. Forma aleasă, care constă în a enunța problemele și a da numai indicații de rezolvare și rezultate, fără a urmări firul complet al rezolvării, a fost inspirată de culegerile de probleme publicate de Gazeta Matematică. Autorii o socotesc pe aceasta cea mai bună, deoarece dă posibilitatea celui care o studiază să judece și să aleagă metoda

cea mai potrivită rezolvării problemei propuse. O culegere de probleme este menită să completeze un curs teoretic, dar nu să-l substituie. Totuși, pentru a veni în ajutorul cititorului, culegerea de probleme este precedată de un breviar al cursului corespunzător, cuprinzând, fără demonstrație, toate noțiunile necesare atacării oricărei probleme din culegere.

Atât breviarul cât și enunțurile și răspunsurile, sunt împărțite în următoarele cinci părți :

- Partea I : Studiul circuitelor electrice în curent alternativ, cuprinzând 177 probleme.
- Partea II : Studiul regimului deformant, cuprinzând 102 probleme.
- Partea III : Studiul regimului desechilibrat, cuprinzând 77 probleme.
- Partea IV : Studiul regimului tranzitoriu, cuprinzând 54 probleme.
- Partea V : Utilizarea calculului matricial în electrotehnică, cuprinzând 40 probleme.

Culegerea conține deci 450 probleme. Ținând seama că multe din ele pot fi rezolvate pe mai multe căi, practic, culegerea conține un număr mult mai mare de probleme. Autorii recomandă cititorilor să procedeze în acest mod, determinând astfel care este soluția cea mai potrivită, atât prin simplitate cât și prin rezultatele și concluziile ce se pot trage. Autorii recomandă deasemenea ca soluțiile numerice să fie conduse până la capăt.

Tabelele numerice ce însoțesc culegerea sunt menite să ajute pe cititor în rezolvarea chestiunilor numerice ale problemelor.

Cu toată străduința depusă, se poate să se fi strecurat unele erori, mai ales la soluții. Cititorii sunt rugați să le semnaleze pentru a se face eventualele corectări la edițiile viitoare.

Editura așteaptă sugestii asupra îmbunătățirii calității acestei culegeri și chiar asupra chestiunilor interesante ce ar putea figura în această culegere.

AUTORII

TABLA DE MATERII

Prefață la ediția II-a de C. Budeanu	5
Prefață la ediția I-a	7
Cuvânt înainte.	11

Nr. capito- lului	C A P I T O L U L	Pagina la care începe			Nr. de pro- bleme
		Brevia- rul	Enunța- rile	Răspun- surile	
	<i>Partea I :</i>				
	Studiul circuitelor electrice în curent alternativ				
1	Cantități complexe. Reprezentarea unui vector prin cantități complexe . . .	15	87	207	43
2	Operații cu vectori	17	88	209	52
3	Reprezentarea funcțiilor sinusoidale prin cantități complexe. Legile lui Ohm și Kirchhoff	19	91	213	33
4	Inversiune. Locuri geometrice	22	98	218	45
5	Studiul circuitelor cu ajutorul cantităților complexe. Dipoli. Cuadripoli. Metode de calcul. Circuite echivalente	25	103	225	64
	<i>Partea II :</i>				
	Studiul regimului deformant				
6	Studiul undelor complexe	35	120	241	40
7	Analiza armonică	37	121	243	25
8	Studiul regimului deformant	40	127	271	51
	<i>Partea III :</i>				
	Studiul regimului desechilibrat				
9	Deplasarea punctului neutru. Calcul direct de rețele	48	137	280	35
10	Teoria coordonatelor simetrice.	51	145	288	30
11	Măsurarea componentelor simetrice . .	55	149	292	12
12	Calculul circuitelor trifazate desechilibrate. Calcule de scurtcircuit	56	152	295	34

Nr. capitolului	C A P I T O L U L	Pagina la care începe			Nr. de probleme
		Breviarul	Enunțurile	Răspunsurile	
	<i>Partea IV :</i> Studiul regimului tranzitoriu				
13	Studiul direct	62	162	306	45
14	Studiul cu ajutorul cantităților complexe și al calculului operațional . .	65	172	317	42
15	Studiul sistemelor neliniare.	69	181	335	24
	<i>Partea V :</i> Utilizarea calculului matricial în electrotehnică				
16	Noțiuni de algebră matricială	74	189	342	15
17	Studiul rețelelor electrice	78	193	346	35

Tabele numerice	380
Nomograme diverse	389
Tabele pentru analiza armonică	396
Formule pentru calculul operațional.	402
Bibliografie	409
Lista de simboluri	411

CUVÂNT ÎNAINTE

Epuizarea într'un timp extrem de scurt a primei ediții a acestei lucrări a arătat necesitatea ce se simte în literatura tehnică românească de asemenea lucrări, care să pună la îndemâna tehnicienilor un material care să-i poată ajuta la rezolvarea problemelor practice ridicate de producție, iar studenților, o posibilitate de a-și completa cunoștințele teoretice.

Lucrarea se adresează și tuturor acelor care doresc să-și completeze cunoștințele teoretice cu chestiunile speciale de electrotehnică și care au o mare contingentă cu toate problemele delicate ridicate de producție.

Călăuziți de experiența câștigată în utilizarea culegerii de probleme atât la Institutul Politehnic din București, cât și la Institutul de Mine din București, precum și de sugestiile primite de la cititori, lucrarea a fost revăzută atât în ce privește conținutul cât și ordinea de prezentare a materiei. Astfel, a fost introdus un capitol nou al regimurilor tranzitorii în circuitele nelineare, au fost introduse 175 probleme noi, au fost revizuite unele soluții și au fost date completări și precizări în breviar.

S'a căutat ca noile probleme să fie cât mai strâns legate de practică. Este evident că materialul cules nu epuizează totalitatea problemelor puse de practică. El poate constitui, totuși, un îndreptar cu ajutorul căruia să se poată găsi mai ușor soluția la problema studiată și care ar putea avea o analogie cu vreuna din culegere.

A fost schimbat tabelul de corespondență dintre funcțiile imagină și original, punându-l în concordanță cu uzanța actuală din literatura tehnică de specialitate, anume de a se folosi transformarea lui Laplace în locul transformării lui Carson. Formulele date sunt în general suficiente pentru a rezolva cu ajutorul lor aproape toate problemele din practică.

Deasemenea au fost completate nomogramele de calcul ale diverselor mărimi curente ce apar în electrotehnică. Autorii recomandă cititorilor să le folosească pentru a putea să se deprindă

cu utilizarea nomogramelor în practică, ele constituind un prețios instrument în mâna tehnicianului.

O serie de modele de tabele pentru analiza armonică a curbelor nesinusoidale au fost introduse în anexă astfel încât cititorul, dacă va avea de efectuat o asemenea lucrare, să o poată efectua ușor chiar pentru cazurile care nu sunt asemănătoare aceloră din culegere.

Culegerea conține acum 625 probleme. Foarte multe din acestea pot fi rezolvate pe mai multe căi, autorii recomandând, și de data aceasta, ca cititorii să atace și să caute să rezolve problema pe toate căile posibile, ducând în fiecare caz în parte calculul soluției până la capăt, prin efectuarea calculelor numerice complete, a reprezentărilor grafice, a epurelor, etc. Numai în felul acesta cititorul poate să-și dea seama, în mod critic, de valoarea unei soluții și de simplificările ce pot fi aduse. În ceea ce privește calculele numerice, acestea se vor face cu rigla și cu ajutorul tabelelor numerice. Numai în cazuri extreme, când aproximația dată de riglă ar conduce la rezultate absurde, se va recurge la o mașină de calcul sau la calcule cu mână.

Este deasemenea foarte instructiv ca, la diversele soluții obținute, dacă este cazul, să se dea și interpretarea fizică corespunzătoare.

Autorii s'au străduit să scoată greșelile de tipar din prima ediție, care puteau denatura spiritul problemei, creând mai ales contradicții între enunț și soluția indicată. Totuși, desigur că asemenea greșeli au mai rămas, mai ales la soluții. Cititorii sunt rugați să le semnaleze pentru a fi corectate în edițiile viitoare.

Autorii și editura așteaptă sugestii dela cititori atât asupra îmbunătățirii acestei culegeri, cât și asupra chestiunilor interesante ce ar putea figura în această culegere.

AUTORII

BREVIAR DE ELECTROTEHNICĂ
CHESTIUNI SPECIALE



PARTEA I

STUDIUL CIRCUITELOR IN CURENT ALTERNATIV

1. REPREZENTAREA UNUI VECTOR PLAN PRIN CANTITĂȚI COMPLEXE

(Problemele 1.1—1.43)

1.1. Un vector plan este definit prin *modulul* său, care reprezintă valoarea sa numerică, și prin *argumentul* său, care determină direcția suportului său în raport cu o axă luată ca origine de fază (fig. 1). Dacă a și b sunt proiecțiile sale într'un sistem de axe ortogonale și dacă j este operatorul de rotație cu $+90^\circ$, atunci un vector poate fi reprezentat prin expresia¹⁾

$$\bar{V} = a + j b, \quad (1)$$

în care a este partea reală și b este partea complexă a vectorului. Reprezentarea (1) poartă numele de *reprezentare algebrică* a vectorului.

1.2. Pe baza relațiilor :

$$\left. \begin{aligned} a &= V \cos \varphi \\ b &= V \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

relația (1) se poate scrie sub forma

$$V = V (\cos \varphi + j \sin \varphi) \quad (3)$$

care constituie *reprezentarea trigonometrică* a vectorului.

¹⁾ Se convine a se nota un vector, sau o mărime complexă, printr'o literă având o linioară deasupra.

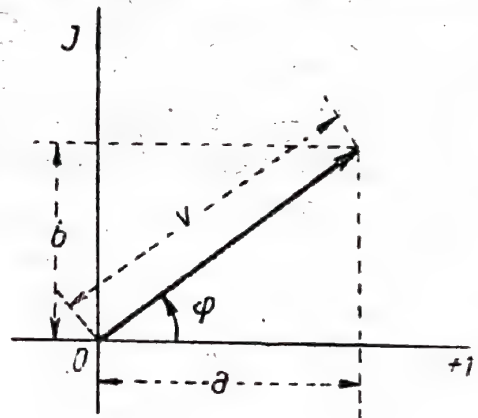


Fig. 1. Vector.

Trecerea de la reprezentarea (1) la reprezentarea (3) se face prin relațiile

$$V = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} \quad (4)$$

1.3. Ținând seama de relațiile lui Euler¹⁾,

$$\cos \varphi = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j},$$

relația (3) se poate scrie sub forma

$$\bar{V} = V e^{j\varphi} \quad (5)$$

care constituie *reprezentarea exponențială*.

1.4. Relația (5) se mai scrie

$$\bar{V} = V \angle \varphi \quad (6)$$

care se citește: vectorul \bar{V} , de modul V și de argument φ . Aceasta constituie *reprezentarea simbolică*.

1.5. Doi vectori sunt egali dacă

$$V_1 = V_2 \quad \text{și} \quad \varphi_1 = \varphi_2$$

sau dacă

$$a_1 = a_2 \quad \text{și} \quad b_1 = b_2.$$

1.6. Un vector este nul dacă

$$V = 0.$$

sau

$$a = 0 \quad b = 0$$

1.7. Vectorii

$$\bar{V} = a + jb = V e^{j\varphi} = V \angle \varphi$$

$$\bar{V}^* = a - jb = V e^{-j\varphi} = V \angle -\varphi$$

se numesc *conjugăți* unul altuia.

¹⁾ Se convine a se nota cu e baza logaritmulor neperieni pentru a nu se confunda cu e forța electromotoare, analog cum se convine a se nota $j = \sqrt{-1}$ pentru a nu se confunda cu i curentul electric.

2. OPERAȚII CU VECTORI

(Problemele 2.1—2.52)

2.1. Adunarea algebrică. Suma algebrică a vectorilor

$$\bar{V}_1 = a_1 + jb_1 \quad \text{și} \quad \bar{V}_2 = a_2 + jb_2$$

este

$$\bar{V} = \bar{V}_1 \pm \bar{V}_2 = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2).$$

În general

$$\bar{V} = \sum_1^n \bar{V}_i = \sum_1^n a_i + j \sum_1^n b_i.$$

Dacă vectorii sunt dați sub forma (5) sau (6), se trece la forma (1) cu ajutorul relațiilor (2) și se face suma, după care se revine la forma inițială prin relațiile (4).

Grafic, adunarea a doi sau mai mulți vectori se face folosind regula paralelogramului.

2.2. Înmulțirea vectorilor¹⁾. Se definește *produsul algebric* a doi vectori prin expresia

$$\bar{V} = \bar{V}_1 \cdot \bar{V}_2 = V | \varphi$$

Dacă ²⁾

$$\bar{V}_1 = V_1 | \varphi_1$$

și

$$\bar{V}_2 = V_2 | \varphi_2$$

atunci

$$V = V_1 \cdot V_2 \quad \text{și} \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2.$$

Grafic, produsul a doi vectori se face astfel (fig. 2): se unește vârful vectorului \bar{V}_1 , cu vârful unui vector unitar luat

¹⁾ În cele ce urmează nu este vorba de produsul scalar sau vectorial a doi vectori ci de produsul *algebric*, definit mai sus.

²⁾ \bar{V}_1 și \bar{V}_2 pot avea oricare din formele (1), (3) sau (5), obținându-se în aceste cazuri produsul sub formele:

$$(a + jb)(c + jd) = ac - bd + j(ad + bc)$$

$$V_1(\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1) V_2(\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2) = V_1 V_2 [(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 + \varphi_2))]$$

$$V_1 e^{j\varphi_1} V_2 e^{j\varphi_2} = V_1 V_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

pe axa ce folosește de origină de fază, obținându-se triunghiul OIV_1 . Pe vectorul \overline{OV}_2 se construiește un triunghi asemenea cu acesta, latura \overline{OV}_2 fiind omoloagă lui \overline{OI} . Latura \overline{OV} , omoloagă laturii \overline{OV}_1 , reprezintă vectorul produs.

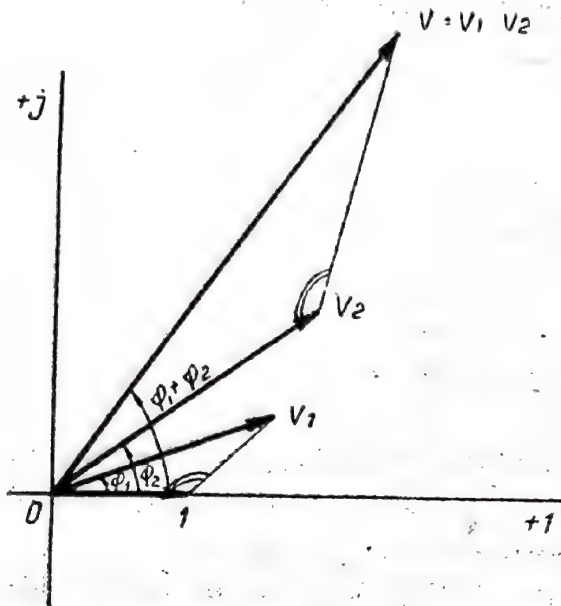


Fig. 2. Efectuarea grafică a produsului a doi vectori

2.3. Impărțirea vectorilor. Se definește câtul algebric a doi vectori, expresia

$$\bar{V} = \frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2} = V \angle \varphi$$

în care ¹⁾

$$V = \frac{V_1}{V_2} \quad \text{și} \quad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

Grafic, câtul a doi vectori se face astfel (fig. 3): se unește vârful vectorului împărțitor cu vârful vectorului unitar obținându-se triunghiul OIV_2 .

Pe vectorul de împărțit \overline{OV}_1 se construiește triunghiul asemenea OVV_1 , \overline{OV} fiind omologul lui OV_2 . Latura \overline{OV} , omoloaga laturii \overline{OI} , reprezintă vectorul cât.

2.4. Ridicarea la putere și extragerea rădăcinii. Ridicarea unui vector $\bar{V} = V \angle \varphi$ la o putere n , n fiind un număr oarecare întreg sau fracționar, este definită prin expresia

$$(\bar{V})^n = V^n \angle n\varphi$$

2.5. Diferențierea și integrarea vectorilor. Fie vectorul

$$\bar{V} = V \angle \varphi$$

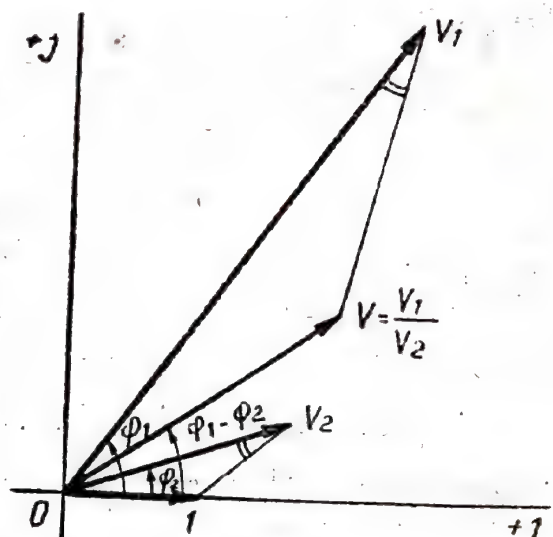


Fig. 3. Efectuarea grafică a câtului a doi vectori.

¹⁾ Vectorii \bar{V}_1 și \bar{V}_2 pot avea oricare din formele (1), (3) sau (5), obținându-se expresii corespunzătoare pentru cât.

Derivata acestui vector este definită prin relația :

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = j \frac{d\varphi}{dt} \bar{V}$$

și derivata de ordinul n

$$\frac{d^n \bar{V}}{dt^n} = \left(j \frac{d\varphi}{dt} \right)^n \bar{V}.$$

Integrala acestui vector este definită de expresia

$$\int_0^t \bar{V} dt = -j \left(\frac{\bar{V}}{\frac{d\varphi}{dt}} \right).$$

3. REPREZENTAREA FUNCȚILOR SINUSOIDALE PRIN CANTITĂȚI COMPLEXE. LEGILE LUI OHM ȘI KIRCHHOFF

(Problemele 3.1—3.45)

3.1. Unei funcții sinusoidale

$$y = A \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi) \quad (7)$$

i se poate asocia un vector în plan de forma

$$\bar{Y} = A \sqrt{\omega t + \varphi}. \quad (8)$$

Funcția sinusoidală y poate fi considerată ca proiecția pe axa origină de fază a vectorului \bar{Y} , astfel că acest vector poate reprezenta în orice moment funcția sinusoidală dată.

Dacă se aplică mărimii (8) identitatea lui Euler se vede că

$$y = \sqrt{2} \Re(\bar{Y}).$$

Ca o consecință, rezultă că vectorul (8) poate reprezenta și funcția

$$y' = A \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi) \quad (9)$$

pentru care

$$y' = \sqrt{2} \Im(\bar{Y}).$$

Vectorul (8), având argumentul o funcție de timp, este un vector învârtitor. Prin rotirea sistemului de referință, în același sens cu aceeași viteză ω el devine un vector static.

În aceste condiții, vectorul (8) poate fi exprimat sub forma

$$\bar{Y} = A \angle \varphi = A e^{j\varphi} = A (\cos \varphi + j \sin \varphi) \quad (10)$$

argumentul ωt fiind subînțeles.

Oricare ar fi forma funcției sinusoidale reprezentată prin vectori învârtitori în plan, utilizarea acestora la studiul circuitelor electrice în curent alternativ se face în același mod. Singura grijă ce trebuie avută este de a ține seama, la trecerea de la cantități complexe la cantități instantanee, de convenția de reprezentare care s'a adoptat: vectorul (8) respectiv (10) a fost asociat unei funcții sinusoidale de forma (7) sau unei funcții sinusoidale de forma (9).

În această lucrare s'a convenit a se asocia vectorul (8), respectiv (10), funcției sinusoidale (7).

3.2. Două mărimi sinusoidale alternative sunt identice dacă în orice moment au aceeași fază și aceeași amplitudine. Mărimile complexe care le reprezintă au același modul și același argument.

3.3. O ecuație integro-diferențială scrisă între mărimi sinusoidale (funcții de timp de aceeași pulsație ω), poate fi transformată într-o ecuație algebrică între mărimile complexe reprezentând funcțiile sinusoidale corespunzătoare, asupra cărora s'au efectuat operațiile de derivare și integrare. Exemplu, ecuația

$$u = e + Ri_1 + L \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i_1 dt + M \frac{di_2}{dt}$$

se transformă în

$$\bar{U} = \bar{E} + R\bar{I}_1 + j\omega L\bar{I}_1 + \frac{j}{C\omega} \bar{I}_1 + j\omega M\bar{I}_2.$$

3.4. Trecerea de la o ecuație în cantități complexe, la ecuația între valori instantanee, se face procedând în sens invers. Exemplu ecuația

$$\bar{U} = \bar{Z}_1 \bar{I}_1 + \bar{Z}_2 \bar{I}_2$$

se scrie

$$U \angle \theta = Z_1 I_1 \angle \psi_1 + \varphi_1 + Z_2 I_2 \angle \psi_2 + \varphi_2$$

și deci, adăugând ωt argumentelor de mai sus, se obține

$$U \sqrt{2} \cos (\omega t + \theta) = Z_1 I_1 \sqrt{2} \cos (\omega t + \psi_1 + \varphi_1) + \\ + Z_2 I_2 \sqrt{2} \cos (\omega t + \psi_2 + \varphi_2).$$

3.5. Legea lui Ohm în cantități complexe se exprimă

$$\bar{U} = \bar{Z} \bar{I}$$

în care \bar{Z} este impedanța complexă a circuitului, și care, pentru un circuit serie este

$$\bar{Z} = R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega}) = R + jX \quad (11)$$

în care R este rezistența circuitului și X reactanța sa.

3.6. Legile lui Kirchhoff, în cantități complexe, se exprimă prin

$$\sum \bar{I} = 0$$

și

$$\sum \bar{E} = \sum \bar{Z} \bar{I}.$$

3.7. Vectorul admitanță. Vectorul

$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{R + jX} = G - jB \quad (12)$$

se numește vectorul admitanță, în care G este conductanța circuitului și B susceptanța sa. Se găsește:

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} \text{ și } B = \frac{X}{R^2 + X^2}$$

și invers

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2} \text{ și } X = \frac{B}{G^2 + B^2}$$

3.8. Puterea în cantități complexe. Fiind dată tensiunea

$$\bar{U} = U \angle \alpha$$

și curentul

$$\bar{I} = I \angle \beta$$

dacă

$$\varphi = \alpha - \beta$$

este decalajul dintre tensiune și curent, puterea aparentă este dată de relația

$$\bar{S} = UI | \varphi = U \cdot I | \alpha - \beta = \bar{U} \cdot \bar{I}^* = P + jQ.$$

Deci pentru obținerea puterii aparente în curent alternativ se înmulțește vectorul tensiune cu conjugatul vectorului curent; partea reală a produsului reprezintă puterea activă, iar partea complexă reprezintă puterea reactivă.

Puterea aparentă poate fi calculată și cu expresia

$$\bar{S} = \bar{U}^* \cdot \bar{I} = P - jQ,$$

puterea reală fiind aceeași ca și în cazul precedent, iar puterea reactivă trebuind să fie luată cu semnul schimbat.

4. INVERSIUNE. LOCURI GEOMETRICE

(Problemele 4.1—4.33)

4.1. Inversul unui vector se obține inversându-se geometric simetricul acestui vector, față de vectorul reprezentând puterea

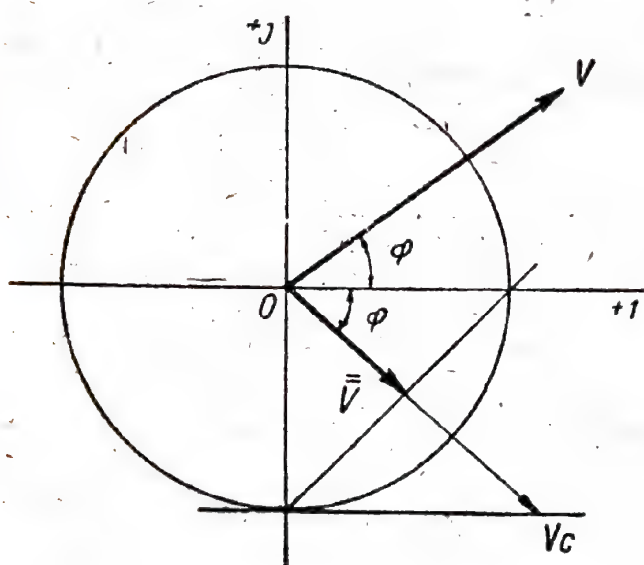


Fig. 4. Inversarea unui vector când puterea de inversiune este reală.

de inversiune, în raport cu cercul de inversiune. Inversiunea se face prin metoda polarelor reciproce (fig. 4). Acest procedeu este general fie că puterea de inversiune este o mărime reală (simetrizarea se face în raport cu axa reală, obținându-se astfel conjugatul vectorului dat), fie că puterea de inversiune este un vector.

3.2. Se reamintesc următoarele teoreme de inversiune din geometrie:

α) Inversul unui cerc, când centrul de inversiune este chiar pe cerc, este o

dreaptă perpendiculară pe diametrul ce trece prin polul dat. În inversiunea vectorială, dacă puterea de inversiune este un număr real, dreapta inversă este conjugată acestei drepte.

β) Inversul unei drepte date este un cerc ce trece prin polul dat și al cărui diametru corespunzător polului este per-

pendicular pe dreapta inversată. În inversiunea vectorială, cercul invers este simetricul acestui cerc în raport cu axa reală.

γ) Inversul unui cerc, când centrul de inversiune este exterior cercului, este tot un cerc, homotetic cu primul în raport cu origina dată. În inversiunea vectorială, cercul invers este simetricul acestui cerc în raport cu axa reală.

δ) Inversul unui cerc, când centrul de inversiune este interior cercului, este tot un cerc având centrul pe diâmetru corespunzător centrului de inversiune. În inversiunea vectorială, cercul invers este simetricul acestui cerc în raport cu axa reală.

4.3. Inversul unui vector, când puterea de inversiune este un număr complex, se obține astfel pe cale grafică (fig. 5): Fie inversiunea

$$\bar{Z}_2 = \frac{\bar{Z}_0^2}{\bar{Z}_1}$$

Se construiește simetricul vectorului \bar{Z}_1 față de vectorul \bar{Z}_0 obținându-se vectorul \bar{Z}'_1 . Se construiește cercul de rază Z_0 și se inversează vectorul \bar{Z}'_1 față de acest cerc obținându-se vectorul \bar{Z}_2 căutat.

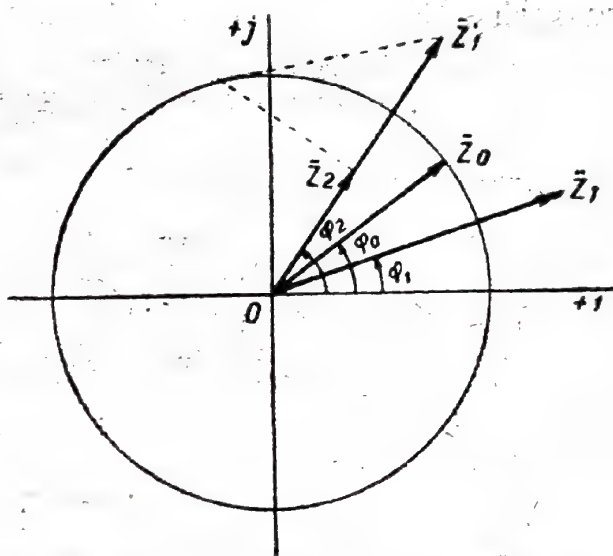


Fig. 5. Inversarea unui vector când puterea de inversiune este un număr complex.

4.4. Locuri geometrice. α) \bar{A} și \bar{B} fiind două cantități complexe (doi vectori) și λ un parametru numeric oarecare, locul geometric descris de vârful vectorului $\bar{Z} = \bar{A} + \lambda \bar{B}$ este o dreaptă ce trece prin vârful vectorului \bar{A} și este paralelă cu direcția vectorului \bar{B} .

β) Locul geometric al vârfului vectorului

$$\bar{I} = \frac{1}{\bar{A} + \lambda \bar{B}}$$

este un cerc ce trece prin origine și al cărui diâmetru principal este perpendicular pe conjugata dreptei $(\bar{A} + \lambda \bar{B})$. Dacă \overline{OP}

este distanța dela origine la această dreaptă, diametrul cercului este dat de relația

$$2r = \frac{k^2}{OP}$$

k^2 fiind puterea de inversiune.

γ) Locul geometric al vârfului vectorului

$$\bar{I} = \frac{\bar{A} + \lambda \bar{B}}{\bar{C} + \lambda \bar{D}} \quad (13)$$

este un cerc în planul complex care se obține astfel: Relația (13) se scrie

$$\bar{I} = \frac{\bar{B}}{\bar{D}} + (\bar{A} - \frac{\bar{B} \cdot \bar{C}}{\bar{D}}) \frac{1}{\bar{C} + \lambda \bar{D}} = \bar{M} + \bar{N} \cdot \bar{I}_0$$

în care

$$\left. \begin{aligned} \bar{M} &= \frac{\bar{B}}{\bar{D}} \\ \bar{N} &= \bar{A} - \frac{\bar{B} \cdot \bar{C}}{\bar{D}} \\ \bar{I}_0 &= \frac{1}{\bar{C} + \lambda \bar{D}} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Se construiește cercul \bar{I}_0 . Se înmulțește apoi acest cerc cu vectorul \bar{N} , ceea ce se realizează înmulțind diametrul cu modulul acestui vector și rotind acest diametru cu argumentul corespunzător. Se adună apoi, fiecărui punct al cercului, vectorul \bar{M} . Rotirea diametrului și deplasarea cercului se pot obține deplasând originea axelor de coordonate în vârful vectorului $-\bar{M}$ și rotind aceste axe în sens contrar celui al argumentului vectorului \bar{N} .

δ) Ecuația (13) poate fi pusă și sub forma

$$\bar{I} = \bar{F} + \bar{R} | \varphi$$

în care

$$\bar{F} = \frac{\bar{A} \cdot \bar{D}_0 - \bar{B} \cdot \bar{C}_0}{\bar{C} \cdot \bar{D}_0 - \bar{C}_0 \cdot \bar{D}} \quad \text{și} \quad \bar{R} = \frac{\bar{B} \cdot \bar{C} - \bar{A} \cdot \bar{D}}{\bar{C} \cdot \bar{D}_0 - \bar{C}_0 \cdot \bar{D}}$$

Observație. Locurile geometrice pot fi obținute și sub formă analitică, efectuându-se calculele care duc la exprimarea parametrică a ecuației lor.

4.5. Despre scări. Calculele grafice, trebuie să fie însoțite de scări pentru a putea fi utilizate. Corespondența între diversele scări, în cazul înmulțirii, împărțirii și inversiunii, se obține cu ajutorul modulelor scărilor, aplicându-se formulele de definiție ale diverselor operații. Astfel, pentru un produs

$$\overline{V} = \overline{Z} \times \overline{I}$$

se pornește dela relația

$$\frac{\overline{U}}{\overline{Z}} = \frac{\overline{I}}{1}$$

și se deduce relația dintre module

$$[u] = \frac{[z] \cdot [i]}{[c]},$$

o reprezentând modul unității

5. STUDIUL CIRCUITELOR CU AJUTORUL CANTITĂȚILOR COMPLEXE. DIPOLI. CUADRIPOLI. METODE DE CALCUL. CIRCUITE ECHIVALENTE

(Problemele 5.1—5.64)

5.1. Dipolul este circuitul electric format dintr-o serie de impedanțe (care pot fi reduse la o impedanță unică echivalentă \overline{Z}) cuprinse între două borne, una de intrare și alta de ieșire (fig. 6). Dacă dipolul nu cuprinde între cele două borne ale sale nici un fel de sursă de energie și dacă între bornele de intrare și de ieșire ale dipolului nu există nici o legătură electrică sau magnetică, este numit *dipol pasiv*. Tensiunile de intrare și de ieșire ale unui dipol se raportează întotdeauna la o aceeași origine comună.

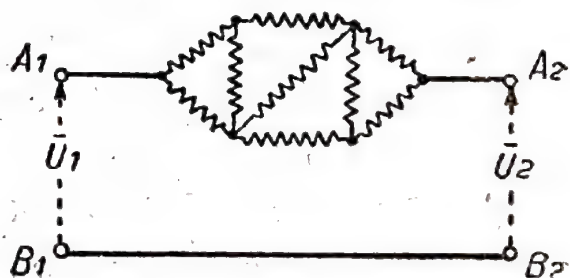


Fig. 6. Dipol.

Ecuția unui dipol pasiv este

$$\overline{U}_1 = \overline{U}_2 + \overline{Z} \overline{I}. \quad (15)$$

5.2. Diagramele dipolului. α) *Diagrama de tensiune*. Se obține construindu-se relația (15) în care se ia \overline{U}_2 ca origine

de fază (fig. 7). În această diagramă s'a luat $\bar{U}_1 = U_1 \angle \theta$, $\bar{U}_2 = U_2 \angle 0$, $\bar{Z} = Z \angle \psi$ și $\bar{I} = I \angle -\varphi$.

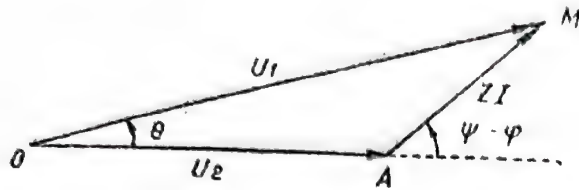


Fig. 7. Diagrama de tensiune a dipolului.

β) *Diagrama de putere sau cu doi poli de tensiune sau a cercului.* Cu aceleași notații ca mai sus, puterea aparentă dată dipolului (la borna de intrare) și cea primită de la dipol (la borna de ieșire), au următoarele expresii :-

$$\left. \begin{aligned} \bar{S}_1 = P_1 + jQ_1 = \bar{U}_1 \bar{I}^* &= \frac{U_1^2}{Z} \angle \psi - \frac{U_1 U_2}{Z} \angle \psi + \theta \\ \bar{S}_2 = P_2 + jQ_2 = \bar{U}_2 \bar{I}^* &= \frac{U_1 U_2}{Z} \angle \psi - \theta - \frac{U_2^2}{Z} \angle \psi \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Diagrama cercului se obține construind aceste relații (fig. 8).

5.3. Cuadripolul este circuitul electric format dintr'o grupare oarecare de impedanțe, cuprinsă între două borne de in-

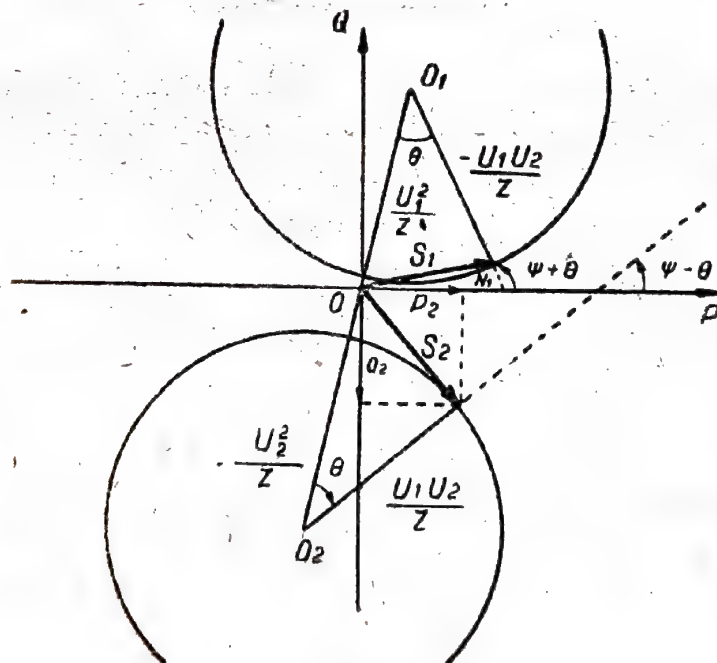


Fig. 8. Diagrama cercului dipolului.

trare și două borne de ieșire. Dacă între aceste patru borne nu există nici o sursă de energie electrică și dacă între bornele

de intrare și de ieșire ale cuadripolului nu există nici o legătură electrică sau magnetică, cuadripolul este numit pasiv.

Ecuatiile unui cuadripol pasiv sunt

$$\left. \begin{aligned} \bar{U}_1 &= \bar{A}\bar{U}_2 + \bar{B}\bar{I}_2 \\ \bar{I}_1 &= \bar{C}\bar{U}_2 + \bar{D}\bar{I}_2 \\ \bar{A}\bar{D} - \bar{B}\bar{C} &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Coefficienții cuadripolului pot fi determinați experimental prin o probă de mers în gol ($\bar{I}_2 = 0$), și una de scurt circuit ($\bar{U}_2 = 0$) la ieșire și o probă de mers în gol cuadripolul fiind alimentat pela ieșire ($\bar{I}_1 = 0$). Dacă \bar{Z}_{10} , \bar{Z}_{1sc} și \bar{Z}_{20} sunt impedanțele aparente corespunzătoare, se obține:

$$\left. \begin{aligned} \bar{A} &= \bar{Z}_{10}\bar{C}; \quad \bar{B} = \bar{Z}_{1sc}\bar{D}; \\ \bar{C} &= \frac{1}{\sqrt{\bar{Z}_{20}(\bar{Z}_{10} - \bar{Z}_{1sc})}}; \quad \bar{D} = \sqrt{\frac{\bar{Z}_{20}}{\bar{Z}_{10} - \bar{Z}_{1sc}}} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

În cazul unui cuadripol simetric $\bar{A} = \bar{D}$.

5. 4. Circuitul T echivalent unui cuadripol oarecare (fig. 10). Dacă \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} , \bar{D} , sunt constantele unui cuadripol oare-

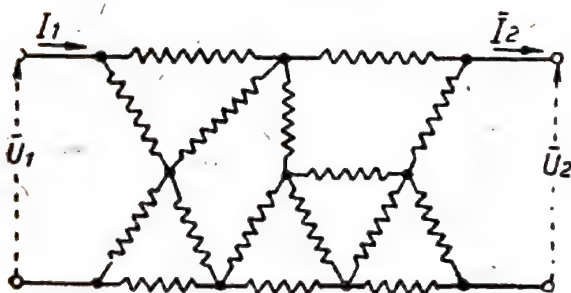


Fig. 9. Cuadripolul.

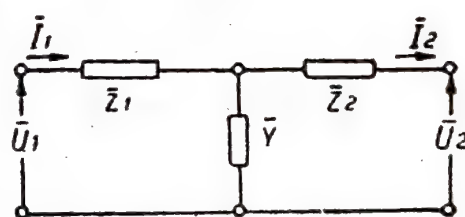


Fig. 10. Circuitul T echivalent.

care, impedanțele corespunzătoare circuitului T echivalent se determină cu ajutorul relațiilor:

$$\bar{Z}_1 = \frac{\bar{A} - 1}{\bar{C}}; \quad \bar{Z}_2 = \frac{\bar{D} - 1}{\bar{C}}; \quad \bar{Y} = \bar{C}. \quad (19)$$

Reciproc, constantele generale ale unui cuadripol în T dat, sunt date de relațiile:

$$\bar{A} = 1 + \bar{Z}_1 \bar{Y}; \quad \bar{B} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_1 \bar{Z}_2 \bar{Y}; \quad \bar{C} = \bar{Y}; \quad \bar{D} = 1 + \bar{Z}_2 \bar{Y}. \quad (20)$$

5.5. Circuitul Π echivalent unui cuadripol oarecare (fig. 11). Impedanțele corespunzătoare circuitului Π echivalent se determină cu ajutorul relațiilor

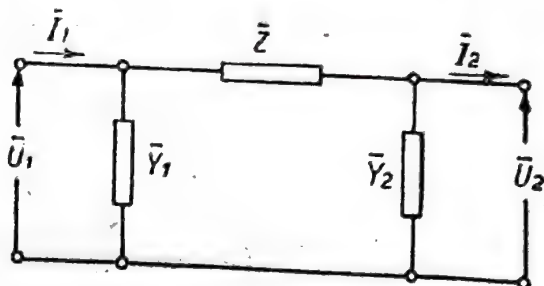


Fig. 11. Circuitul π echivalent.

$$\bar{Z} = \bar{B}; \quad \bar{Y}_1 = \frac{\bar{D} - 1}{\bar{B}}; \quad \bar{Y}_2 = \frac{\bar{A} - 1}{\bar{B}}. \quad (21)$$

Reciproc, constantele generale ale unui cuadripol în Π dat, sunt date de relațiile

$$\bar{A} = 1 + \bar{Z} \bar{Y}_2; \quad \bar{B} = \bar{Z}; \quad \bar{C} = \bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + \bar{Z} \bar{Y}_1 \bar{Y}_2; \quad \bar{D} = 1 + \bar{Z} \bar{Y}_1. \quad (22)$$

5.6. Diagramele cuadripolului. α) *Diagrama de tensiune.*

Se obține construindu-se dubla egalitate

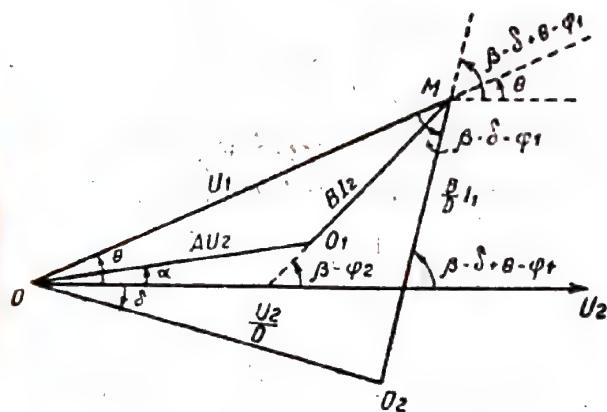


Fig. 12. Diagrama de tensiune a cuadripolului.

$$\begin{aligned} \bar{U}_1 &= \bar{A} \bar{U}_2 + \bar{B} \bar{I}_2 = \\ &= \frac{\bar{U}_2}{\bar{D}} + \frac{\bar{B}}{\bar{D}} \bar{I}_1, \end{aligned} \quad (23)$$

dedusă din relațiile (17), în care se ia \bar{U}_2 ca origine de fază (fig. 12). În această diagramă s'a luat $\bar{U}_1 = U_1 | \theta$; $\bar{I}_1 = I_1 | \theta - \varphi_1$; $\bar{I}_2 = I_2 | -\varphi_2$; $\bar{A} = A | \alpha$; $\bar{B} = B | \beta$ și $\bar{D} = D | \delta$.

β) *Diagrama de putere sau diagrama cu doi poli de tensiune sau diagrama cercului.* Cu aceleași notații ca mai sus, puterea aparentă la intrarea în cuadripol și cea la ieșirea din cuadripol sunt date de relațiile:

$$\begin{aligned} \bar{S}_1 &= \frac{D}{B} U_1^2 | \beta - \delta - \frac{U_1 U_2}{B} | \theta + \beta \\ \bar{S}_2 &= \frac{U_1 U_2}{B} | \beta - \theta - \frac{A}{B} U_2^2 | \beta - \alpha \end{aligned} \quad (24)$$

Determinarea celor b curenți independenți se face prin sistemul de ecuații

$$\bar{Z}_1 \bar{I}_1 + \bar{Z}_{12} \bar{I}_2 + \dots + \bar{Z}_{1n} \bar{I}_n + \dots + \bar{Z}_{1b} \bar{I}_b = \bar{E}_1 \quad (l = 1, 2, \dots, b)$$

în care \bar{Z}_{1l} este impedanța totală a ochiului străbătut de curentul \bar{I}_l

\bar{Z}_{1l} este impedanța comună ochiului străbătut de curentul \bar{I}_1 și ochiului străbătut de curentul \bar{I}_l
(Pentru fiecare ecuație în parte $\sum \bar{Z}_{1l} = \bar{Z}_{1l}$ și $\bar{Z}_{1l} = \bar{Z}_{1l}$)
 \bar{E}_1 f.e.m. totală care acționează în ochiul străbătut de curentul \bar{I}_1

Curenții reali din laturi se obțin prin însumarea algebrică a curenților independenți care străbat latura respectivă.

γ) *Metoda perechilor de noduri.* Două noduri oarecare, alese arbitrar într-o rețea, formează o *pereche de noduri*. Fixarea arbitrară a unei perechi de noduri pune problema găsirii diferenței de potențial între aceste noduri, iar cunoașterea acestei tensiuni dă posibilitatea găsirii curentului care circulă prin orice element care leagă cele două noduri. Metoda perechilor de noduri este următoarea:

— Se alege în rețeaua dată un număr de $p = n - 1$ perechi de noduri independente, arbitrar alese.

— Se presupune că, la fiecare din aceste perechi de noduri există o diferență de potențial \bar{E} având un anumit sens de polaritate.

— Pentru fiecare nod în parte se scrie prima lege a lui Kirchhoff. Se va obține astfel un sistem de p ecuații lineare de forma

$$\bar{Y}_{N1} \bar{E}_1 + \bar{Y}_{N2} \bar{E}_2 + \dots + \bar{Y}_{Nn} \bar{E}_n = \bar{I}_n \quad (N = 1, 2, \dots, p)$$

în care \bar{Y}_{Nn} reprezintă admitanța laturei care unește perechea de noduri Nn iar \bar{E}_n tensiunea independentă dela bornele acestei perechi de noduri.

— Se rezolvă acest sistem de ecuații astfel obținut, determinându-se tensiunile $\bar{E}_1, \bar{E}_2, \dots, \bar{E}_n$.

— Se determină potențialul celorlalte noduri în raport cu acestea.

— Curenții din laturile rețelei se determină apoi aplicând legea lui Ohm fiecărui element în parte.

Pentru a se putea aplica această metodă trebuie transformate sursele de tensiune în surse de curent.

O sursă de tensiune având în serie o impedanță \bar{Z} se poate transforma într-o sursă de curent având în paralel o admitanță \bar{Y} (fig. 14). Din această figură rezultă imediat

$$\bar{V} = \bar{E} - \bar{Z} \bar{I}_t \quad \text{și} \quad \bar{I}_t = \bar{I} - \bar{Y} \bar{V}_t$$

$$\bar{I}_t = \frac{\bar{E} - \bar{V}_t}{\bar{Z}} = \bar{I} - \bar{Y} \bar{V}_t \quad \bar{V}_t = \frac{\bar{I} - \bar{I}_t}{\bar{Y}} = \bar{E} - \bar{Z} \bar{I}_t$$

δ) *Suprapunerea efectelor*: Intensitatea curentului într-o ramură oarecare a unei rețele electrice liniare, având un număr oarecare de forțe electromotoare, este egală cu suma curenților ce ar fi produși în acea ramură de fiecare forță electromotoare lucrând independent.

ε) *Teorema reciprocității* (Maxwell): Dacă o forță electromotoare \bar{E}_{AB}

lucrând în latura AB produce un curent \bar{I}_{CD} în latura CD , reciproc, o forță electromotoare \bar{E}_{CD} , egală cu precedenta în mărime și în fază, introdusă în latura CD , produce în latura AB un curent \bar{I}_{AB} egal, în mărime și fază, cu precedentul.

ζ) *Teorema lui Thévenin*: Dacă două puncte A și B ale unei rețele, având potențialele \bar{V}_A și \bar{V}_B sunt legate printr'un conductor de impedanță \bar{Z}_{AB} , acest conductor va fi străbătut de curentul

$$\bar{I}_{AB} = \frac{\bar{V}_A - \bar{V}_B}{\bar{Z}_{AB} + \bar{Z}_R}$$

în care \bar{Z}_R este impedanța rețelei, măsurată între punctele A și B înainte de a introduce impedanța \bar{Z}_{AB} .

η) *Transfigurarea circuitelor*: Un circuit în stea poate fi transformat prin transfigurare într'un circuit în triunghi și reciproc. Dacă \bar{Z}_{AO} , \bar{Z}_{BO} , \bar{Z}_{CO} sunt impedanțele ramurilor stelei și \bar{Z}_{AB} , \bar{Z}_{BC} , \bar{Z}_{CA} sunt impedanțele laturilor triunghiului, relațiile de transformare sunt

$$\bar{Z}_{AO} = \frac{\bar{Z}_{OA} \bar{Z}_{AB}}{\bar{Z}_{AB} + \bar{Z}_{BO} + \bar{Z}_{CA}}; \bar{Z}_{BO} = \frac{\bar{Z}_{AB} \bar{Z}_{BC}}{\bar{Z}_{AB} + \bar{Z}_{BO} + \bar{Z}_{CA}}; \bar{Z}_{CO} = \frac{\bar{Z}_{BO} \bar{Z}_{CA}}{\bar{Z}_{AB} + \bar{Z}_{BO} + \bar{Z}_{CA}};$$

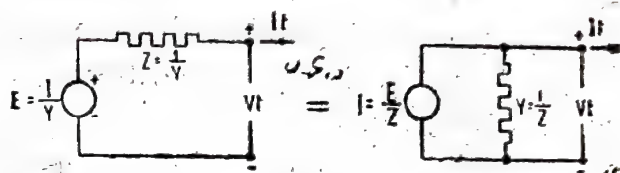


Fig. 14. Transformarea unei surse de tensiune într-o sursă de curent.

$$\bar{Z}_{AB} = \frac{\bar{Z}_{A0}\bar{Z}_{B0} + \bar{Z}_{B0}\bar{Z}_{C0} + \bar{Z}_{C0}\bar{Z}_{A0}}{\bar{Z}_{C0}}; \bar{Z}_{BC} = \frac{\bar{Z}_{A0}\bar{Z}_{B0} + \bar{Z}_{B0}\bar{Z}_{C0} + \bar{Z}_{C0}\bar{Z}_{A0}}{\bar{Z}_{A0}};$$

$$\bar{Z}_{CA} = \frac{\bar{Z}_{A0}\bar{Z}_{B0} + \bar{Z}_{B0}\bar{Z}_{C0} + \bar{Z}_{C0}\bar{Z}_{A0}}{\bar{Z}_{B0}}.$$

5.8. Circuitele echivalente ale mașinilor electrice.

α) *Circuitul echivalent al transformatorului.* Circuitul electromagnetic al unui transformator se transformă într'un circuit electric echivalent de forma unui cuadripol în T , în care \bar{Z}_1 este impedanța circuitului primar, \bar{Z}_2 este impedanța circuitului secundar și \bar{Y} este admitanța corespunzătoare circuitului de magnetizare (pierderile în fier și susceptanța respectivă).

Dacă transformatorul se studiază în raport cu circuitul primar, impedanța și tensiunea secundară se raportează la primar, obținându-se

$$\bar{Z}'_2 = k^2 \bar{Z}_2 \text{ și } \bar{U}'_2 = k \bar{U}_2$$

în care k este raportul de transformare definit prin relația

$$k = \frac{U_1}{U_2}.$$

Dacă transformatorul se studiază în raport cu circuitul secundar, impedanța și tensiunea primară se raportează la secundar, obținându-se

$$\bar{Z}'_1 = \frac{1}{k^2} \bar{Z}_1 \text{ și } \bar{U}'_1 = \frac{1}{k} \bar{U}_1.$$

Impedanțele cuadripolului echivalent se pot determina experimental prin probele de mers în gol și de scurt circuit. Se găsește:

— din proba de mers în gol,

$$G_0 = \frac{P_0}{3U_0^2} \text{ S} \quad (25)$$

în care

$$p_0 = P_0 - 3 R_1 I_0^2 \text{ W}$$

P_0 fiind pierderile totale măsurate la mersul în gol

R_1 rezistența înfășurării primare

I_0 curentul de mers în gol

p_0 pierderile în fier (prin histerezis și curenți turbionari)

și, admitând egalitatea între curentul de magnetizare și curentul reactiv absorbit de transformator,

$$B_0 = \frac{\sqrt{3} I_0 \sin \varphi_0}{U_0} \text{ S} \quad (26)$$

φ_0 fiind determinat de relația

$$\cos \varphi_0 = \frac{P_0}{\sqrt{3} U_0 I_0}$$

Relațiile (25) și (26) dau componentele admitanței \bar{Y} .
— din proba de scurt circuit

$$P_{sc} = 3 (R_1 + R'_2) I_{sc}^2; \quad \text{W}$$

cum în general

$$R_2 = k^2 R_1 = R'_2 \quad \Omega$$

rezultă

$$R_1 = k^2 R_2 = \frac{P_{sc}}{6 I_{sc}^2} \quad \Omega \quad (27)$$

Tot din această probă se deduce din

$$U_{sc} = \sqrt{3} Z_{TOT} I_{sc} = \sqrt{3} I_{sc} \sqrt{(R_1 + R'_2)^2 + (X_1 + X'_2)^2} \quad \text{V}$$

reactanțele primară și secundară

$$\begin{aligned} X_1 = X'_2 = k^2 X_2 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{U_{sc}^2}{3 I_{sc}^2} - (R_1 + R'_2)^2} = \\ &= \frac{1}{2 \sqrt{3} I_{sc}} \sqrt{U_{sc}^2 - \frac{P_{sc}^2}{I_{sc}^2}} \quad \Omega \end{aligned} \quad (28)$$

Relațiile (27) și (28) dau componentele impedanțelor \bar{Z}_1 și \bar{Z}_2 .

Observație. Relațiile de mai sus sunt stabilite în cazul unui transformator trifazat. În cazul unui transformator monofazat ele devin:

$$G_0 = \frac{P_0}{U_0^2} \quad \text{S}$$

$$p_0 = P_0 - R_1 I_0^2 \quad \text{W}$$

$$B_0 = \frac{I_0 \sin \varphi}{U_0} \quad \text{S}$$

$$\cos \varphi_0 = \frac{P_0}{U_0 I_0}$$

$$P_{sc} = (R_1 + R'_1) I_{sc}^2 \quad \text{W}$$

$$R_1 = k^2 R_2 = \frac{P_{sc}}{2 I_{sc}^2} \quad \Omega$$

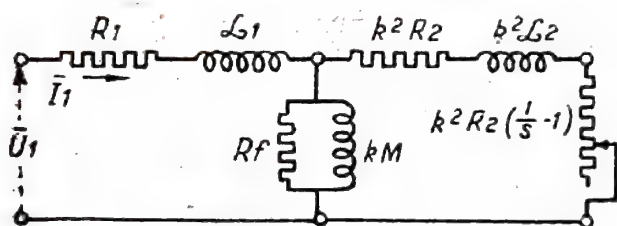
$$X_1 = k^2 X_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{U_{sc}^2}{I_{sc}^2} - (R_1 + R'_1)^2} = \frac{1}{2 I_{sc}} \sqrt{U_{sc}^2 - \frac{P_{sc}^2}{I_{sc}^2}} \quad \Omega$$

β) **Circuitul echivalent al motorului asincron trifazat.** Sotinduse motorul asincron ca fiind un transformator, circuitul echivalent al acestuia este deasemenea un cuadripol în T închis pe impedanța variabilă

$$k^2 R_2 \left(\frac{1}{s} - 1 \right) \quad (29)$$

în care s este alunecarea motorului asincron.

Dacă se cuprinde în această impedanță și rezistența înfășurării rotorului, expresia ei devine



$$k^2 \frac{R_2}{s} \quad (30)$$

Fig. 15. Circuitul echivalent al motorului asincron trifazat (pe o fază).

Cuadripolul echivalent al motorului asincron este dat în fig. 15.

Relațiile (25), (26), (27), (28) și (30) dau toate elementele necesare construirii circuitului echivalent al motorului asincron.

Cu ajutorul circuitelor echivalente al transformatorului și motorului asincron, funcționarea acestora se studiază ca și funcționarea unui cuadripol oarecare.

Observație generală : Studiul sistemelor polifazate (respectiv trifazate) cu ajutorul circuitelor echivalente, se face lucrând totdeauna numai pe fază.

PARTEA II

STUDIUL REGIMULUI DEFORMANT

6. STUDIUL UNDELOR COMPLEXE

(Problemele 6.1—6.40)

6.1. Regimul deformant este regimul energetic alternativ la care, cel puțin una din unde (de curent sau de tensiune), nu este sinusoidală.

6.2. Funcția periodică nesinusoidală este acea funcție nesinusoidală care se reproduce identic cu ea însăși după perioade egale și este caracterizată prin ecuația

$$f(t) = f(t + kT)$$

T fiind perioada și k un număr întreg oarecare.

6.3. Funcțiile armonice sunt funcțiile periodice *sinusoidale* la care raportul perioadelor este un număr întreg. Funcția la perioada căreia se raportează celelalte perioade se numește *unda* sau *armonica fundamentală*; celelalte se numesc *unde* sau *armonice superioare*.

6.4. Orice funcție periodică nesinusoidală poate fi descompusă într-o infinitate de funcții armonice, cu perioadele în progresie aritmetică, în sinus și cosinus.

Reciproc, compunerea a două sau mai multe armonice dă o funcție periodică nesinusoidală cu perioada egală cu aceea a unei fundamentale.

6.5. Decalajul față de origină a armonicei

$$y = A \sin(n\omega t - \varphi)$$

este φ/n .

6.6. Două armonice sunt în fază dacă trec prin zero în același timp și în același sens.

Dacă trecerile prin zero nu mai coincid, armonicele sunt *defazate* sau *decalate* una față de alta. În general, decalajul are un sens numai pentru armonice de același ordin.

Decalajul între armonice diferite se determină față de origină.

Exemplu: armonicele $y_1 = A_1 \sin(n\omega t - \varphi_1)$ și $y_2 = A_2 \sin(n\omega t - \varphi_2)$ sunt defazate una față de alta cu unghiul:

$$|\varphi| = \left| \frac{\varphi_2}{n} - \frac{\varphi_1}{n} \right| < \frac{\pi}{n}$$

Dacă $\varphi < 0$, funcția y_1 este decalată în urma funcției y_2 ; invers dacă $\varphi > 0$.

6.7. Reprezentarea polară a funcțiilor periodice. Considerând mărimea razei vectoriale egală cu mărimea amplitudinii funcției periodice la timpul t oarecare și argumentul corespunzător egal cu ωt , ω fiind pulsația mărimii periodice respective, hodograful acestor raze vectoriale, pentru un ciclu complet, reprezintă curba polară a funcției periodice date.

Diagrama polară a unei sinusoidale este un cerc având diametrul egal cu amplitudinea maximă. Inclinarea diametrului principal al acestui cerc față de axa complexă dă defazajul mărimii sinusoidale față de origine.

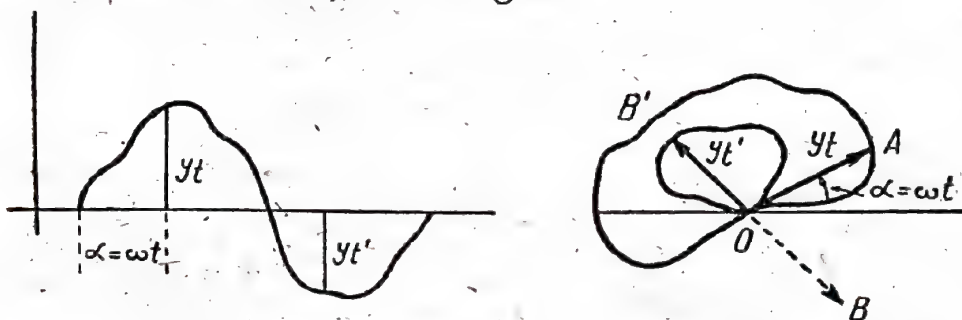


Fig. 16. Reprezentarea polară a mărimilor periodice.

6.8. Compunerea armonicelor se face grafic sau analitic. Grafic, se desenează armonicile respective și se face sumarea punct cu punct a ordonatelor corespunzătoare aceluiași abscise.

Analitic, se disting două cazuri:

α) Curbele au aceeași perioadă. În acest caz se identifică $A_1 \sin(n\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(n\omega t + \varphi_2) = A \sin(n\omega t + \varphi)$ și se găsește

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$$

β) Curbele au perioade diferite. În acest caz se aplică relația

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

undelor cu amplitudine egală și se găsește pentru undele

$$A_1 \sin(m\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(n\omega t + \varphi_2) = (A_1 - A_2) \sin(m\omega t + \varphi_1) + 2A_2 \sin\left(\frac{m+n}{2}\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \cos\left(\frac{m-n}{2}\omega t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right).$$

7. ANALIZA ARMONICĂ A FUNCȚIILOR NESINUSOIDALE

(Problemele 7.1—7.25)

Orice funcție nesinusoidală poate fi pusă sub forma

$$y = C_0 + \sum_1^{\infty} C_k \sin(k\omega t - \varphi_k) = C_0 + \sum_1^{\infty} A_k \sin k\omega t + \sum_1^{\infty} B_k \cos k\omega t \quad (31)$$

în care

$$C_k^2 = A_k^2 + B_k^2 \text{ și } \operatorname{tg} \varphi_k = -\frac{B_k}{A_k} \quad (32)$$

Găsirea coeficienților A_k , B_k și C_0 formează obiectul analizei armonice.

7.1. Metoda integrării. y fiind o funcție algebrică cunoscută, coeficienții sunt dați de relațiile

$$\left. \begin{aligned} A_k &= \frac{2}{T} \int_0^T y \sin k\omega t \, dt \\ B_k &= \frac{2}{T} \int_0^T y \cos k\omega t \, dt \\ C_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T y \, dt \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

7.2. Metoda discontinuităților sau a incidentelor geometrice. (Lalescu — Abason). $F(x_i)$ fiind valoarea funcției în dreapta punctului de discontinuitate de abscisă x_i și $f(x_i)$ fiind valoarea acesteia în stânga punctului de discontinuitate, dacă se notează

$$\begin{aligned} S_i^{(0)} &= F(x_i) - f(x_i) \\ S_i^{(p)} &= F^{(p)}(x_i) - f^{(p)}(x_i) \end{aligned}$$

în care $f^{(p)}(x_i)$ și $f^{(p)}(x_i)$ sunt derivatele de ordinul p ale acestor funcții, coeficienții termenilor generali ai descompunerii în serie Fourier sunt

$$\left. \begin{aligned} \pi A_k &= \frac{1}{k} \sum S_i^{(0)} \cos kx_i - \frac{1}{k^2} \sum S_i^{(1)} \sin kx_i - \\ &- \frac{1}{k^3} \sum S_i^{(2)} \cos kx_i + \frac{1}{k^4} \sum S_i^{(3)} \sin kx_i + \\ &+ \frac{1}{k^5} \sum S_i^{(4)} \cos kx_i - \dots \\ \pi B_k &= -\frac{1}{k} \sum S_i^{(0)} \sin kx_i - \frac{1}{k^2} \sum S_i^{(1)} \cos kx_i + \\ &+ \frac{1}{k^3} \sum S_i^{(2)} \sin kx_i + \frac{1}{k^4} \sum S_i^{(3)} \cos kx_i - \\ &- \frac{1}{k^5} \sum S_i^{(4)} \sin kx_i - \dots \\ 2\pi C_0 &= \sum \left(-\frac{1}{1!} x_i S_i^{(0)} + \frac{1}{2!} x_i^2 S_i^{(1)} - \frac{1}{3!} x_i^3 S_i^{(2)} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{4!} x_i^4 S_i^{(3)} - \dots \right) \end{aligned} \right\} (34)$$

În aceste expresii, termenul general $\sum S_i^{(p)} \sin kx_i$, respectiv $\sum S_i^{(p)} \cos kx_i$, trebuie înțeles în sensul că, pentru toate punctele de abscisă x_i în care funcția prezintă salturi de ordinul p (derivate de ordinul p) se va face produsul $S_i^{(p)} \sin kx_i$ sau $S_i^{(p)} \cos kx_i$ și se adună rezultatele.

Pentru originea curbei de analizat ($x_i = 0$) ca și pentru extremitatea ei ($x_i = 2\pi$), se consideră că funcția din stânga originii cum și funcția din dreapta punctului de abscisă $x_i = 2\pi$ sunt nule.

7.3. Analiza armonică a curbelor periodice experimentale. Pentru aceste curbe nu se poate scrie ecuația analitică. Se transformă integralele (33) în sume finite și se obține

$$\left. \begin{aligned} A_k &= \frac{1}{p} \sum_{m=1}^{2p} Y_m \sin km \frac{\pi}{p} \\ B_k &= \frac{1}{p} \sum_{m=1}^{2p} Y_m \cos km \frac{\pi}{p} \\ C_0 &= \frac{1}{2p} \sum_{m=1}^{2p} Y_m \end{aligned} \right\} (35)$$

în care $2p$ este numărul de părți egale în care a fost împărțită perioada și Y_m amplitudinea corespunzătoare abscisei m .

Calculul sumelor (35) se poate face direct sau sistematizând acest calcul. Metodele de sistematizare sunt foarte multe. Dintre acestea indicăm următoarele două:

α) *Metoda ordonatelor echidistante* (Thompson-Runge). Se împarte perioada în $2p = 4q$ diviziuni egale. Calculul se face după următoarea schemă, întocmită pentru $2p = 12$.

Ordonate	Y_{12}	Y_1 Y_{11}	Y_2 Y_{10}	Y_3 Y_9	Y_4 Y_8	Y_5 Y_7	Y_6
Sume s_k		s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
diferențe d_k		d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	
Sume				Diferențe			
	s_0	s_1	s_2	s_3	d_1	d_2	d_3
	s_6	s_5	s_4		d_5	d_4	
Sume	S_0	S_1	S_2	S_3	E_1	E_2	E_3
Diferențe	M_0	M_1	M_2		D_1	D_2	

Calculul coeficienților termenilor în sinus

Sin $30^\circ = 0,5$ Sin $60^\circ = 0,866$ Sin $90^\circ = 1$	E_1 E_3	E_2	D_1	D_2	E_1	E_3
Sume	I	II	I	II	I	II
Suma I + II	$6 A_1$		$6 A_2$		—	
Diferența I - II	$6 A_5$		$6 A_4$		$6 A_3$	

Calculul coeficienților termenilor în cosinus

$\cos 0^\circ = 1$ $\cos 30^\circ = 0,866$ $\cos 60^\circ = 0,5$	$S_0 + S_2$	$S_1 + S_3$	M_0 M_2	M_1	S_0 $-S_2$	$-S_3$ S_1	M_0	M_2
Suma	I	II	I	II	I	II	I	II
Suma I + II	12 B_0		6 B_1		6 B_2		—	
Diferența I—II	12 B_0		6 B_5		6 B		6 B_3	

Notă. În fiecare rând, valorile trebuie înmulțite cu sinusul sau cosinusul din stânga lor.

Pentru calcule cu mai multe armonice există formulare de calcul. Calculul se poate face deasemenea și cu ajutorul unor cartoane ajurate (vezi problemele 7.14 și 7.15).

β) *Metoda grafică* (Krug-Roth). În relațiile (35) se înmulțește prima relație cu j și se adună cu a doua, obținându-se

$$\begin{aligned}\bar{C}_k &= B_k + jA_k = \frac{1}{p} \sum_{m=1}^{2p} Y_m \left(\cos km \frac{\pi}{p} + j \sin km \frac{\pi}{p} \right) = \\ &= \frac{1}{p} \sum_{m=1}^{2p} Y_m \left| km \frac{\pi}{p} \right|\end{aligned}$$

Armonica de ordinul k poate fi determinată efectuând suma geometrică a diverselor amplitudini, fiecare făcând unghiul $km \frac{\pi}{p}$ față de originea de fază, și împărțind rezultatul prin p ($2p$ este numărul în care s'a împărțit perioada).

Defazajul se obține măsurând unghiul pe care îl face această rezultantă cu axa complexă.

8. STUDIUL REGIMULUI DEFORMANT

(Problemele 8.1—8.51)

8.1. Mărimile caracteristice ale regimului deformant. O mărime nesinusoidală poate fi reprezentată printr'o expresie de forma (seria Fourier):

$$y = Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} Y_k \sqrt{2} \sin(k\omega t - \varphi_k) \quad (36)$$

în care Y_k este valoarea eficace a armonicii de ordinul k .

α) *Valoarea eficace* a mărimii nesinusoidale (36) este dată de relația

$$Y_{ef} = \sqrt{\sum_0^{\infty} Y_k^2} \quad (37)$$

Valoarea eficace (37) poate fi determinată grafic cu ajutorul curbei polare reprezentative a funcției periodice date. Dacă S este suprafața închisă de această curbă polară, valoarea eficace este :

$$Y_{ef} = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$$

β) *Rezidiul deformant* sau *rezidiul* unei funcții nesinusoidale este curba care se obține suprimând armonica fundamentală și care are valoarea eficace

$$Y_d = \sqrt{Y_{ef}^2 - Y_1^2} \cong \sqrt{Y_0^2 + Y_2^2 + \dots + Y_n^2} \quad (38)$$

γ) *Valoarea medie* a unei funcții nesinusoidale (corespunzând valorii medii a unei funcții sinusoidale) e dată de relația

$$Y_{med} = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \left(Y_0 + \sum_1^n Y_k \sqrt{2} \sin k \omega t \right) dt = Y_0 + \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sum_1^n \frac{1}{k} Y_k \quad (39)$$

în care k este un număr impar.

δ) *Factorul de formă* este definit de relația

$$\alpha = \frac{Y_{ef}}{Y_{med}} \quad (40)$$

ϵ) *Factorul de creastă* sau *de vârf* este definit de relația

$$f_v = \frac{Y_{max}}{Y_{ef}} \quad (41)$$

în care Y_{max} este amplitudinea maximă măsurată pe curbă.

ζ) *Coeeficientul de distorsiune* este definit de relația

$$\delta = \frac{Y_d}{Y_{ef}} \quad (42)$$

8.2. Puterea în regim deformant. Fie undele de tensiune și curent ale unui regim deformant

$$\left. \begin{aligned} u &= U_0 + \sum_1^n U_k \sqrt{2} \sin(k\omega t - \alpha_k) \\ i &= I_0 + \sum_1^n I_k \sqrt{2} \sin(k\omega t - \beta_k) \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

și

$$\varphi_k = \beta_k - \alpha_k.$$

În regim deformant se întâlnesc patru noțiuni de putere :

α) Puterea activă

$$P = U_0 I_0 + \sum_1^n U_k I_k \cos \varphi_k. \quad (44)$$

Unitatea de măsură este wattul (W).

β) Puterea reactivă (C. Budeanu) :

$$Q = \sum_1^n U_k I_k \sin \varphi_k. \quad (45)$$

Unitatea de măsură este varul (VAR).

γ) Puterea deformantă (C. Budeanu) :

$$D = \sqrt{\sum_0^{m,n} \left[U_m^2 I_n^2 + U_n^2 I_m^2 - 2 U_m U_n I_m I_n \cos(\varphi_m - \varphi_n) \right]}. \quad (46)$$

Unitatea de măsură (propusă) este vadul (VAD).

Dacă U este sinusoidal, sau dacă $\delta_T \leq 20\%$,

$$D = U_{ef} I_d. \quad (47)$$

Dacă $\delta_T > 20\%$,

$$D = U_{ef} I_d + U_d I_{ef}. \quad (48)$$

O formulă simplificată dar foarte precisă este

$$D = \sqrt{U_1^2 I_d^2 + U_d^2 I_1^2 - 2 U_1 I_1 \sum_2^n U_m I_m \cos(\varphi_1 - \varphi_m)}. \quad (49)$$

8) Puterea aparentă

$$S = U_{ef} I_{ef} = \sqrt{P^2 + Q^2 + D^2}. \quad (50)$$

Unitatea de măsură este volt-amperele (VA).

8.3. Factorul de putere în regim deformant. Factorul de putere în regim deformant este definitiv de relația

$$K = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2 + D^2}} \quad (51)$$

Se definește :

α) *Factorul reactiv* al regimului.

$$\rho = \frac{Q}{P} = \operatorname{tg} \varphi. \quad (52)$$

β) *Factorul deformant* al regimului

$$\tau = \frac{D}{\sqrt{P^2 + Q^2}} = \operatorname{tg} \xi. \quad (53)$$

Cu mărimile deduse din (52) și (53), relația (51) devine

$$K = \cos \varphi \cdot \cos \xi. \quad (54)$$

8.4. Circuite electrice în regim deformant. α) *Legile lui Ohm și Kirchhoff.* Pentru un circuit serie, format dintr-o rezistență, o inductanță și un condensator cărora i se aplică o tensiune de forma (43), curentul ce ia naștere în circuit este

$$i = I_0 + \sum_1^n I_k \sqrt{2} \sin(k\omega t - \varphi_k) \quad (55)$$

în care

$$\left. \begin{aligned} I_k &= \frac{U_k}{\sqrt{R^2 + \left(Lk\omega - \frac{1}{Ck\omega}\right)^2}} \\ \operatorname{tg} \varphi_k &= \frac{Lk\omega - \frac{1}{Ck\omega}}{R} \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

termenul

$$I_0 = \frac{U_0}{R + R_c}$$

există numai dacă condensatorul este imperfect (șuntat cu o rezistență de o valoare oarecare R_c).

β) *Rezonanța în regimul deformant.*

Condiția de rezonanță pentru armonica de ordinul k , este

$$LC k^2 \omega^2 - 1 = 0.$$

3.5. Efectele regimului deformant.

α) *Un condensator alimentat cu tensiunea*

$$u = \sum_0^n (U'_k \sqrt{2} \sin k\omega t + U''_k \sqrt{2} \cos k\omega t) \quad (57)$$

este străbătut de curentul

$$i = C\omega \sum_0^n \left[k U'_k \sqrt{2} \sin \left(k\omega t + \frac{\pi}{2} \right) + k U''_k \sqrt{2} \cos \left(k\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \right].$$

β) *O inductanță alimentată cu tensiunea (57) este străbătută de curentul*

$$i = \frac{1}{L\omega} \sum_0^n \left[\frac{1}{k} U'_k \sqrt{2} \sin \left(k\omega t - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{k} U''_k \sqrt{2} \cos \left(k\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \right].$$

γ) *Creșterea puterii aparente este dată de relația*

$$\xi = \frac{S'' - S'}{S'} \cdot 100$$

în care S' este puterea aparentă datorită numai unei fundamentale și S'' puterea aparentă totală.

δ) *Creșterea pierderilor ohmice.* R fiind rezistența circuitului trifazat pe fază, dacă se notează

$$p'' = 3 R \frac{P^2 + Q^2 + D^2}{3 U^2}$$

și

$$p' = 3 R \frac{P^2 + Q^2}{3 U^2},$$

U fiind tensiunea între faze, creșterea pierderilor ohmice este dată de relația

$$\xi = \frac{p'' - p'}{p'} = \tau^2.$$

ε) *Creșterea impedanței aparente.* Impedanța unui circuit serie format dintr'o rezistență R , o reactanță inductivă X_L și o reactanță capacitativă X_C în regim sinusoidal fiind

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2},$$

aceiași impedanță, măsurată în regim deformant este

$$Z' = \Gamma \cdot Z$$

în care

$$\Gamma = \sqrt{\frac{U_1^2 + \sum_2^n U_k^2}{U_1^2 + \sum_2^n \frac{R^2 + (X_L - X_C)^2}{R^2 + (kX_L - \frac{1}{k} X_C)^2} U_k^2}}$$

U_k fiind valoarea eficace a armonice de ordinul k .

8.6. Regimul deformant în sisteme trifazate echilibrate.

α) Tensiunea pe fază a unui alternator este de forma

$$\left. \begin{aligned} e_I &= \sum_1^n E_k \sqrt{2} \sin k\omega t && \text{pentru faza I} \\ e_{II} &= \sum_1^n E_k \sqrt{2} \sin k\omega \left(t - \frac{2\pi}{3} \right) && \text{,, ,, II} \\ e_{III} &= \sum_1^n E_k \sqrt{2} \sin k\omega \left(t + \frac{2\pi}{3} \right) && \text{,, ,, III} \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

în care k este un număr impar,

Pentru

$$k = 3\alpha \quad (\alpha = 0, 1, 2, \dots)$$

armonicele corespunzătoare formează sisteme homopolare, tensiunile pe cele trei faze fiind identice și în fază:

$$e_I = e_{II} = e_{III} = \sum_0^\infty E_{3\alpha} \sqrt{2} \sin 3\alpha\omega t. \quad (59)$$

Pentru

$$k = 3\alpha + 1 \quad (\alpha = 0, 1, 2, \dots)$$

armonicile corespunzătoare formează *sisteme directe*, tensiunile pe cele trei faze fiind

$$\left. \begin{aligned} e_I &= \sum_0^{\infty} E_{3\alpha+1} \sqrt{2} \sin (3\alpha+1) \omega t \\ e_{II} &= \sum_0^{\infty} E_{3\alpha+1} \sqrt{2} \sin \left[(3\alpha+1) \omega t - \frac{2\pi}{3} \right] \\ e_{III} &= \sum_0^{\infty} E_{3\alpha+1} \sqrt{2} \sin \left[(3\alpha+1) \omega t + \frac{2\pi}{3} \right] \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

Pentru

$$k = 3\alpha - 1 \quad (\alpha = 0, 1, 2, \dots)$$

armonicile corespunzătoare formează *sisteme inverse*, tensiunile pe cele trei faze fiind

$$\left. \begin{aligned} e_I &= \sum_0^{\infty} E_{3\alpha-1} \sqrt{2} \sin (3\alpha-1) \omega t \\ e_{II} &= \sum_0^{\infty} E_{3\alpha-1} \sqrt{2} \sin \left[(3\alpha-1) \omega t + \frac{2\pi}{3} \right] \\ e_{III} &= \sum_0^{\infty} E_{3\alpha-1} \sqrt{2} \sin \left[(3\alpha-1) \omega t - \frac{2\pi}{3} \right] \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

β) Tensiunea între două faze (tensiunea la borne) a unui alternator. Din (58) se găsește

$$e_{II-I} = e_I - e_{II} = \sum_1^n E_k \sqrt{2} \cdot 2 \sin \left(k \omega t - k \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \right) \sin k \frac{\pi}{3}$$

Pentru

$$k = 3\alpha \quad (\alpha = 0, 1, 2, \dots)$$

rezultă

$$e_{II-I} = 0.$$

Pentru

$$k = 3\alpha + 1 \quad (\alpha = 0, 1, 2, \dots)$$

$$e_{II-I} = \sum_0^{\infty} E_{3\alpha+1} \sqrt{2} \sqrt{3} \sin \left[(3\alpha+1) \omega t + \frac{\pi}{6} \right].$$

Pentru

$$k = 3\alpha - 1 \quad (\alpha = 0, 1, 2, \dots)$$

$$e_{II-I} = \sum_0^{\infty} E_{3\alpha-1} \sqrt{2} \sqrt{3} \sin \left[(3\alpha - 1) \omega t - \frac{\pi}{6} \right].$$

Raportul dintre tensiunea la borne și tensiunea pe fază este dat de relația

$$\frac{E_{II-I}}{E_I} = \sqrt{3} \sqrt{\frac{E_1^2 + E_5^2 + E_7^2 + E_{11}^2 + \dots}{E_1^2 + E_3^2 + E_5^2 + E_7^2 + E_9^2 + E_{11}^2 + \dots}}$$

γ) *Legarea în triunghi a fazelor unui alternator.*

Tensiunea la bornele triunghiului deschis al fazelor alternatorului este

$$u = e_I + e_{II} + e_{III} = \sum_1^n E_k \sqrt{2} \left(1 + 2 \cos k \frac{2\pi}{3} \right) \sin k\omega.$$

Pentru

$$k = 3\alpha \pm 1 \quad (\alpha = 0, 1, 2, \dots)$$

$$u = 0.$$

Pentru

$$k = 3\alpha \quad (\alpha = 0, 1, 2, \dots)$$

$$u = 3 \sum_0^{\infty} E_{3\alpha} \sqrt{2} \sin 3\alpha\omega t.$$

PARTEA III

STUDIUL REGIMULUI TRIFAZAT DESECHILIBRAT

9. DEPLASAREA PUNCTULUI NEUTRU. CALCUL DIRECT DE REȚELE

(Problemele 9.1—9.35)

9.1. Reprezentarea topografică a tensiunilor. În cazul unui sistem trifazat simetric și echilibrat, forțele electromotoare pe fază ale unui alternator se reprezintă prin trei vectori concurenți, egali ca mărime și decalati succesiv unul față de altul cu un unghi $2\pi/3$. În cazul în care sistemul este desechilibrat, cei trei vectori concurenți pot fi oricum, atât ca mărime cât și ca defazaj. Punctul de concurență al acestor vectori se consideră ca potențialul de origine al sistemului — potențialul de referință. El este luat în general egal cu zero. Reprezentarea de mai sus se numește *reprezentarea topografică a tensiunilor*. Tot pe această diagramă se pot reprezenta curenții și, în raport cu aceștia, căderile de tensiune în alternator și deci tensiunea pe fază și între faze.

În același mod, se pot construi, pe aceeași diagramă, sau pe o diagramă diferită, tensiunile pe fază și la borne la sarcină. Punctul de concurență al acestor vectori se numește *punctul neutru al sarcinii*. Diferența de potențial dintre acest punct neutru și punctul neutru al alternatorului se numește *deplasarea punctului neutru al sarcinii*.

9.2. Problema generală a sistemelor desechilibrate. Fiind date forțele electromotoare induse în fazele alternatorului (presupuse legate în stea), rezistențele și admitanțele pe fază ale generatorului, liniei și sarcinii (aceasta deasemenea presupusă legată în stea), se cere să se calculeze curenții pe fază. Presupunându-se potențialul punctului neutru al alternatorului egal cu zero, problema constă în găsirea potențialului punctului neutru al sarcinii — deplasarea punctului neutru — cu ajutorul căruia se pot găsi tensiunile pe fază la sarcină și deci curenții căutați.

9.3. Metode pentru calcularea potențialului punctului neutru al sarcinii și curenții pe fază.

α) *Metoda analitică.* Fie $\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3, \bar{E}_0$ forțele electromotoare ale alternatorului și potențialul punctului neutru al sarcinii și $\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \bar{Y}_3, \bar{Y}_0$ admitanțele totale ale celor trei faze și a firului neutru. Potențialul punctului neutru al sarcinii este dat de relația

$$\bar{E}_0 = \frac{\bar{E}_1 \bar{Y}_1 + \bar{E}_2 \bar{Y}_2 + \bar{E}_3 \bar{Y}_3}{\bar{Y}_0 + \bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + \bar{Y}_3} \quad (62)$$

Curentul pe fiecare fază este dat de relația

$$\bar{I}_1 = (\bar{E}_1 - \bar{E}_0) \bar{Y}_1 \quad (63)$$

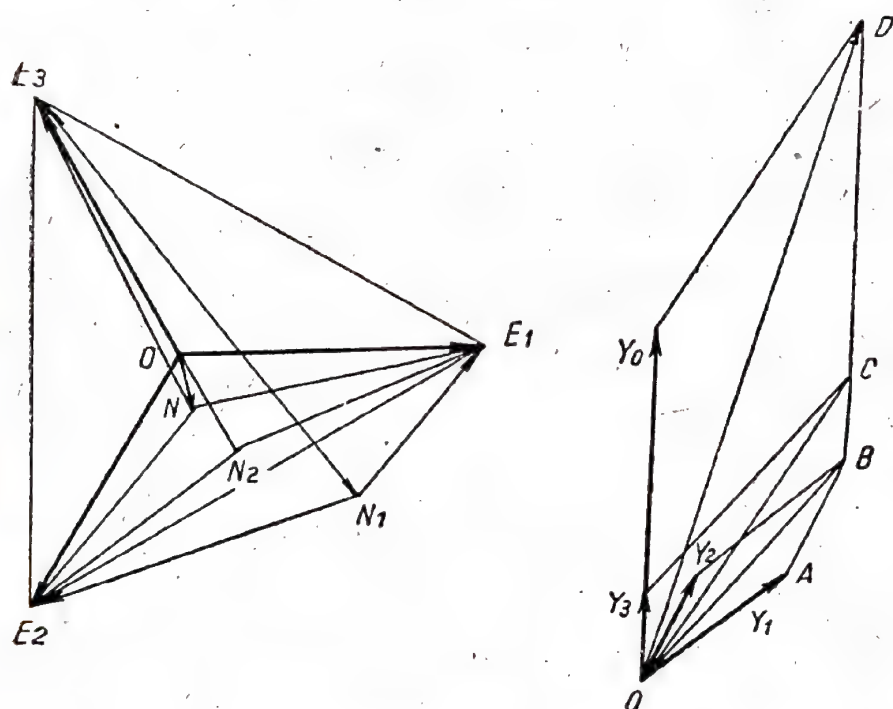


Fig. 17. Construcția grafică a punctului neutru.

și alte două relații analoage. Curentul în firul neutru este dat de relația

$$\bar{I}_0 = -\bar{E}_0 \bar{Y}_0 \quad (64)$$

β) *Metoda grafică.* Se construiește topograma tensiunilor și se reprezintă pe o diagramă admitanțele sistemului (fig. 17). Găsirea punctului neutru se face în trei etape:

1) se presupune la început că sistemul nu are fir neutru, și că una din faze (ex. faza 3) este întreruptă. În acest caz

$$\frac{\bar{E}_2 \bar{N}_1}{\bar{N}_1 \bar{E}_1} = \frac{\bar{Y}_1}{\bar{Y}_2} = \frac{\overline{OA}}{\overline{AB}};$$

Construind această relație în topograma tensiunilor se găsește punctul neutru N_1 . Se presupune apoi că faza 3 nu este întreruptă. În acest caz se poate scrie relația

$$\frac{\bar{E}_3 - \bar{E}_N}{\bar{E}_3 - \bar{E}_{N_1}} = \frac{\bar{E}_3 N}{\bar{E}_3 N_1} = \frac{\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2}{\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + \bar{Y}_3} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OC}},$$

care construită dă punctul neutru N al sistemului fără fir neutru. Dacă sistemul are fir neutru, atunci se poate scrie relația, N_0 fiind punctul neutru al sistemului,

$$\frac{\bar{E}_{N_0}}{\bar{E}_N} = \frac{\overline{ON_0}}{\overline{ON}} = \frac{\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + \bar{Y}_3}{\bar{Y}_0 + \bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + \bar{Y}_3} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OD}}$$

care construită determină punctul neutru al sistemului cu fir neutru.

Cunoscându-se punctul neutru, se determină pe topogramă cele trei tensiuni pe fază și se pot calcula grafic curenții căutați.

9.4. Calculul curenților când se cunosc tensiunile între faze la utilizare. Tensiunile între faze formând întotdeauna un triunghi, suma lor este nulă. Se presupune mai întâi că cele trei sarcini sunt identice. Dacă $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \bar{V}_3$ sunt tensiunile pe fază la utilizare, suma curenților în punctul neutru al sarcinii fiind nulă, rezultă

$$\bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \bar{V}_3 = 0, \quad (65)$$

ceea ce înseamnă că punctul neutru al sarcinii se găsește în centrul de greutate al triunghiului tensiunilor între faze. $\bar{U}_{12}, \bar{U}_{23}, \bar{U}_{31}$ fiind tensiunile între faze, tensiunile pe fază sunt date de relațiile

$$\left. \begin{aligned} \bar{V}_1 &= \frac{1}{3} (\bar{U}_{12} - \bar{U}_{31}) \\ \bar{V}_2 &= \frac{1}{3} (\bar{U}_{23} - \bar{U}_{12}) \\ \bar{V}_3 &= \frac{1}{3} (\bar{U}_{31} - \bar{U}_{23}) \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

Dacă cele trei sarcini nu sunt egale și simetrice, se calculează deplasarea punctului neutru al acestor sarcini față de

centrul de greutate al triunghiului tensiunilor între faze cu relația

$$\bar{V}_0 = \frac{\bar{V}_1 \bar{Y}_1 + \bar{V}_2 \bar{Y}_2 + \bar{V}_3 \bar{Y}_3}{\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + \bar{Y}_3} \quad (67)$$

și tensiunile pe fază cu relațiile

$$\bar{V}'_1 = \bar{V}_1 - \bar{V}_0$$

și alte două relații analoage.

10. TEORIA COORDONATELOR SIMETRICE

(Problemele 10.1—10.30)

10.1. Reprezentarea analitică a unui sistem trifazat. Un sistem trifazat, simetric și echilibrat se reprezintă prin trei vectori egali decalati unul de altul cu 120° .

S'a convenit a se defini sensul pozitiv de succesiune al fazelor, sensul mișcării acelor unui ceasornic, sensul mișcării vectorilor rămânând același, adică unghiurile cresc cu timpul în sensul trigonometric.

Luând ca origine de fază vectorul \bar{V}_1 de pe faza 1 (numit vector principal al sistemului) și notând

$$a = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} = \epsilon^{j120^\circ} = 1 \angle 120^\circ$$

sistemul trifazat simetric de mai sus se reprezintă analitic prin

$$\left. \begin{aligned} \bar{V}_1 &= \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 &= a^2 \bar{V}_1 \\ \bar{V}_3 &= a \bar{V}_1 \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

Acest sistem se numește un sistem *direct* sau de succesiune 1.

Un sistem având succesiunea fazelor inversă precedentului, se numește un sistem *invers* sau de succesiune 2. Acest sistem se reprezintă analitic prin

$$\left. \begin{aligned} \bar{V}_1 &= \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 &= a \bar{V}_1 \\ \bar{V}_3 &= a^2 \bar{V}_1 \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

Un sistem trifazat format din trei vectori egali și în fază se numește sistem *homopolar* sau de succesiune 0.

Acest sistem se exprimă analitic prin

$$\left. \begin{aligned} \bar{V}_1 &= \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 &= \bar{V}_1 \\ \bar{V}_3 &= \bar{V}_1 \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

10.2. Proprietățile operatorului a . Prin definiție

$$a = 1 \angle 120^\circ = \varepsilon^{j120^\circ} = \cos 120^\circ + j \sin 120^\circ = -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

rezultă

$$a^2 = 1 \angle -120^\circ, \quad a^3 = 1; \quad a^4 = a; \quad a^5 = a^2; \quad a^6 = 1; \quad a^{-1} = a^2$$

și

$$1 + a + a^2 = 0$$

10.3. Teorema lui Stokvis — Fortescue. Un sistem de vectori trifazat oarecare poate fi descompus în două sisteme de vectori trifazate simetrice de succesiune diferită, unui direct și altul invers, și într'un sistem homopolar.

Analitic aceasta se exprimă prin ecuațiile

$$\left. \begin{aligned} \bar{V}_1 &= \bar{V}_h + \bar{V}_d + \bar{V}_i \\ \bar{V}_2 &= \bar{V}_h + a^2 \bar{V}_d + a \bar{V}_i \\ \bar{V}_3 &= \bar{V}_h + a \bar{V}_d + a^2 \bar{V}_i \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

în care V_h este componenta homopolară, \bar{V}_d este componenta directă și \bar{V}_i componenta inversă.

10.4. Determinarea componentelor simetrice ale unui sistem trifazat dat. $\alpha)$ *Metoda analitică.* Rezolvând sistemul (71) se găsește

$$\left. \begin{aligned} \bar{V}_h &= \frac{1}{3} (\bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \bar{V}_3) \\ \bar{V}_d &= \frac{1}{3} (\bar{V}_1 + a \bar{V}_2 + a^2 \bar{V}_3) \\ \bar{V}_i &= \frac{1}{3} (\bar{V}_1 + a^2 \bar{V}_2 + a \bar{V}_3) \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

β) *Metode grafice.* Se bazează pe construcția relațiilor (72). Pentru sistemul în stea construcția este dată în fig. 18.

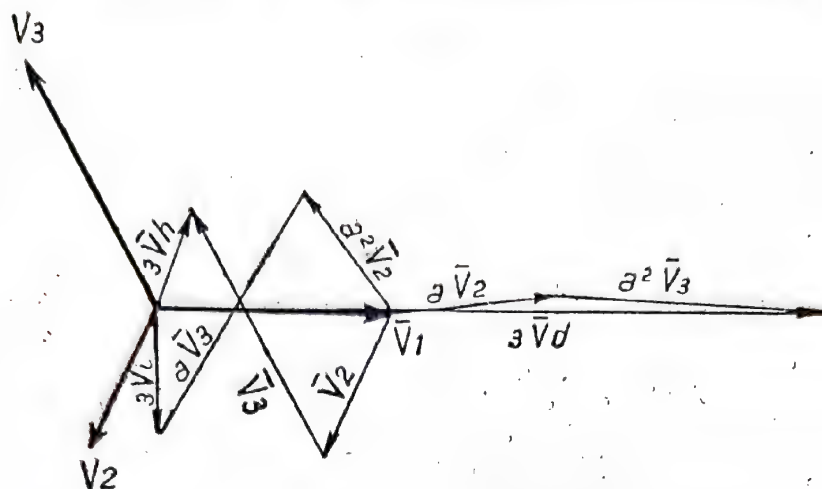


Fig. 18. Construcția grafică a componentelor simetrice.

Pentru sistemul între faze (sistem în triunghi), construcția este arătată în fig. 19.

10.5. Proprietăți ale componentelor simetrice. Două sisteme de vectori trifazați care au aceleași vârfuri dar origini diferite, au aceleași componente simetrice directe și inverse, iar componenta homopolară este dată în mărime și direcție de vectorul care unește cele două origini.

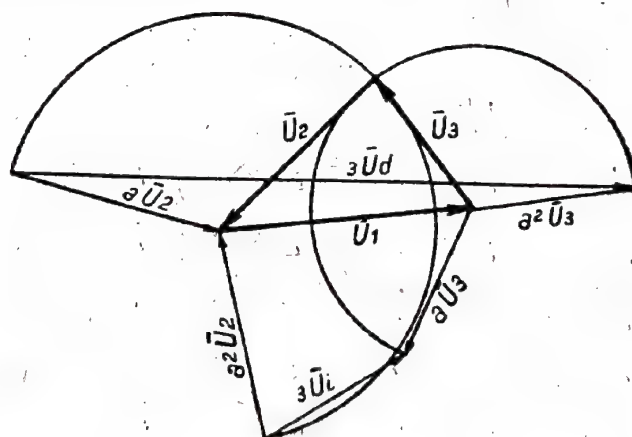


Fig. 19. Construcția grafică a componentelor simetrice ale unui sistem în triunghi.

10.6. Gradul de dezechilibrare a unui sistem de vectori trifazat. α) Raportul

$$\epsilon_i = \frac{|\bar{V}_i|}{|\bar{V}_d|}$$

se numește *gradul de disimetrie*.

β) Raportul

$$\varepsilon_h = \frac{|\bar{V}_h|}{|\bar{V}_d|}$$

se numește *gradul de asimetrie*.

În practică un sistem de vectori se poate socoti simetric dacă

$$\varepsilon_i \leq 5\% \quad \text{și} \quad \varepsilon_h \leq 5\%.$$

10.7. Operații cu sisteme trifazate. α) *Sistemul sumă*.

Fiind date sistemele $S_1(\bar{V}) = (\bar{V}'_1, \bar{V}'_2, \bar{V}'_3)$ și $S_2(\bar{V}'') = (\bar{V}''_1, \bar{V}''_2, \bar{V}''_3)$ sistemul sumă este sistemul al cărui vectori sunt suma geometrică a vectorilor de același indice în sistemele date:

$$S(\bar{V}) = S_1(\bar{V}') \pm S_2(\bar{V}'') = S(\bar{V}' \pm \bar{V}'') =$$

$$= [(\bar{V}'_1 \pm \bar{V}''_1), (\bar{V}'_2 \pm \bar{V}''_2), (\bar{V}'_3 \pm \bar{V}''_3)].$$

Definiția de mai sus poate fi extinsă la oricâte sisteme.

β) *Sistemul produs*. Sistemul produs simbolic este sistemul al cărui vectori sunt produsul celor doi vectori de același indice al sistemelor de vectori date:

$$S(\bar{V}) = S_1(\bar{V}') \cdot S_2(\bar{V}'') = S(\bar{V}' \cdot \bar{V}'') =$$

$$= [(\bar{V}'_1 \cdot \bar{V}''_1), (\bar{V}'_2 \cdot \bar{V}''_2), (\bar{V}'_3 \cdot \bar{V}''_3)].$$

Produsul a două sisteme simetrice este un sistem simetric al cărui ordin este egal cu suma algebrică a ordinelor celor două sisteme simetrice. Astfel

$$S_d(\bar{V}') \cdot S_d(\bar{V}'') = S_i(\bar{V}' \cdot \bar{V}'')$$

$$S_i(\bar{V}') \cdot S_i(\bar{V}'') = S_d(\bar{V}' \cdot \bar{V}'')$$

$$S_h(\bar{V}') \cdot S_h(\bar{V}'') = S_h(\bar{V}' \cdot \bar{V}'')$$

$$S_d(\bar{V}') \cdot S_i(\bar{V}'') = S_h(\bar{V}' \cdot \bar{V}'')$$

$$S_i(\bar{V}') \cdot S_d(\bar{V}'') = S_h(\bar{V}' \cdot \bar{V}'')$$

$$S_d(\bar{V}') \cdot S_h(\bar{V}'') = S_d(\bar{V}' \cdot \bar{V}'')$$

$$S_h(\bar{V}') \cdot S_d(\bar{V}'') = S_d(\bar{V}' \cdot \bar{V}'')$$

$$S_i(\bar{V}') \cdot S_h(\bar{V}'') = S_i(\bar{V}' \cdot \bar{V}'')$$

$$S_h(\bar{V}') \cdot S_i(\bar{V}'') = S_i(\bar{V}' \cdot \bar{V}'').$$

În cazul când cele două sisteme $S(\bar{V}')$ și $S(\bar{V}'')$ nu sunt simetrice, dacă $S_h(\bar{V}'), S_h(\bar{V}''), \dots$ sunt componentele sime-

trice ale celor două sisteme, atunci componentele simetrice ale sistemului produs sunt

$$\left. \begin{aligned} S_d(\bar{V}' \cdot \bar{V}'') &= S_d(\bar{V}') \cdot S_h(\bar{V}'') + S_i(\bar{V}') \cdot S_i(\bar{V}'') + \\ &\quad + S_h(\bar{V}') \cdot S_d(\bar{V}'') \\ S_i(\bar{V}' \cdot \bar{V}'') &= S_d(\bar{V}') \cdot S_d(\bar{V}'') + S_i(\bar{V}') \cdot S_h(\bar{V}'') + \\ &\quad + S_h(\bar{V}') \cdot S_i(\bar{V}'') \\ S_h(\bar{V}' \cdot \bar{V}'') &= S_d(\bar{V}') \cdot S_i(\bar{V}'') + S_i(\bar{V}') \cdot S_d(\bar{V}'') + \\ &\quad + S_h(\bar{V}') \cdot S_h(\bar{V}'') \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

10.8. Puterea în regimul desechilibrat.

Puterea în regimul desechilibrat este dată de relația

$$\bar{S} = 3 \bar{V}_h \cdot \bar{I}_h^* + 3 \bar{V}_d \cdot \bar{I}_d^* + 3 \bar{V}_i \cdot \bar{I}_i^*$$

Cum $\bar{S} = P + jQ$, rezultă

$$\left. \begin{aligned} P &= 3 V_h I_h \cos \varphi_h + 3 V_d I_d \cos \varphi_d + 3 V_i I_i \cos \varphi_i \\ Q &= 3 V_h I_h \sin \varphi_h + 3 V_d I_d \sin \varphi_d + 3 V_i I_i \sin \varphi_i \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

11. MĂSURAREA COMPONENTELOR SIMETRICE

(Problemele 11.1—11.12)

11.1. Măsurarea componentelor simetrice de curent și de tensiune. Pentru măsurarea acestor componente se efectuează diverse montaje cu ajutorul impedanțelor care se dimensionează astfel încât aparatul să indice componenta căutată. Dimensionarea aceasta se face aplicând legile lui Kirchhoff, calculând curentul ce trece prin aparatul de măsură și punând condiția ca acest curent să reprezinte componenta căutată.

11.2. Măsurarea reactanțelor simetrice ale mașinilor sincronice. Dintr'o probă de mers în gol și trei probe în scurtcircuit (trifazat, bifazat și monofazat) se obține

$$\begin{aligned} X_s &= \frac{E}{I_{(3)}} \\ X_a &= E \left(\frac{\sqrt{3}}{I_{(2)}} - \frac{1}{I_{(3)}} \right) \\ X_o &= E \left(\frac{3}{I_{(1)}} - \frac{\sqrt{3}}{I_{(2)}} \right) \end{aligned}$$

în care X_s , X_a , X_o sunt reactanțele: sincronă (sau directă), asincronă (sau inversă) și homopolară (sau de nul); $I_{(3)}$, $I_{(2)}$, $I_{(1)}$, sunt respectiv curenții pe fază în probele de scurtcircuit trifazat, bifazat și monofazat; E este forța electromotoare indusă, pe fază.

Reactanțele unei mașini sincrone se dau de obicei în procente, reprezentând raportul tensiunii de scurtcircuit corespunzătoare tensiunii nominale. Cunoscând acest raport, reactanța respectivă se deduce din relația

$$X = \frac{\varepsilon}{100} \frac{U^2}{S} \Omega$$

în care ε este tensiunea de scurtcircuit, în procente; U tensiunea mașinii în kV și S puterea aparentă a acesteia în MVA.

12. CALCULUL CIRCUITELOR TRIFAZATE DESCHILIBRATE. CALCULE DE SCURT-CIRCUIT

(Problemele 12.1—12.34)

12.1. Legile lui Kirchhoff în sistemul desechilibrat. Se numește *impedanța directă* a rețelei, impedanța efectivă pe fază opusă trecerii curenților *sistemului direct*. (Pentru mașinile sincrone această impedanță se numește *impedanța sincronă*). *Impedanța inversă* (impedanța *asincronă*) și *impedanța homopolară* (impedanța *de nul*), se definesc în același mod.

Legile lui Kirchhoff se scriu

$$\left. \begin{aligned} \bar{E}_d &= \bar{U}_d + \bar{Z}_d \bar{I}_d \\ \bar{E}_i &= \bar{U}_i + \bar{Z}_i \bar{I}_i \\ \bar{E}_h &= \bar{U}_h + \bar{Z}_h \bar{I}_h \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

În cazul liniilor și transformatorilor $\bar{Z}_d = \bar{Z}_i$. Pentru mașinile rotative în general $\bar{Z}_d \neq \bar{Z}_i$.

Impedanța homopolară \bar{Z}_h nu are o valoare finită decât dacă există un conducător neutru; în caz contrariu $\bar{Z}_h = \infty$.

Dacă $\bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \bar{Z}_3$ sunt impedanțele celor trei faze ale sistemului, se definesc *impedanțele de calcul*

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathcal{Z}}_h &= \frac{1}{3} (\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3) \\ \bar{\mathcal{Z}}_d &= \frac{1}{3} (\bar{Z}_1 + a\bar{Z}_2 + a^2\bar{Z}_3) \\ \bar{\mathcal{Z}}_i &= \frac{1}{3} (\bar{Z}_1 + a^2\bar{Z}_2 + a\bar{Z}_3) \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

Cu aceste elemente, se poate aplica a doua lege a lui Kirchhoff scrisă sub forma

$$S(\bar{V}) = S(\bar{\mathcal{Z}} \cdot \bar{I}) = S(\bar{\mathcal{Z}}) \cdot S(\bar{I}) \quad (77)$$

și ținându-se seama de relațiile (73).

12.2. Relația între coordonatele simetrice ale unui sistem de trei vectori concurenți și acelea ale sistemului de vectori care leagă vârfurile primului sistem. Fiind dat sistemul de vectori concurenți $S_1(\bar{V}) = (\bar{V}_1, \bar{V}_2, \bar{V}_3)$ și sistemul de vectori $S_2(\bar{U}) = (\bar{U}_1, \bar{U}_2, \bar{U}_3)$ obținut prin legarea vârfurilor primului sistem (fig. 20), între componentele simetrice ale acestor sisteme există relațiile:

α) Dacă se ia ca vectori principali vectorii \bar{V}_1 și \bar{U}_1 ,

$$\left. \begin{aligned} \bar{U}_h &= 0 \\ \bar{U}_d &= \sqrt{3} \bar{V}_d \angle -90^\circ \\ \bar{U}_i &= \sqrt{3} \bar{V}_i \angle 90^\circ \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

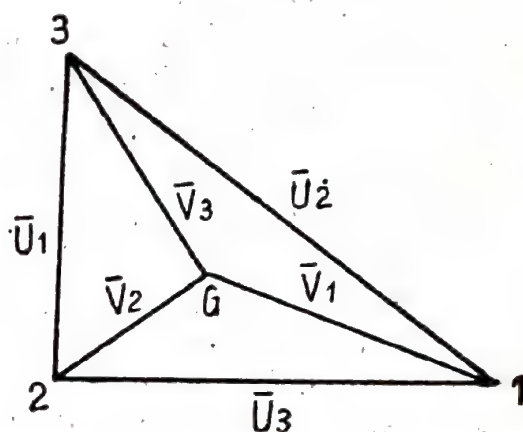


Fig. 20. Sistemele stea și triunghi corespunzătoare.

β) Dacă se ia ca vectori principali vectorii \bar{V}_1 și $\bar{U}_{12} = \bar{U}_3$,

$$\left. \begin{aligned} \bar{U}_h &= 0 \\ \bar{U}_d &= \sqrt{3} \bar{V}_d \angle 30^\circ \\ \bar{U}_i &= \sqrt{3} \bar{V}_i \angle -30^\circ \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

În aceste expresii, $\bar{V}_d, \bar{V}_i, \bar{U}_d, \bar{U}_i$ reprezintă vectorii principali ai sistemelor stea și triunghi corespunzătoare.

12.3. Calculul cirenitelor trifazate desechilibrate cu ajutorul componentelor simetrice. Problema generală se enunță:

fiind dată o rețea trifazată la care se cunosc impedanțele și tensiunile la borne se cere distribuția curenților și tensiunile pe fază.

$\alpha)$ *Rețeaua nu are fir neutru.* În acest caz

$$\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0 \text{ deci } \bar{I}_h = 0$$

Relațiile (77) dau

$$\left. \begin{aligned} \bar{V}_h &= \bar{z}_t \bar{I}_d + \bar{z}_d \bar{I}_t \\ \bar{V}_d &= \bar{z}_h \bar{I}_d + \bar{z}_t \bar{I}_t \\ \bar{V}_t &= \bar{z}_d \bar{I}_d + \bar{z}_h \bar{I}_t \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

Ultimele două ecuații, ținând seama și de relațiile (78) dau componentele simetrice ale curenților

$$\left. \begin{aligned} \bar{I}_d &= \frac{j}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\bar{U}_d \bar{z}_h + \bar{U}_t \bar{z}_t}{\bar{z}_h^2 - \bar{z}_d \bar{z}_t} \\ \bar{I}_t &= -\frac{j}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\bar{U}_t \bar{z}_h + \bar{U}_d \bar{z}_d}{\bar{z}_h^2 - \bar{z}_d \bar{z}_t} \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

Curenții pe faze $\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_3$ se deduc din relațiile :

$$\left. \begin{aligned} \bar{I}_1 &= \bar{I}_h + \bar{I}_d + \bar{I}_t \\ \bar{I}_2 &= \bar{I}_h + a^2 \bar{I}_d + a \bar{I}_t \\ \bar{I}_3 &= \bar{I}_h + a \bar{I}_d + a^2 \bar{I}_t \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

similare cu relațiile (71) pentru tensiuni. Introducând valorile componentelor simetrice \bar{I}_d și \bar{I}_t din relațiile (81) în relațiile (80) aflăm componentele simetrice ale tensiunilor $\bar{V}_h, \bar{V}_d, \bar{V}_t$. Înlocuind apoi aceste valori în relațiile (71) se găsesc tensiunile pe fază.

$\beta)$ *Rețeaua are fir neutru.* Fie $\bar{E}_h, \bar{E}_d, \bar{E}_t$ componentele simetrice ale forțelor electromotoare induse în fazele alterna-

torului presupus disimetric, \bar{Z}_o , \bar{Z}_s , \bar{Z}_a impedanțele alternatorului, \bar{Z}_h , \bar{Z}_d , \bar{Z}_i impedanțele de calcul ale liniei și sarcinii, \bar{Z}_N impedanța firului neutru, \bar{I}_h , \bar{I}_d , \bar{I}_i componentele simetrice ale curenților pe faze, ecuațiile generale ale sistemului sunt

$$\left. \begin{aligned} E_h &= (\bar{Z}_h + \bar{Z}_o + 3\bar{Z}_N) \bar{I}_h + \bar{Z}_i \bar{I}_d + \bar{Z}_d \bar{I}_i \\ \bar{E}_d &= \bar{Z}_d \bar{I}_h + (\bar{Z}_h + \bar{Z}_s) \bar{I}_d + \bar{Z}_i \bar{I}_i \\ \bar{E}_i &= \bar{Z}_i \bar{I}_h + \bar{Z}_d \bar{I}_d + (\bar{Z}_h + \bar{Z}_a) \bar{I}_i \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

Când alternatorul este simetric, $\bar{E}_h = \bar{E}_i = 0$.

Când alternatorul este de putere infinită, $\bar{Z}_o = \bar{Z}_s = \bar{Z}_a = 0$.

12.4. Calculul curenților de scurtcircuit. Determinarea componentelor simetrice ale curenților de scurtcircuit se face cu ajutorul schemei echivalente, corespunzătoare fiecărui tip de defect în parte. Pentru construirea schemei echivalente este necesară determinarea impedanțelor directă, inversă și homopolară a circuitului dat, redus la punctul defectului.

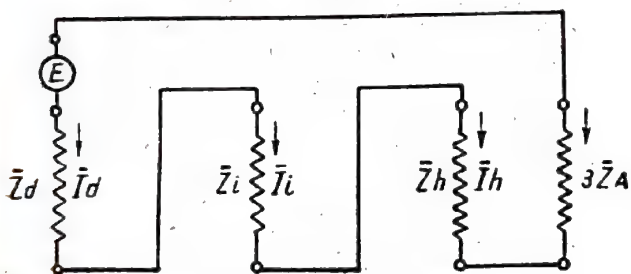


Fig. 21. Schema echivalentă a unui scurtcircuit al unei faze la pământ cu arc.

Calculul componentelor simetrice ale curenților se face aplicând legile lui Kirchhoff circuitului echivalent, forța electromotoare de referință fiind

introdusă în circuitul impedanței directe.

Când defectul se produce printr'un arc electric se mai adaugă în circuit și impedanța acestuia.

Schemele echivalente ale celor patru tipuri de defecte, la care se pot reduce toate celelalte, sunt :

α) Scurtcircuit al unei faze la pământ (fig. 21). In acest caz

$$\bar{I}_h = \bar{I}_d = \bar{I}_i$$

și

$$\bar{E}_d = \bar{E} - \bar{Z}_d \bar{I}_d$$

$$\bar{E}_i = -\bar{Z}_i \bar{I}_i$$

$$\bar{E}_h = -\bar{Z}_h \bar{I}_h$$

Dacă nu există arc, $\bar{Z}_A = 0$.

β) Scurtcircuit între două faze și la pământ (fig. 22). În acest caz

$$\bar{E}_d = \bar{E}_i$$

$$\bar{E}_h - \bar{E}_d = 3\bar{Z}_A \bar{I}_h$$

și

$$\bar{I}_h + \bar{I}_d + \bar{I}_i = 0$$

Când nu există arc, $Z_A = 0$.

γ) Scurtcircuit între două faze, izolat de pământ (fig. 23). În acest caz

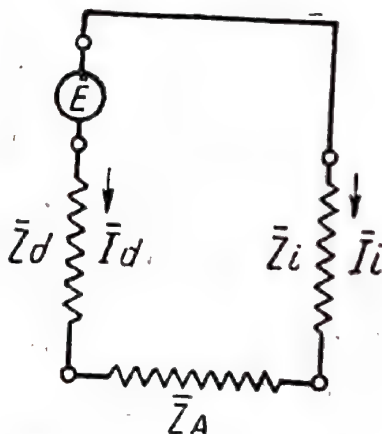


Fig. 23. Schema echivalentă a unui scurtcircuit între două faze, izolat de pământ, cu arc.

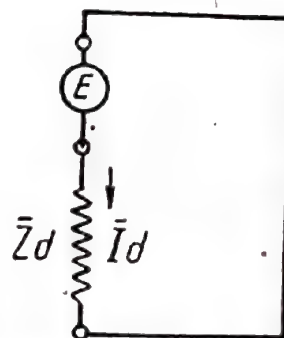


Fig. 24. Schema echivalentă a unui scurtcircuit trifazat.

$$\bar{I}_h = 0 \quad \bar{I}_d = -\bar{I}_i$$

$$\bar{E}_h = 0 \quad \bar{E}_d - \bar{E}_i = \bar{Z}_A \bar{I}_d$$

Când nu există arc, $Z_A = 0$.

δ) Scurtcircuit între toate trei fazele (fig. 24). În acest caz circuitul este simetric și

$$\bar{I}_h = \bar{I}_i = 0.$$



După determinarea componentelor simetrice ale curenților se calculează curenții pe faze.

În rețelele cu mai multe trepte de tensiune, calculul curenților de scurtcircuit se face reducând, inițial, toate elementele rețelei la o tensiune de referință, iar apoi, după determinarea curenților reduși la această tensiune, ei se recalculează în raport cu tensiunile reale din rețea.

Observație. Valorile mărimilor de scurt circuit determinate corespund momentului pentru care au fost determinate reactanțele.

PARTEA IV

REGIMUL TRANZITORIU

13. STUDIUL DIRECT AL REGIMULUI TRANZITORIU

(Problemele 13.1–13.45)

13.1. Regimul tranzitoriu de funcționare al unui sistem electric se obține din suprapunerea peste regimul permanent de funcționare, a unui regim liber, neimpus de vreo forță electromotoare oarecare. Matematic, expresia regimului tranzitoriu se obține adăugând soluției generale a ecuației diferențiale (fără membrul al doilea), de funcționare a sistemului, o soluție particulară corespunzând expresiei tensiunii din membrul al doilea.

Ecuatia de funcționare a unui circuit electric este de forma

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i dt = E(t). \quad (84)$$

Soluția acestei ecuații se obține ușor dacă coeficienții R , L și C sunt cantități constante. În caz contrar problema este mai dificilă și nu se mai poate rezolva prin metode elementare.

13.2. Circuit serie format dintr'o rezistență și o inducțanță. Ecuatia diferențială de funcționare a acestui circuit este

$$Ri + L \frac{di}{dt} = E(t)$$

a cărui soluție este (regimul tranzitoriu)

$$i = i_p + (i_0 - i_{p0}) e^{-\frac{R}{L}t} \quad (85)$$

în care i_p este curentul permanent, i_{p0} valoarea acestui curent la timpul $t = 0$, i_0 valoarea curentului total la timpul $t = 0$ și e baza logaritmilor neperieni.

Soluțiile diverselor probleme se obțin determinându-se valorile acestor trei mărimi.

Raportul (L/R) se numește *constanta de timp* (τ) a circuitului. Inversul său se numește *constanta de atenuare* (δ).

13.3. Circuit serie format dintr'o rezistență și o capacitate. Ecuația diferențială este

$$Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i \, dt = E(t)$$

sau

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E(t)$$

în care q este cantitatea de electricitate înmagazinată de capacitate.

Regimul tranzitoriu corespunzător este

$$q = q_p + (q_0 - q_{p0}) e^{-\frac{t}{CR}}, \quad (86)$$

q_p , q_{p0} și q_0 având semnificații analoage cu acelea din § 13.2. RC este constanta de timp a circuitului.

Curentul de încărcare (sau descărcare) al condensatorului este dat de relația

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (87)$$

iar tensiunea la bornele condensatorului de relația

$$u = \frac{1}{C} q. \quad (88)$$

13.4. Circuit serie format dintr'o rezistență, o inductanță și o capacitate. Funcționarea acestui circuit este dată de ecuația (84) care se mai poate scrie ținând seama de relațiile (87) și (83):

$$CL \frac{d^2 u}{dt^2} + CR \frac{du}{dt} + u = CE(t) \quad (89)$$

Regimul tranzitoriu este dat de relațiile:

$$\left. \begin{aligned} i &= i_p - \frac{e^{-\delta t}}{\Omega' L} \left[(i_0 - i_{p0}) \sqrt{\frac{L}{C}} \operatorname{sh}(\Omega' t - \alpha') + (u_0 - u_{p0}) \operatorname{sh} \Omega' t \right] \\ u &= u_p + \frac{e^{-\delta t}}{\Omega' \sqrt{CL}} \left[(u_0 - u_{p0}) \operatorname{sh}(\Omega' t + \alpha') + (i_0 - i_{p0}) \sqrt{\frac{L}{C}} \operatorname{sh} \Omega' t \right] \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

în care $i_p, i_{p0}, i_o, u_p, u_{p0}, u_o$ au semnificațiile date mai sus,

$$\delta = \frac{R}{2L}$$

$$\Omega' = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{CL}}$$

$$\operatorname{tgh} \alpha' = \frac{\Omega'}{\delta}.$$

Se pot prezenta trei cazuri:

$\alpha) \Omega'^2 > 0$. Circuitul este *aperiodic* și regimul tranzitoriu este dat de relațiile (90).

$\beta) \Omega'^2 < 0$. Circuitul este *oscilant* și regimul tranzitoriu este dat de relațiile

$$\left. \begin{aligned} i &= i_p - \frac{\varepsilon^{-\delta t}}{\Omega L} \left[(i_o - i_{p0}) \sqrt{\frac{L}{C}} \sin(\Omega t - \alpha) + (u_o - u_{p0}) \sin \Omega t \right] \\ u &= u_p + \frac{\varepsilon^{-t}}{\Omega \sqrt{CL}} \left[(u_o - u_{p0}) \sin(\Omega t + \alpha) + (i_o - i_{p0}) \sqrt{\frac{L}{C}} \sin \Omega t \right] \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

în care

$$\Omega = \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Omega}{\delta},$$

Ω fiind *pseudopulsatia* și $T = 2\pi/\Omega$, *pseudoperioada* sau *perioada proprie* a circuitului.

Expresia

$$\gamma = \ln \frac{Y_{11}}{Y_{12}} = \delta T$$

în care Y_{11} și Y_{12} sunt două amplitudini de același sens diferind printr-o pseudoperioadă, se numește *decrementul logaritm al oscilațiilor*.

$\gamma) \Omega'^2 = 0$. Circuitul este *aperiodic critic* și regimul tranzitoriu este dat de relațiile :

$$\left. \begin{aligned} i &= i_p - \epsilon^{-\delta t} \left[- (i_0 - i_{p0}) + \left(\frac{i_0 - i_{p0}}{\sqrt{CL}} + \frac{u_0 - u_{p0}}{L} \right) t \right] \\ u &= u_p + \epsilon^{-\delta t} \left[(u_0 - u_{p0}) + \left(\frac{u_0 - u_{p0}}{\sqrt{CL}} + \frac{i_0 - i_{p0}}{C} \right) t \right] \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

Pentru a găsi regimul tranzitoriu de încărcare al condensatorului, în oricare din cazurile de mai sus, se aplică relația (88).

14. STUDIUL REGIMULUI TRANZITORIU CU AJUTORUL CANTITĂȚILOR COMPLEXE ȘI AL CALCULULUI OPERAȚIONAL

(Problemele 14.1—14.42)

14.1. Studiul regimului tranzitoriu cu ajutorul cantităților complexe. Se aplică numai regimului liber, regimul permanent sau forțat calculându-se în mod obișnuit cu aceste mărimi. Regimul tranzitoriu se obține apoi suprapunându-se cele două regimuri și determinându-se constantele prin condiții de limită.

Curentul sau tensiunea regimului liber poate fi exprimat printr'o funcție, sau o sumă de funcții, de forma

$$i = I \epsilon^{-\delta t} \cos (\Omega t + \psi) \quad (93)$$

în care I și ψ sunt constante ce urmează a fi determinate din condițiile de funcționare ale circuitului, iar δ și Ω sunt mărimi reale.

Dacă $\delta = 0$ și $\Omega = 0$, expresia (93) reprezintă un curent continuu.

Dacă $\delta \neq 0$ și $\Omega = 0$, expresia (93) reprezintă un curent aperiodic.

Dacă $\delta = 0$ și $\Omega \neq 0$, expresia (93) reprezintă un curent alternativ sinusoidal.

Dacă $\delta \neq 0$ și $\Omega \neq 0$, expresia (93) reprezintă un curent alternativ sinusoidal amortizat.

Punând

$$\bar{p} = -\delta + j\Omega \quad (94)$$

expresia (93) poate fi scrisă

$$\bar{I} = I \epsilon^{\bar{p}t + j\psi} \quad (95)$$

Rezolvarea unui regim tranzitoriu (regimul liber) cu ajutorul cantităților complexe, se face înlocuind în ecuația (84) fără membru al doilea, simbolul $\frac{d}{dt}$ prin p , $\frac{d^2}{dt^2}$ prin \bar{p}^2 , $\int_0^t () dt$ prin $\frac{1}{\bar{p}}$, etc. și rezolvând ecuația algebrică în \bar{p} astfel obținută, fie direct, fie înlocuind pe \bar{p} cu expresia sa (94) și valorile instantanee, prin cantitățile complexe. Identificând părțile reale și cele imaginare, se obține un sistem de două ecuații care dau pe δ și pe Ω . Se alege numai soluția care dă valori reale pentru aceste mărimi. Introducând apoi aceste valori în (93) se găsește soluția căutată.

Dacă se cunoaște ecuația de funcționare a unui circuit în funcție de \bar{p} , se poate trece și invers, la ecuația diferențială corespunzătoare prin înlocuirea lui \bar{p} prin simbolurile de diferențiere sau integrare corespunzătoare.

Analog cu impedanța complexă din regimul permanent, se poate scrie impedanța complexă generalizată a circuitului sub forma:

$$\bar{Z} = R + \bar{p}L + \frac{1}{\bar{p}C} \quad (96)$$

În cazul unei inductanțe mutuale

$$X = \bar{p}M. \quad (97)$$

14.2. Studiul regimului tranzitoriu cu ajutorul calculului operațional (Transformarea lui Laplace). Transformarea lui Laplace este definită de integrala:

$$\varphi(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (98)$$

în care t este o variabilă reală, p este o variabilă complexă, iar e este baza logaritmilor neperieni.

Funcția $\varphi(p)$ se numește *imaginea* funcției $f(t)$, denumită *originalul* funcției $\varphi(p)$. Aceasta se exprimă simbolic prin relațiile:

$$\varphi(p) = \mathcal{L}f(t)$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \varphi(p).$$

Impedanța operațională este dată de relația :

$$Z(p) = R + pL + \frac{1}{pC} \quad (99)$$

analoagă cu relația (96). Deasemenea în cazul unei inductanțe mutuale

$$X(p) = pM.$$

Legea lui Ohm în calculul operațional este :

$$\mathcal{L}u = Z(p) \cdot \mathcal{L}i.$$

Rezolvarea unui regim tranzitoriu cu ajutorul calculului operațional se face după următoarele reguli :

α) Se scrie ecuația diferențială a circuitului, căruia i se aplică apoi transformata lui Laplace. Se obține astfel o ecuație algebrică în p , care se rezolvă în raport cu mărimea căutată (curentul sau tensiunea) găsindu-se astfel funcția imagine a mărimii căutate.

β) În cazul când este foarte greu sau imposibil a se scrie direct ecuația diferențială a circuitului, atunci se scrie relația între funcțiile imagine ale curentului și tensiunii și impedanța operațională. Ecuațiile obținute se rezolvă ca mai sus.

γ) După ce s'a determinat funcția imagine căutată, se determină funcția original a acesteia, fie direct, cu ajutorul regulilor calculului operațional, fie luând din tabele expresia acesteia.

Spre deosebire de metoda cantităților complexe, calculul operațional dă soluția completă a problemei de regim tranzitoriu.

Observație importantă. În multe lucrări din literatura de specialitate se utilizează calculul operațional bazat pe transformarea lui Carson, definită prin integrala :

$$\psi(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

Între funcția imagine a lui Carson și funcția imagine a lui Laplace există relația :

$$\psi(p) = p \varphi(p).$$

Este necesar a se ține seama de această relație în cazul utilizării tabelelor de transformare, dacă acestea sunt scrise într'un alt sistem decât acel folosit în calcul.

14.3. Studiul funcționării liniilor lungi cu ajutorul calculului operațional. Fie r , l , c și g constantele unei linii lungi

exprimate pe unitatea de lungime. Aplicând transformarea lui Laplace ecuațiilor unei linii lungi, acestea devin

$$-\frac{d \mathfrak{L} u}{d x} = (p l + r) \mathfrak{L} i \quad (100)$$

$$-\frac{d \mathfrak{L} i}{d x} = (p c + g) \mathfrak{L} u \quad (101)$$

trebuie observat că $\mathfrak{L} u$ este funcție de x și de p . Se obișnuiește a se considera p ca un parametru și pentru aceste motive s'a scris derivata totală în loc de cea parțială. Același lucru pentru $\mathfrak{L} i$.

Eliminând pe $\mathfrak{L} i$ între ecuațiile (100) și (101) se obține

$$\frac{d^2 \mathfrak{L} u}{d x^2} - \alpha^2 \mathfrak{L} u = 0 \quad (102)$$

în care :

$$\alpha^2 = (p l + r) (p c + g)$$

i a cărei integrală este de forma

$$\mathfrak{L} u = A \operatorname{ch} \alpha x + B \operatorname{sh} \alpha x, \quad (103)$$

A și B fiind constantele de integrare, care pot fi funcții de p și care se determină prin condiții de limită.

Rezultă apoi

$$\mathfrak{L} i = -\frac{1}{\beta} (A \operatorname{sh} \alpha x + B \operatorname{ch} \alpha x) \quad (104)$$

în care

$$\beta = \frac{p l + r}{\alpha} = \sqrt{\frac{p l + r}{p c + g}}.$$

Expresiile (103) și (104) constituie soluțiile operaționale ale sistemului (100), (101).

Pentru ca soluțiile sistemului să fie unice, este necesar ca α și β să nu aibe mai mult de o valoare; pentru aceasta se ia numai valoarea lui α pentru care

$$\Re(\alpha) \geq 0 \quad \text{și} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \arg \alpha \leq \frac{\pi}{2}.$$

În cazul unei linii fără pierderi, imaginile soluțiilor sunt date tot de relațiile (103) și (104) în care

$$\alpha = p \sqrt{l c} \quad \text{și} \quad \beta = \sqrt{\frac{l}{c}}.$$

Trecerea la originalele tensiunilor sau curenților se face prin metodele obișnuite de calcul operațional sau cu ajutorul tabelelor.

15. STUDIUL SISTEMELOR NELINEARE

(Problemele 15.1 — 15.24)

15.1. Definiții. Legea a doua a lui Kirchhoff poate fi scrisă, în cazul cel mai general sub forma

$$\sum e = \sum Ri + \sum \frac{d(Li)}{dt} + \sum \int \frac{i}{C} dt, \quad (105)$$

în suma $\sum \frac{d(Li)}{dt}$ fiind cuprinse atât forțele electromotoare de inducție proprie cât și acelea de inducție mutuală.

În raport cu parametrii R , L și C ai ecuației de funcționare (105), circuitele electrice pot fi împărțite în patru categorii

- a) Circuite a căror parametri sunt constanți;
- b) Circuite a căror parametri variază numai cu timpul;
- c) Circuite a căror parametri variază cu curentul sau cu tensiunea fiind independente de timp;
- d) Circuite a căror parametri variază atât cu curentul sau cu tensiunea cât și cu timpul.

Din categoria (a) fac parte circuitele din sistemele lineare și metodele de rezolvare sunt acelea clasice.

Caracteristicile de funcționare ale acestor parametri sunt linii drepte.

Din categoria (b) fac parte circuitele la care parametrii sunt funcții explicite de timp și independente de curent sau tensiune.

Ecuațiile de funcționare ale circuitelor electrice caracteristice corespunzătoare sunt

pentru circuitul rezistent $u_R = R_t i$

pentru circuitul inductiv $u_L = \frac{d(L_t i)}{dt} = L_t \frac{di}{dt} + i \frac{dL_t}{dt}$

pentru circuitul capacitiv $u_C = \int \frac{i}{C_t} dt$

respectiv $i = \frac{d(C_t u_C)}{dt} = C_t \frac{du_C}{dt} + u_C \frac{dC_t}{dt}$

Problemele de această natură se rezolvă direct, obținându-se soluția completă a problemei. Rezolvarea este ușoară dacă ecuația (105) are numai unul din parametri variabili. În caz contrariu, rezolvarea analitică este mai complicată și necesită rezolvarea unor ecuații integro-diferențiale ¹⁾.

La acest gen de probleme se poate aplica principiul suprapunerii efectelor.

Caracteristica de funcționare a acestor parametri este formată dintr-o familie de drepte având originea ca punct comun.

Din categoria (c) fac parte circuitele la care parametrii sunt funcții implicite de timp, prin intermediul curentului sau tensiunii (s. ex. bobinele cu miez de fier). Caracteristica de funcționare a acestor parametri se determină numai experimental. Acești parametri se numesc *parametri* sau *elemente nelineare*.

Caracteristica de funcționare a acestor parametri este o curbă care nu se poate deduce decât experimental.

Rezolvarea acestor probleme se face prin mijloace speciale sau cu ajutorul mașinilor de calcul speciale. La asemenea probleme nu se poate aplica principiul suprapunerii efectelor decât în cazuri cu totul particulare.

Din categoria (d) fac parte circuitele electrice numite cu *elemente* sau *parametri nelineari variabili în timp* (s. ex. tuburile electronice cu mai mulți electrozi). Caracteristica de funcționare a acestor parametri este formată dintr-o familie de curbe trecând prin origină.

Pentru circuitele conținând asemenea parametri, principiul suprapunerii efectelor nu se poate aplica. Soluția exactă a acestor probleme este în general imposibil de obținut; se obțin soluții aproximative prin reducerea circuitului la unul cu parametri variind în timp, sau prin metode grafice aproximative, ori cu ajutorul mașinilor de calcul speciale.

15.2. Metodele generale de calcul ale sistemelor nelineare. Rezolvarea sistemelor nelineare se face prin una din metodele următoare:

a) *Integrarea grafică*, care se efectuează aplicând regulile cunoscute de integrare grafică. În cazul unei ecuații de ordinul I, se procedează prin separarea variabilelor și cuadratură simplă (evaluarea ariei cuprinsă între curba reprezentativă a funcției de sub semnul integralei).

¹⁾ *Sergiu Vasilache*: O nouă metodă de calcul a rețelelor electrice cu parametri variabili (Analele Academiei R.P.R., Tomul III, Memoriile 13 și 22).

b) *Soluție semigrafică*, care constă în înscrierea unui contur poligonal în caracteristica nelineară a parametrului corespunzător și tratându-se fiecare element al conturului ca un sistem linear. Soluția generală a problemei se obține racordându-se diversele soluții parțiale obținute prin condiții comune la limită.

c) *Aproximarea printr'o coardă unică*. Se înlocuește caracteristica de funcționare a elementului nelinear printr'o coardă unică, transformându-l astfel într'un element linear. Aproximația obținută este mai puțin precisă.

O altă aproximație ce se poate face este de a se înlocui coarda printr'o secantă.

d) *Aproximarea printr'o curbă analitică*. Sunt multe cazuri când caracteristica de funcționare a elementului nelinear poate fi aproximată printr'o curbă analitică, de obicei printr'o parabolă de gradul n , sub forma

$$i = K u^n \quad (106)$$

în care K și n sunt constante, u fiind tensiunea la bornele elementului nelinear și i curentul ce-l străbate. Constantele K și n se determină construind ecuația (106) pe o hârtie dublu logaritmică; se obține dreapta

$$\log i = \log K + n \log u,$$

determinându-se astfel cele două constante. Cunosând funcția (106), calculul se poate face analitic.

15.3. Studiul stabilității funcționării circuitelor electrice.

Funcționarea unui circuit electric se consideră stabilă dacă fenomenul tranzitoriu se amortizează după un timp a cărui mărime depinde de parametrii circuitului (constanta de timp a circuitului). Pentru ca această condiție să fie satisfăcută, trebuie ca factorul de atenuare δ să fie pozitiv. În caz contrariu circuitul nu se amortizează și poate fi sediul unor oscilații autoîntreținute.

Pentru ca un sistem să fie stabil este necesar ca cel puțin una din rădăcinile ecuației caracteristice a ecuației diferențiale de funcționare a sistemului să aibe partea reală negativă, dacă rădăcina este complexă, sau să fie negativă, dacă rădăcina este reală.

Studiul stabilității se poate face rezolvînd ecuația caracteristică sau aplicând diversele criterii de stabilitate. Prima metodă, directă, poate fi uneori foarte dificilă, ecuațiile de grad mai mare ca doi rezolvîndu-se destul de dificil.

Dintre criteriile de stabilitate se indică următoarele două: a) *Criteriul lui Hurwitz*, pentru sistemele oscilante și b) *criteriul lui Meerov* pentru sistemele aperiodice.

a) *Criteriul lui Hurwitz*. Fiind dată ecuația algebrică

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0 \quad (107)$$

în care $a_0 > 0$, scriind determinantul

$$\Delta_H = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} \quad (108)$$

condiția necesară și suficientă pentru ca toate rădăcinile ecuației (107) să aibe partea reală negativă este ca cei n determinanți „minori principali” ai determinantului (108) să fie pozitivi. Determinanții „minori principali” ai determinantului Δ_H sunt acei încadrați cu linii punctate.

b) *Criteriul lui Meerov*. Considerând aceeași ecuație (107), condiția de stabilitate în cazul regimului aperiodic este satisfăcută dacă minorii principali ai determinantului

$$\Delta_M = \begin{vmatrix} na_0 & a_0 & 0 & \dots \\ (n-1)a_1 & a_1 & na_0 & \dots \\ (n-2)a_2 & a_2 & (n-1)a_1 & \dots \\ (n-3)a_3 & a_3 & (n-2)a_2 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots \end{vmatrix} \quad (109)$$

sunt mai mari decât zero.

15. 4. Regimul critic de funcționare al unui sistem electric

Acest regim constituie funcționarea limită între regimul de funcționare stabilă și regimul de funcționare instabilă. În acest caz sistemul nu are termen de amortizare și deci rădăcinile ecuației caracteristice (107) sunt pur imaginare. Condițiile pe care trebuie să le îndeplinească coeficienții ecuației

(107) pentru ca funcționarea sistemului să fie critică, se obțin substituind în ecuația caracteristică o rădăcină de forma $x = \pm j\Omega$ și separând părțile reale de cele imaginare; se găsesc două relații între care se elimină parametrul Ω obținându-se astfel condițiile căutate.

15.5. Condiția de funcționare a unui regim nestabil sau de producere a oscilațiilor autoîntreținute. Dacă cel puțin una din condițiile lui Hurwitz nu este satisfăcută, atunci sistemul nu este stabil.

Pentru a găsi condițiile pe care trebuie să le îndeplinească coeficienții ecuației caracteristice pentru ca regimul de funcționare reprezentat de ecuația diferențială corespunzătoare să fie instabil, se alege din inegalitățile lui Hurwitz pe acelea care dau condiția de funcționare în regim critic și se schimbă semnul acelor inegalități.

PARTEA V

UTILIZAREA CALCULULUI MATRICIAL IN ELECTROTEHNICĂ

16. NOȚIUNI DE ALGEBRĂ MATRICIALĂ

(Problemele 16.1—16.15)

16.1. Definiții și proprietăți. Calculul matricial este folosit ca un instrument de rezolvare pentru sistemele electrice având un mare număr de grade de libertate.

O matrice este un sistem de $m \times n$ cantități, reale sau complexe, așezate într'un tablou de m linii și n coloane și se notează ¹⁾:

a_{11}	a_{12}		a_{1k}		a_{1n}
a_{21}	a_{22}		a_{2k}		a_{2n}
a_{j1}	a_{j2}		a_{jk}		a_{jn}
a_{m1}	a_{m2}		a_{mk}		a_{mn}

$$\|A\| = \|a_{ik}\| =$$

¹⁾ Există diferite moduri de a nota o matrice. Astfel:

$$\left\| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{array} \right\|, \quad \left(\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{array} \right), \quad \left[\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{array} \right]$$

etc. In aplicațiile tehnice se preferă notația în căsuțe adoptată în text, deoarece astfel se evită cauzele erorilor ce ar putea apărea prin confundarea diverselor elemente.

Dacă $m \neq n$, matricea se numește *dreptunghiulară* sau *tensor*.

Dacă $m = n$, matricea se numește *pătratică*. Orice matrice dreptunghiulară poate fi făcută pătratică prin adăugirea de linii sau coloane nule.

Dacă $m = 1$ și n oarecare, sau invers, m oarecare și $n = 1$ matricea se numește *lineară*, sau *vector*.

Dacă $a_{jj} \neq 0$ și $a_{jk} = 0$, matricea se numește *diagonală*.

Dacă $a_{jj} = 1$ și $a_{jk} = 0$, matricea se numește *unitate*. Matricea unitate are toate proprietățile unității din algebră.

Dacă $a_{jj} = a_{jk} = 0$, matricea se numește *zero*. Ea are toate proprietățile acestei cifre din algebră.

Matricea pătratică la care $a_{jk} = a_{ki}$ se numește *simetrică*.

Matricea ce se obține dintr-o matrice dată schimbând liniile și coloanele între ele se numește matricea *transpusă*. Pentru matricea diagonală și pentru matricea simetrică $\|A_t\| = \|A\|$.

Două matrice sunt egale dacă au același număr de elemente și dacă elementele corespunzătoare sunt egale.

Dacă elementele unei matrice sunt mărimi complexe, matricea se numește *complexă*.

Matricea ale cărei elemente sunt formate din conjugatele elementelor unei matrice complexe se numește *matricea conjugată* a acesteia.

Matricea inversă a unei matrice date este matricea care înmulțită cu matricea dată, dă ca rezultat o matrice unitate.

Matricea inversă a unei matrice date $\|A\|$, se notează, cu simbolul $\|A\|^{-1}$ și se calculează astfel:

1° Se scrie matricea $\|A_t\|$, transpusa matricei $\|A\|$.

2° Se înlocuește fiecare element al matricei $\|A_t\|$ prin determinatul obținut ștergând linia și coloana elementului considerat.

3° Acestor determinanți li se dă semnul (+) sau (-) după cum suma indicilor elementului respectiv este pară sau impară.

4° Se împarte matricea astfel obținută prin Δ , determinantul matricei $\|A\|$.

Un element al matricei inverse va fi deci:

$$b_{jk} = (-1)^{j+k} \frac{\delta_{jk}}{\Delta}.$$

Numai o matrice pătratică poate avea o matrice inversă. Matricea inversă este o matrice pătratică.

Dacă matricea $\|A\|$ este simetrică și matricea $\|A\|^{-1}$ este simetrică.

Dacă matricea $\|A\|$ este diagonală și matricea $\|A\|^{-1}$ este diagonală.

Dacă determinatul matricei $\|A\|$ este nul, atunci matricea inversă nu există. Se zice că matricea este singulară.

16.2. Operații cu matricele. $\alpha)$ *Adunarea și scăderea.* Numai matricele cu același număr de linii și coloane pot fi adunate sau scăzute, rezultatul fiind o matrice de același ordin având elementele egale cu suma sau diferența elementelor corespunzătoare. Deci :

$$c_{ik} = a_{ik} \pm b_{ik}$$

Unei matrice i se pot adăuga oricâte linii sau coloane nule fără ca să i se schimbe valoarea.

$\beta)$ *Înmulțirea matricelor.* Produsul a două matrice este o matrice având același număr de linii ca matricea de înmulțit și același număr de coloane ca matricea înmulțitor.

Pentru a obține elementul c_{ik} al matricei produs, se înmulțește fiecare element al liniei i cu fiecare element al coloanei k a celei de a doua matrice și se adună rezultatul. Rezultă dar :

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$$

Produsul a două matrice nu este comutativ.

$\gamma)$ *Puterea unei matrice.* Prin definiție

$$\|A\|^p = \underbrace{\|A\| \cdot \|A\| \cdot \dots \cdot \|A\|}_{p \text{ factori}}$$

Deasemenea

$$\|A\|^0 = \|1\|$$

$\delta)$ *Împărțirea matricelor.* Împărțirea unei matrice nu se poate face decât cu o matrice pătratică nesingulară, deoarece

$$\|C\| = \|A\| : \|B\| = \|B\|^{-1} \cdot \|A\|.$$

Ultimul produs nu este comutativ.

16.3. Ordinea matricelor. $\alpha)$ Într'un produs, ordinea matricelor nu poate fi schimbată :

$$\|A\| \cdot \|B\| \neq \|B\| \cdot \|A\|$$

sau

$$(\|A\| \cdot \|B\|) \cdot \|C\| \neq \|A\| \cdot \|C\| \cdot \|B\|$$

Excepții: 1° Dacă una din matrice este unitară.

$$2^{\circ} (\|A\| \cdot \|B\| \cdot \|C\|)_t = \|C_t\| \cdot \|B_t\| \cdot \|A_t\|$$

$$(\|A\| \cdot \|B\| \cdot \|C\|)^{-1} = \|C\|^{-1} \cdot \|B\|^{-1} \cdot \|A\|^{-1}.$$

16.4. Ecuații cu matrice. Ecuațiile matriciale se rezolvă ca și ecuațiile algebrice, cu singura deosebire că o matrice nu poate fi trecută dintr'un membru în celălalt prin înmulțirea cu inversa acestei matrice decât dacă această matrice nu este singulară.

16.5. Matricea compusă. Orice matrice poate fi descompusă într'un număr oarecare de părți mai mici, fiecare parte formând la rândul ei o matrice. O matrice al cărui fiecare element este o matrice, se numește o matrice compusă.

La o matrice compusă

$$\|Z\| = \begin{array}{|c|c|} \hline \|A\| & \|B\| \\ \hline \|C\| & \|D\| \\ \hline \end{array}$$

matricea transpusă este

$$\|Z\|_t = \begin{array}{|c|c|} \hline \|A_t\| & \|C_t\| \\ \hline \|B_t\| & \|D_t\| \\ \hline \end{array}$$

16.6. Derivata și integrala unei matrice. Dacă elementele unei matrice sunt funcții de timp și p simbolul de derivare, atunci

$$\frac{d\|A\|}{dt} = p\|A\| = \|pa_{jk}\|$$

și

$$\int_{t_0}^t \|A\| dt = \frac{1}{p} \|A\| = \left\| \frac{a_{jk}}{p} \right\|$$

17. STUDIUL REȚETELOR ELECTRICE

(Problemele 17.1—17.35)

17.1. Studiul cuadripolului. Ecuațiile cuadripolului fiind

$$\left. \begin{aligned} \bar{U}_1 &= \bar{A}\bar{U}_2 + \bar{B}\bar{I}_2 \\ \bar{I}_1 &= \bar{C}\bar{U}_2 + \bar{D}\bar{I}_2 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

ele se pot scrie sub forma matricială

$$\|E_1\| = \|\gamma\| \cdot \|E_2\| \quad (110)$$

în care

$$\|E_1\| = \begin{bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{I}_1 \end{bmatrix}, \quad \|E_2\| = \begin{bmatrix} \bar{U}_2 \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix} \quad \text{și} \quad \|\gamma\| = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{bmatrix},$$

$\|\gamma\|$ se numește *matricea caracteristică* a cuadripolului.

Ecuațiile cuadripolului în raport cu curenții fiind

$$\left. \begin{aligned} \bar{I}_1 &= \bar{Y}_{11}\bar{U}_1 + \bar{Y}_{12}\bar{U}_2 \\ \bar{I}_2 &= \bar{Y}_{21}\bar{U}_1 + \bar{Y}_{22}\bar{U}_2 \end{aligned} \right\} \quad (111)$$

în care

$$\bar{Y}_{11} = \frac{\bar{D}}{\bar{B}}, \quad \bar{Y}_{12} = -\bar{Y}_{21} = \frac{1}{\bar{B}}, \quad \bar{Y}_{22} = \frac{\bar{A}}{\bar{B}}$$

ecuația matricială corespunzătoare este:

$$\|I\| = \|\eta\| \cdot \|U\|, \quad (112)$$

$\|\eta\|$, matricea coeficienților, se numește *matricea admitanță* a cuadripolului.

Ecuațiile cuadripolului în raport cu tensiunile fiind

$$\left. \begin{aligned} \bar{U}_1 &= \bar{Z}_{11}\bar{I}_1 + \bar{Z}_{12}\bar{I}_2 \\ \bar{U}_2 &= \bar{Z}_{21}\bar{I}_1 + \bar{Z}_{22}\bar{I}_2 \end{aligned} \right\} \quad (113)$$

în care

$$\bar{Z}_1 = \frac{\bar{A}}{\bar{C}}, \quad \bar{Z}_{12} = -\bar{Z}_{21} = \frac{1}{\bar{C}}, \quad \bar{Z}_{22} = -\frac{\bar{D}}{\bar{C}},$$

ecuația matricială este :

$$\|U\| = \|\zeta\| \cdot \|I\|, \quad (114)$$

$\|\zeta\|$, matricea coeficienților, se numește *matricea impedanță* a cuadripolului.

Între matricea admitanță și matricea impedanță există relația

$$\|\zeta\| = \|\eta\|^{-1}$$

Cele trei matrice se pot scrie una în funcție de cealaltă, obținându-se :

$$\begin{aligned} \|\gamma\| &= \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{bmatrix} = \frac{1}{\bar{Y}_{12}} \begin{bmatrix} \bar{Y}_{22} & -1 \\ |\eta| & -\bar{Y}_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{\bar{Z}_{12}} \begin{bmatrix} -\bar{Z}_{11} & |\zeta| \\ -1 & \bar{Z}_{22} \end{bmatrix} \\ \|\eta\| &= \frac{1}{\bar{B}} \begin{bmatrix} \bar{D} & -1 \\ 1 & -\bar{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Y}_{11} & \bar{Y}_{12} \\ \bar{Y}_{21} & \bar{Y}_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{|\zeta|} \begin{bmatrix} \bar{Z}_{22} & -\bar{Z}_{12} \\ -\bar{Z}_{21} & \bar{Z}_{11} \end{bmatrix} \\ \|\zeta\| &= \frac{1}{\bar{C}} \begin{bmatrix} \bar{A} & -1 \\ 1 & -\bar{D} \end{bmatrix} = \frac{1}{|\eta|} \begin{bmatrix} \bar{Y}_{22} & -\bar{Y}_{21} \\ -\bar{Y}_{12} & \bar{Y}_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_{11} & \bar{Z}_{12} \\ \bar{Z}_{21} & \bar{Z}_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

17.2. Legarea cuadripolilor. α) Legarea în lanț. Se utilizează ecuația cuadripolului sub forma (110) obținându-se matricea caracteristică a cuadripolului rezultat

$$\|\gamma\| = \|\gamma'\| \cdot \|\gamma''\| \dots \|\gamma^{(n)}\|, \quad (115)$$

Dacă sunt identici cuadripolii atunci

$$\|\gamma\| = \|\gamma'\|^n$$

β) *Legarea în paralel*. Se utilizează ecuația cuadripolului sub forma (112) și matricea admitanță a cuadripolului rezultat este :

$$\| \eta \| = \| \eta' \| + \| \eta'' \| + \dots + \| \eta^{(n)} \| . \quad (116)$$

Dacă sunt identici cuadripolii atunci

$$\| \eta \| = n \| \eta \| .$$

γ) *Legarea în serie*. Se utilizează ecuația cuadripolului sub forma (114) și matricea impedanță a cuadripolului rezultat este

$$\| \zeta \| = \| \zeta' \| + \| \zeta'' \| + \dots + \| \zeta^{(n)} \| . \quad (117)$$

Dacă sunt identici cuadripolii atunci

$$\| \zeta \| = n \| \zeta' \| .$$

17.3. Mărimile de calcul ale unei rețele electrice. Dacă rețeaua de studiat are l elemente (sau laturi) n noduri și s subrețele, cei l curenți din laturi pot fi înlocuiți cu m curenți independenți (teorema lui Maxwell), al căror număr se calculează cu relația

$$m = l - n + s. \quad (118)$$

Se notează $\| e \|$, $\| Z \|$, $\| i \|$, $\| e' \|$, $\| Z' \|$, $\| i' \|$ matricele forțelor electromotoare, impedanțelor și curenților rețelei date (rețeaua primitivă) și rețelei transformate. Între aceste mărimi se scriu următoarele relații :

$$\| i \| = \| C \| \cdot \| i' \| \quad (119)$$

$$\left. \begin{aligned} \| e \| &= \| Z \| \cdot \| i \| \quad \text{și} \quad \| e' \| = \| Z' \| \cdot \| i' \| \\ \| P \| &= \| e_t \| \cdot \| i \| \quad \text{și} \quad \| P' \| = \| e'_t \| \cdot \| i' \| \end{aligned} \right\} \quad (120)$$

$$\left. \begin{aligned} \| e' \| &= \| C_t \| \cdot \| e \| \\ \| Z' \| &= \| C_t \| \cdot \| Z \| \cdot \| C \| \end{aligned} \right\} \quad (121)$$

în care $\| C \|$ este *matricea de conexiune* între cele două rețele și este definită ca matricea coeficienților sistemului de ecuații lineare dintre curenții din fiecare latură a rețelei primitive și curenții independenți sau ciclici din aceeași rețea. Ecuațiile acestea sunt de forma

$$i_k = \sum C_{kl} i_l \quad (122)$$

$\|P\|$ și $\|P'\|$ sunt matricele puterilor puse în joc în rețea. În orice rețea, întotdeauna

$$\|P\| = \|P'\|.$$

17.4. Reguli generale de calcul al rețelelor. 1° Se trasează cu grijă o schemă a rețelei de studiat etichetându-se elementele Z_{aa}, \dots , numerotându-se extremitățile lor conform cuplajului electromagnetic fixat (sensul curenților) și trasându-se forțele electromotoare impuse.

2° Se numără laturile, nodurile și subrețelele, deducându-se numărul de circuite independente cu ajutorul relației (118).

Se introduc în rețea atâți curenți independenți i_p, i_q, i_r, \dots , câte circuite independente sunt, materializându-i prin săgeți având un sens arbitrar.

3° Se determină curenții din toate laturile circuitului în funcție de acești curenți independenți, cu ajutorul primei legi a lui Kirchhoff.

4° Se scriu ecuațiile (122) între curenții rețelei primitive și acești curenți. Se deduce matricea de conexiune $\|C\|$.

5° Se calculează $\|e'\|$ și $\|Z'\|$ cu ajutorul relațiilor (121). Din ecuația de funcționare (120) se deduce

$$\|i'\| = \|Z'\|^{-1} \cdot \|e'\| \quad (123)$$

și apoi cu relația (119) curenții căutați din rețeaua primitivă. Se calculează diferența de potențial la bornele fiecărui element

$$\|e_l\| = \|Z\| \cdot \|C\| \cdot \|i'\| \quad (124)$$

și puterea absorbită cu a doua relație (119).

6° Pentru conducerea mai departe a calculului trebuie să se cunoască constituția elementelor rețelei și să se precizeze scopul urmărit.

α) Dacă se caută regimul permanent sinusoidal, atunci în sistemul (123) impedanțele vor avea forma

$$\bar{Z}_{ik} = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}$$

iar forțele electromotoare, forma

$$\bar{e} = E|_{\varphi}$$

β) Dacă se caută regimul tranzitoriu creat de un anumit număr de forțe electromotoare de forma $f_1(t), f_2(t), \dots$ aplicate la timpul $t = 0$, atunci impedanțele au forma

$$Z(p) = R + pL + \frac{1}{pC}$$

și forțele electromotoare, forma

$$\varphi(p) = \mathcal{L}f(t);$$

sistemul (123) va da soluțiile sub forma

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1} \frac{\alpha(p)}{\beta(p)}.$$

γ) Dacă se caută numai sistemul de ecuații diferențiale de funcționare ale sistemului, se calculează produsul matricelor $\|Z'\|$ și $\|i'\|$ și se înlocuiește în rezultat p prin simbolul de derivare $\frac{d}{dt}$, $\frac{1}{p}$ prin simbolul de integrare $\int_0^t () dt$ și se egalează această matrice cu matricea forțelor electromotoare date $f(t)$.

17.5. Interconectarea rețelelor. α) *Conectarea prin conductori.* 1^o Se obțin matricele forțelor electromotoare, impedanțelor și curenților rețelei interconectate date compunând matricele corespunzătoare ale rețelelor componente simple.

2^o Se alege apoi un număr de curenți independenți, dat de relația (118), în funcție de care se scriu curenții din laturile rețelei primitive, deducându-se astfel matricea de conexiune.

Restul calculului se urmează apoi ca în cazul rețelelor simple.

β) *Conectarea prin circuite magnetice.* Circuitele magnetice mai introduc un număr de ecuații de legătură între curenți obținute scriind că forța magnetomotoare este nulă

$$\sum n_i = 0 \quad (125)$$

ceea ce are ca efect eliminarea unui număr de curenți egal cu numărul de ecuații de tipul (125) ce se poate scrie.

Matricea de conexiune se obține astfel:

1^o Se scrie matricea de conexiune $\|C_1\|$ dintre curenți fără a ține seama de circuitele magnetice.

2^o Se elimină o parte din curenți cu ajutorul ecuațiilor (125) și se scriu vechii curenți în funcție de curenții rămași. Se obține matricea de conexiune $\|C_2\|$.

3^o Matricea de conexiune resultantă căutată este :

$$\|C\| = \|C_1\| \cdot \|C_2\|. \quad (126)$$

17.6. Utilizarea coordonatelor simetrice. Presupunând că toate matricele sistemului sunt complexe, formulele de transformare devin

$$\left. \begin{aligned} \|e'\| &= \|C_t\|^* \cdot \|e\| \\ \|\bar{S}\| &= \|e_t\| \cdot \|i\|^* \\ \|Z'\| &= \|C_t\|^* \cdot \|Z\| \cdot \|C\| \end{aligned} \right\} \quad (127)$$

în care s'a notat cu $\|a\|^*$ matricea conjugată a matricei $\|a\|$.

Matricea de conexiune între curenții pe fază și componentele simetrice corespunzătoare este :

$$\|C_s\| = \begin{array}{c|ccc} & h & d & i \\ \hline a & 1 & 1 & 1 \\ \hline b & 1 & a^2 & a \\ \hline c & 1 & a & a^2 \end{array}$$

Deoarece, în componente simetrice puterea este

$$\bar{S} = 3 \bar{U}_h \bar{I}_h^* + 3 \bar{U}_d \bar{I}_d^* + 3 \bar{U}_i \bar{I}_i^*$$

matricele de transformare în coordonate simetrice, sunt

$$\left. \begin{aligned} \bar{S} &= 3 \|e_t'\| \cdot \|i'\|^* \\ \|e'\| &= \frac{1}{3} \|C_s\|^* \cdot \|e\| \\ \|Z'\| &= \frac{1}{3} \|C_s\|^* \cdot \|Z\| \cdot \|C_s\| \end{aligned} \right\} \quad (128)$$

17.7. Calculul rețelelor cu ajutorul coordonatelor simetrice. Calculul rețelelor se face cu ajutorul următoarelor patru rețele :

1^o Rețeaua dată, conținând B bucle.

2^o Rețeaua primitivă a acesteia, conținând K elemente și K bucle, repartizate în grupe de câte trei elemente sau câte un element.

3^o Rețeaua primitivă în coordonate simetrice, identică cu precedenta, ca număr de elemente și bucle și ca grupare.

4^o Rețeaua echivalentă, în coordonate simetrice, a rețelei date, conținând același număr de elemente și bucle ca și rețeaua dată, putând avea însă un număr diferit de subrețele.

Dacă

$\| C_2^1 \|$ este matricea de conexiune între rețelele 1 și 2

$\| C_3^2 \|$ idem între rețelele 2 și 3

$\| C_4^3 \|$ idem între rețelele 3 și 4

atunci matricea de conexiune a sistemului este

$$\| C \| = \| C_2^1 \| \cdot \| C_3^2 \| \cdot \| C_4^3 \| . \quad (129)$$

În problemele de această natură sunt date impedanțele și forțele electromotoare în una sau mai multe din aceste rețele și se caută curenții în rețeaua (1), fie direct, fie prin intermediul rețelei (4).

ENUNTURI

PARTEA I

STUDIUL CIRCUITELOR IN CURENT ALTERNATIV

1. CANTITĂȚI COMPLEXE. REPREZENTAREA UNUI VECTOR PRIN MĂRIMI COMPLEXE

— Să se deseneze vectorii :

1.1. $3 + j4$

1.2. $-2 + j6$

1.3. $-4 - j1$

1.4. $2 - 2j$

1.5. $4 \epsilon^{j\frac{\pi}{5}}$

1.6. $-3 \epsilon^{j0.2}$

1.7. $2 \epsilon^{j14.0}$

1.8. $5 \epsilon^{-j1.0}$

1.9. $3 \angle 45^\circ$

1.10. $8 \angle 125^\circ$

1.11. $5 \angle 208^\circ 30'$

1.12. $1 \angle 315^\circ$

1.13. $-2 \angle 45^\circ$

1.14. $3 \angle -60^\circ$

1.15. $-5 \angle -30^\circ$

1.16. Să se exprime vectorii din exercițiile 1.1—1.4 sub forma $V \angle \varphi$.

1.17. Idem, sub forma $V \epsilon^{j\varphi}$.

1.18. Să se exprime vectorii din exercițiile 1.5—1.8 sub forma $a + jb$.

1.19. Idem, sub forma $V \angle \varphi$.

1.20. Să se exprime vectorii din exercițiile 1.9—1.15 sub forma $a + jb$.

1.21. Idem, sub forma $V \epsilon^{j\varphi}$.

— Să se exprime sub forma $a + jb$ expresiile :

1.22. $y = \cos 2j$

1.24. $y = \cosh j$

1.23. $y = \sin 3j$

1.25. $y = \sinh 2j$

1.26. Idem, dar sub forma $V \angle \varphi$.

— Aceeași chestiune pentru expresiile :

1.27. $\sin(1 - j)$

1.29. $\sinh(3 - 2j)$

1.28. $\cos(-1 + 2j)$

1.30. $\cosh(-5 + 4j)$

— Aceiași chestiune pentru expresiile

1.31. $y = \sqrt[3]{j}$

1.32. $y = \ln j$

1.33. $y = \epsilon^{\sqrt{j}}$

1.34. Un vector are modulul 60 și face un unghi de 30° cu axa reală. Care este expresia algebrică a acestui vector,

dacă el se găsește în primul cadran? Dar dacă se găsește în al patrulea cadran?

1.35. Un vector are modulul egal cu 50 și face un unghi de 30° cu axa complexă. Să se scrie expresia algebrică a acestui vector, când se găsește: a) în primul cadran; b) în al doilea cadran.

1.36. Un vector \bar{V} face un unghi de 45° cu vectorul \bar{V}_1 a cărui expresie analitică este $-7 + j3$. Dacă modulul vectorului \bar{V} este egal cu 10, să se scrie expresiile analitice posibile ale acestui vector.

1.37. Se rotește vectorul $\bar{V} = 10 + j15$ până când face 30° cu vectorul $\bar{V}_1 = -5 - j10$. Care sunt expresiile algebrice posibile ale vectorului \bar{V} după rotire?

1.38. Se dau vectorii $\bar{V}_1 = -10 + j5$ și $\bar{V}_2 = 10 + j5$. Se alege un nou sistem de axe de referință astfel încât axa reală să coincidă cu vectorul \bar{V}_1 . Care sunt expresiile analitice ale vectorilor dați, în raport cu noile axe?

1.39. Expresia analitică a unui vector este $\bar{V} = 5 + j10$. Să se scrie expresia acestui vector după ce a fost rotit cu 120° în sensurile pozitiv și negativ.

1.40. Care este unghiul dintre vectorii $\bar{V}_1 = -3 + j4$ și $\bar{V}_2 = 4 - j3$?

1.41. Expresia analitică a unui vector \bar{V} în raport cu un anumit sistem de axe de referință ortogonal este $-4 + j3$. Aceste axe se rotesc cu un unghi oarecare, astfel încât axa reală a acestui sistem să coincidă cu vectorul \bar{V}_1 a cărui expresie în raport cu sistemul principal de referință este $-1 + j2$. Care este expresia vectorului \bar{V} în raport cu sistemul principal de referință?

1.42. Se dau vectorii $\bar{V}_1 = 10 - j20$ și $\bar{V}_2 = -6 - j8$. Care este proiecția lui \bar{V}_2 pe \bar{V}_1 ?

1.43. Care este proiecția vectorului \bar{V}_2 din problema precedentă pe normala la \bar{V}_1 ?

2. OPERAȚII CU VECTORI REPREZENTAȚI PRIN MĂRIMI COMPLEXE

— Să se efectueze operațiile:

2.1. $(3 + j4) + (-4 - j1)$

2.2. $(2 - j2) + (-4 - j1)$

2.3. $(-2 + j6) + 4 e^{-j\frac{\pi}{4}}$

2.4. $2 \angle 30^\circ + 3 e^{j0,3}$

2.5. $(1 + j3) - (3 - j2)$

2.6. $(-1 + j2) - (-2 - j3)$

2.7. $3 \angle 60^\circ - 3 \angle -60^\circ$

2.8. $1 \angle \frac{2\pi}{3} - 1 \angle -\frac{2\pi}{3}$

2.9. $\sqrt{2}(1+j) - 1 \angle 120^\circ$

2.10. $1 \angle -120^\circ - 1$

2.11. $(3+j2)(-2+j3)$

2.12. $(3+j4)(2-j2)$

2.13. $2 \angle \frac{\pi}{3} \cdot (2+j2)$

2.14. $(-3+j3) \cdot 5 \angle -15^\circ$

2.15. $2 \angle -18^\circ \cdot 0,866 \angle 48^\circ$

2.16. $(2-j2) \cdot (1-j3)$

2.17. $(-2+j6) : (-4-j)$

2.18. $(-3-j4) : (2+j)$

2.19. $2 \angle \frac{\pi}{3} : (0,75 + j0,433)$

2.20. $(1,91+j0,60) : \sqrt{2} \angle 29^\circ 45'$

2.21. $3 \angle 120^\circ : j\sqrt{3}$

2.22. $15 \angle 169^\circ : 6 \angle 84^\circ$

2.23. $(2-j2)^2$

2.24. $(\sqrt{3} \angle 22^\circ 15')^2$

2.25. $\sqrt{-12+j16}$

2.26. $\sqrt{-4-j1}$

2.27. $\sqrt{5} \angle 63^\circ$

— Să se simplifice expresiile :

2.28. $(4+j6)/(3-j4)$

2.30. $\frac{(4+j2)^2}{2-j1} \times \frac{3}{1+j10}$

2.29. $\frac{2-j4}{6+j7} \times \frac{3+j8}{j2}$

2.31. $\frac{2 \angle 65^\circ}{3 \angle 28^\circ} \times \frac{(6 \angle 15^\circ)^2}{\sqrt{3} \angle 18^\circ}$

2.32. Fiind date mărimile complexe

$$\bar{A} = 3 + j5$$

$$\bar{B} = 7(\cos 135^\circ + j \sin 135^\circ)$$

$$\bar{C} = 4 \angle 50^\circ$$

$$\bar{D} = 6 \angle -130^\circ$$

$$\bar{E} = 8 \angle 12^\circ$$

$$\bar{F} = 9 \angle -12^\circ$$

Se cere să se calculeze: (a) $\bar{A} + \bar{B}$; (b) $\bar{C} + \bar{D}$; (c) $\bar{E} - \bar{F}$; (d) $\bar{A} - \bar{C} + \bar{F}$; (e) $\bar{C}\bar{D}$; (f) $\bar{A}\bar{B}$; (g) $\bar{B}\bar{D}\bar{E}$; (h) $\bar{A} : \bar{B}$; (i) $\bar{C} : \bar{F}$; (j) $1 : (\bar{A} - \bar{C} + \bar{F})$; (k) $\bar{B}\bar{D}\bar{E} : \bar{A}\bar{C}\bar{F}$; (l) $\Re(\bar{C}\bar{D})$; (m) $\Re(\bar{C}) \cdot \Re(\bar{D})$; (n) $\sqrt{\bar{F}}$; (p) $\ln \bar{E}$.

Să se rezolve ecuațiile

(1) $\bar{F}x + \bar{C} = 0$

(2) $\bar{F}x^2 + \bar{C}x = \bar{E}$

— Să se calculeze derivatele funcțiilor :

2.33. $5 [\cos(\omega t - 15^\circ) + j \sin(\omega t - 15^\circ)]$ în care $\omega = 314 \text{ rad/s}$

2.34. $8 [(\cos(3\omega t + 18^\circ) - j \sin(3\omega t + 18^\circ))]$ în care $f = 42 \text{ Hz}$.

2.35. $U|_{\alpha}$ în care $\alpha = f(t)$ și $U = \text{const.}$

2.36. $15 \sqrt{3\omega t + 30^\circ}$ în care $\omega = 314 \text{ rad/s}$

2.37. $100 \sqrt{\omega t - 45^\circ}$ în care $f = 16 \frac{2}{3} \text{ Hz.}$

2.38. $120 e^{j(2\omega t - 45^\circ)}$ în care $\omega = 314 \text{ rad/s}$

2.39. $5 e^{j(\omega t + 30^\circ)}$ în care $f = 60 \text{ Hz.}$

— Să se integreze funcțiile :

2.40. $10 [\cos(\omega t + 10^\circ) + j \sin(\omega t + 10^\circ)]$ în care $\omega = 314 \text{ rad/s.}$

2.41. $8 [\cos(5\omega t - 30^\circ) - j \sin(5\omega t - 30^\circ)]$ în care $f = 16 \frac{2}{3} \text{ Hz.}$

2.42. $I|_{\beta}$ în care $\beta = f(t)$ și $I = \text{const.}$

2.43. $12 \sqrt{\omega t - 15^\circ}$ în care $\omega = 105 \text{ rad/s}$

2.44. $120 \sqrt{5\omega t + 20}$ în care $f = 50 \text{ Hz.}$

2.45. $141 e^{-j(3\omega t + 60^\circ)}$ în care $\omega = 314.$

2.46. $120 e^{j(\omega t - 30^\circ)}$ în care $f = 42 \text{ Hz.}$

2.47. Să se găsească expresia vectorului care, adunat cu vectorii $\bar{V}_1 = 8 - j6$ și $\bar{V}_2 = 2 + j10$ să dea ca rezultată vectorul $\bar{V} = -3 - j6.$

2.48. Un vector \bar{V} este suma a doi vectori. Primul are modulul egal cu 10 și este paralel cu vectorul $\bar{V}_1 = 3 - j4.$ Al doilea are modulul egal cu 20 și este paralel cu vectorul $\bar{V}_2 = -8 + j2.$ Care este expresia analitică a vectorului $\bar{V}?$

2.49. Ce operator trebuie aplicat vectorului $\bar{V}_1 = -5 + j10$ pentru a-l face să coincidă cu vectorul $\bar{V}_2 = 5 + j10?$

2.50. Să se determine unghiul pozitiv de rotire necesar pentru a face ca vectorul $\bar{V}_1 = -10 - j5$ să fie paralel cu vectorul $\bar{V}_2 = 3 + j4.$

2.51. Se dă vectorul $\bar{V}_1 = -8 + j6.$ Să se determine vectorii \bar{V}_2 și \bar{V}_3 având amândoi același modul, știind că $\bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \bar{V}_3 = 0.$

2.52. Să se arate că, oricare ar fi vectorul \bar{Z} , rădăcinile lui de ordinul m pot fi reprezentate prin cele m raze ale unui poligon regulat cu m laturi.

Care este poziția primei raze în raport cu vectorul dat?

3. REPREZENTAREA FUNCȚILOR SINUSOIDALE PRIN CANTITĂȚI COMPLEXE. LEGILE LUI OHM ȘI KIRCHHOFF

— Să se scrie sub formă complexă expresiile :

3.1. $i = 7,05 \cos(\omega t - 30^\circ) \text{ A}$

3.2. $u = 170 \sin(\omega t + 25^\circ) \text{ V}$

3.3. $z = 15 \cos 35^\circ \Omega$

3.5. $u = 312 \cos(\omega t + 15^\circ) \text{ V}$

3.4. $i = 21,2 \sin(\omega t - 60^\circ) \text{ A}$

3.6. $z = 200 \sin 60^\circ \Omega$

— Să se scrie valoarea instantanee a mărimilor :

3.7. $\bar{I} = 4 - j3 \text{ A}$

3.11. $\bar{I} = 10 \angle -25^\circ \text{ A}$

3.8. $\bar{I} = 7 + j24 \text{ A}$

3.12. $\bar{U} = 220 \angle 15^\circ \text{ V}$

3.9. $\bar{U} = 60 + j80 \text{ V}$

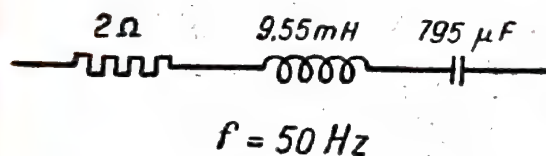
3.13. $\bar{I} = 6 e^{j\frac{\pi}{18}} \text{ A}$

3.10. $\bar{U} = 160 - j120 \text{ V}$

3.14. $\bar{U} = 120 e^{-j15^\circ} \text{ V}$

— Să se determine impedanța, rezistența și reactanța echivalentă, precum și defazajul față de originea de fază, a circuitelor :

3.15



$f = 50 \text{ Hz}$

Fig. 3.15.

3.16

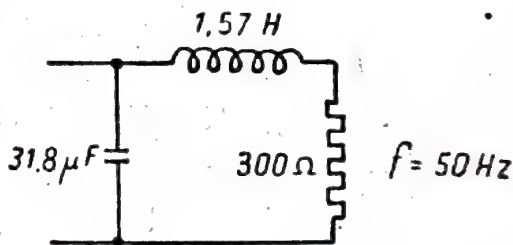


Fig. 3.16.

3.17

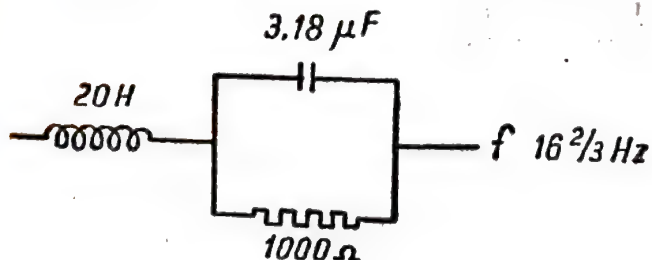


Fig. 3.17.

3.18

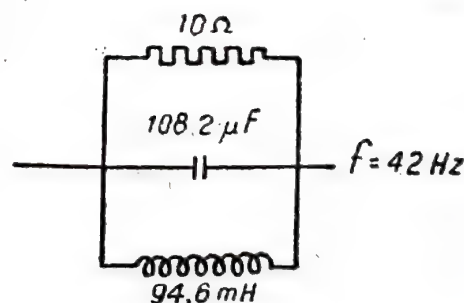


Fig. 3.18.

3.19. Să se determine impedanța circuitului din problema 3.18 cu ajutorul admitanțelor.

3.20. Din impedanța calculată, să se determine admitanța, conductanța și susceptanța echivalentă a circuitului din exercițiul 3.16.

3.21. Să se calculeze impedanța echivalentă a circuitului din fig. 3.21, privită pe la bornele AC .

3.22. O impedanță \bar{Z}_2 este alimentată de la o sursă de tensiune sinusoidală de 2300 V și 50 Hz printr'o linie având o rezistență $R_1 = 0,80 \Omega$ și o inductanță $L_1 = 3,72 \text{ mH}$. Puterea absorbită de instalație este de 190 kW cu un factor de putere inductiv de 0,78.

Să se determine expresia impedanței \bar{Z}_2 .

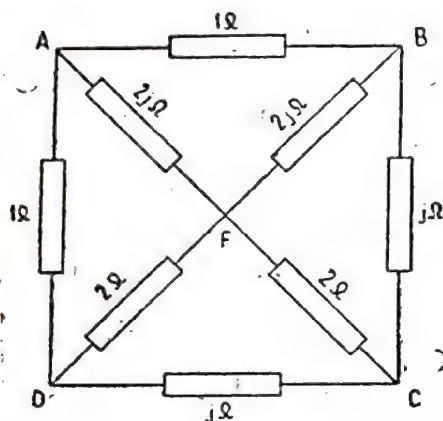


Fig. 3.21

Dacă la bornele impedanței \bar{Z}_2 se montează un condensator perfect având o capacitate de $57,1 \mu\text{F}$, se cere să se calculeze puterea absorbită de sistem și factorul de putere corespunzător.

3.23. Tensiunea aplicată unui circuit este $\bar{U} = 4 + j5 \text{ V}$ iar curentul care străbate circuitul este $\bar{I} = 10 + j2 \text{ A}$. Să se găsească rezistența și reactanța circuitului.

3.24. O tensiune de 220 V cu o frecvență de 50 Hz, este aplicată la bornele unui circuit format din:

(a) o inductanță de 0,5 H având o rezistență proprie de 90Ω ;

(b) un condensator de $20 \mu\text{F}$ în serie cu o rezistență de 50Ω ;

(c) circuitele (a) și (b) în serie;

(d) circuitele (a) și (b) în paralel.

Să se determine, pentru fiecare caz în parte, curentul din circuit și defazajul său față de tensiune, precum și valoarea tensiunii și curentului, pentru valorile lui t egale cu 0,002, 0,005, 0,010 și 0,015s, timpul t măsurându-se de la primul maxim al tensiunii.

3.25. Se dă un circuit format dintr'o inductanță L în derivație cu un condensator de capacitate C și totul în serie cu o rezistență R . Se cere condiția ca în circuit să nu existe curent de frecvență f când acestui circuit i se aplică tensiunea \bar{U} (circuitul bușon).

3.26. Se dă un circuit $ABCD$ în formă de punte Wheatstone în care două laturi opuse AB și CD sunt formate din două inductanțe L egale, iar celelalte două laturi opuse AC

și BD sunt formate din două capacități C egale. Una din diagonale, BC , este formată dintr'o rezistență R . Pe a doua diagonală, AD , se aplică o tensiune alternativă sinusoidală \bar{U} . Se cere condiția pe care trebuie să o îndeplinească inductanțele și capacitățile astfel încât curentul care circulă prin BC să fie independent de R (sistem de distribuție cu curent constant).

3.27. Unui circuit serie format dintr'o rezistență de 10Ω o inducțanță de 5 mH și o capacitate de $800 \mu\text{F}$, i se aplică o tensiune de 5 V de frecvență variabilă.

Să se determine curba de variație a curentului în funcție de frecvență și din acesta să se deducă și curba de rezonanță.

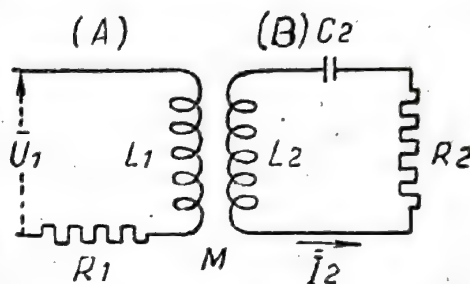


Fig. 3.28

3.28. Două circuite (A) și (B) sunt cuplate prin inductanța mutuală $M = 0,25 \text{ H}$ (fig. 3.28).

Circuitul (A) are o inductanță proprie $L_1 = 0,30 \text{ H}$ și o rezistență $R_1 = 40 \Omega$.

Circuitul (B) are o inductanță proprie $L_2 = 0,16 \text{ H}$ și este închis pe o impedanță formată dintr'o rezistență $R_2 = 30 \Omega$ în serie cu un condensator de $3,18 \mu\text{F}$.

Se cere să se determine tensiunea u , care trebuie aplicată circuitului (A) pentru ca I_2 , curentul din circuitul (B), să fie egal cu $10 \mu\text{A}$.

Să se studieze variația funcției $u = \Phi(f)$ pentru $f = 10^2, 10^3$ și 10^4 Hz .

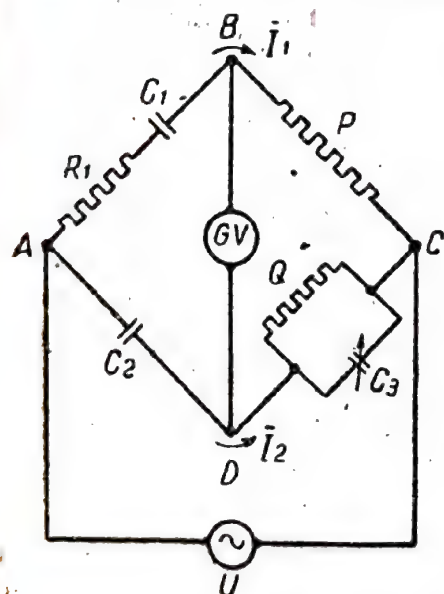


Fig. 3.30.

3.29. Un motor asincron monofazat de 10 CP alimentat sub o tensiune de 2000 V și o frecvență de 50 Hz , funcționează cu un randament de 83% și un factor de putere de $0,79$. Cu ce condensator trebuie șuntat motorul pentru ca factorul de putere global să fie egal cu $0,95$?

3.30. Pentru măsurarea capacității cablurilor sau a materialelor izolante, se folosește un montaj special în punte, numit puntea Schering (fig. 3.30).

Condiția de echilibru a acestei punți este aceeași ca și a punții Wheatstone, adică

$$\frac{\bar{Z}_{AB}}{\bar{Z}_{AD}} = \frac{\bar{Z}_{BC}}{\bar{Z}_{DC}}.$$

La o asemenea punte, alimentată sub o tensiune de 20 kV la 50 Hz, s'a obținut echilibrul pentru

$$C_2 = 0,055 \mu\text{F}, \quad C_3 = 1,75 \mu\text{F} \quad P = 200 \Omega \quad Q = 700 \Omega$$

Să se calculeze C_1 , rezistența sa echivalentă R_1 , factorul de putere al condensatorului C_1 , unghiul său de pierdere precum și tensiunea la bornele condensatorului variabil C_3 .

(IPB, 1949)

3.31. O punte de curent alternativ $ABCD$ are următoarele elemente:

Intre A și B o rezistență neinductivă P .

„ B și C o capacitate C în serie cu o rezistență r .

„ C și D o rezistență neinductivă Q .

„ D și A o inductanță L în serie cu o rezistență R .

Să se găsească condiția de echilibru.

Aplicație. Dacă tensiunea aplicată între bornele A și C este de 10 V cu o frecvență de 795 Hz, $P = 2000 \Omega$, $Q = 1000 \Omega$, $C = 0,1 \mu\text{F}$ și $r = 900 \Omega$, să se găsească valorile lui L și R .

(IPB 1949)

3.32. Se dau două impedanțe Z_1 și Z_2 legate în serie. Alimentându-le cu o tensiune continuă de 110 V, căderea de tensiune în impedanța Z_1 este de două ori mai mare decât în impedanța Z_2 . Alimentate sub o tensiune alternativă de 220 V 50 Hz, căderea de tensiune în prima impedanță este numai jumătate din aceea din a doua impedanță și factorul de putere este egal cu 0,5. Dacă se ia ca origine de fază curentul ce străbate cele două impedanțe, să se scrie expresia tensiunii aplicate circuitului precum și expresiile celor două căderi de tensiune, cunoscând că raportul dintre intensitățile curenților (continuu și alternativ) este egal cu 2.

3.33. Un circuit receptor telefonic este legat de circuitul transmițător printr'un transformator. Impedanța circuitului receptor este $Z_R = 260 \angle 15^\circ \Omega$ la 1000 Hz. Constantele transformatorului sunt $R_1 = R_2 = 43 \Omega$, $L_1 = L_2 = 3,6 \text{ H}$, $M = 3,5 \text{ H}$.

Dacă R_1 , R_2 , L_1 , L_2 și M sunt presupuse constante, care este impedanța aparentă a circuitului receptor plus transformatorul privită dinspre bornele de intrare ale transformatorului?

Pierderile în fier ale transformatorului se neglijează dat fiind efectul neglijabil al lor în condițiile de funcționare.

Notă: Se numește impedanță aparentă, impedanța măsurată la bornele circuitului primar în prezența circuitului secundar.

3.34. Se dă circuitul din figura 3.34 în care $\bar{E}_1 = 10 + j0 \text{ V}$; $\omega = 314 \text{ rad/s}$; $R_1 = 3,4 \text{ } \Omega$; $R_2 = 5,1 \text{ } \Omega$; $R_3 = 0,5 \text{ } \Omega$; $L_1 = 55 \text{ } \mu\text{H}$; $L_2 = 725 \text{ } \mu\text{H}$; $L_3 = 106 \text{ } \mu\text{H}$; $C_2 = 0,0421 \text{ } \mu\text{F}$; $C_3 = 0,0076 \text{ } \mu\text{F}$; $R_s = 120 \text{ } \Omega$; $L_s = 450 \text{ } \mu\text{H}$; $M = 268 \text{ } \mu\text{H}$. Se cere să se determine impedanțele totale ale buclelor; curenții în cele două bucle; raportul curenților; puterea dată de sursă; puterea absorbită de sarcină și randamentul sistemului.

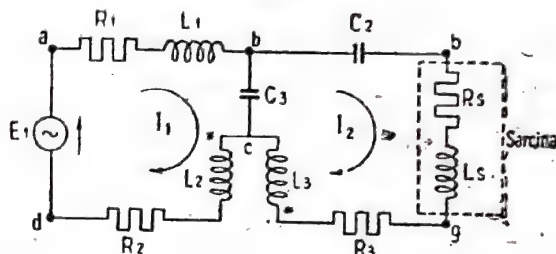


Fig. 3.34.

3.35. Se dă circuitul din figura 3.35. Știind că puterea aparentă totală dată de sursă este

$$\bar{S} = 5,2 - j 2,5 \text{ kVA}$$

se cere să se determine :

- Mărimea inductanței L_1 în henry;
- Valoarea eficace a tensiunii E a sursei;
- Factorul de putere al circuitului, măsurat la bornele

AB.

- Decalajul curențului I în raport cu tensiunea E .

Date numerice: $R_1 = 80 \text{ } \Omega$; $R_2 = 200 \text{ } \Omega$; $C_2 = 10^{-6} \text{ F}$; $f = 50 \text{ Hz}$.

3.36. O impedanță absoarbe dela o sursă, cu tensiune constantă, o putere de 250 kVA cu un factor de putere inductiv egal cu 0,5. O a doua impedanță este legată în paralel cu prima și absoarbe o putere de 100 kVA cu un factor de putere reglabil. Se cere să se determine factorul de putere global maximum ce se poate obține.

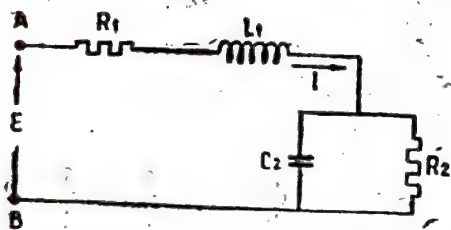


Fig. 3.35

În acest caz să se găsească :

- Puterea activă și reactivă absorbită de a doua impedanță.
- Expresia puterii aparente totale absorbită de sistem.

3.37. O sarcină inductivă de 2000 kW la un factor de putere de 0,8 este conectată la o sursă de 3 000 V, 50 Hz. În paralel cu sarcina inductivă se montează un condensator astfel ca factorul de putere total al sistemului să fie egal cu unitatea. Factorul de putere al condensatorului cu aparatele auxiliare necesare este de 0,05.

Se cere să se determine :

- Curentul absorbit de sarcină și de condensator;
- Diagrama vectorială cuprinzând tensiunea aplicată circuitului și curenții absorbiți de sarcină și de condensator.

c) Expresia în cantități complexe a curentului total absorbit de instalație.

d) Puterile active și reactive absorbite de instalația întreagă și de fiecare element al ei în parte (sarcină și condensator).

3.38. Un wattmetru și un ampermetru sunt montate într'un circuit serie format dintr'o rezistență R , o inductanță L și un condensator C , fiecare constantă ca mărime. Circuitul este conectat la o sursă de tensiune sinusoidală, având amplitudinea constantă. Frecvența sursei crește lent dela valoarea de 20 Hz la valoarea de 60 Hz, astfel încât se pot neglija fenomenele tranzitorii.

La frecvența de 25 Hz, wattmetrul indică 314,4 W. Crescând frecvența, atât indicațiile ampermetrului, cât și acelea ale wattmetrului cresc. La 60 Hz acestea sunt respectiv 35 A și 3851 W. Peste această valoare, orice creștere a frecvenței face ca indicațiile wattmetrului să descrească.

Se cere să se determine :

- Rezistența circuitului.
- Amplitudinea tensiunii aplicate.
- Capacitatea și inductanța din circuit.
- Frecvența de rezonanță a circuitului.
- Forma curbei de rezonanță.

3.39. La cele două perechi de plăci ale unui oscilograf catodic se aplică tensiunile

$$u_1 = U_1 \sqrt{2} \cos (\omega t - \psi)$$

$$u_2 = U_2 \sqrt{2} \cos 2\omega t.$$

Să se determine :

a) Expresia analitică a imaginii care apare pe ecranul oscilografului.

b) Forma figurilor ce se obțin pentru $\psi = 0, \frac{\pi}{4}$ și $\frac{\pi}{2}$ radiani, presupunându-se tensiunile U_1 și U_2 egale și u_1 fiind măsurată pe absciză.

3.40. Tensiunea aplicată rețelei, reprezentate în fig. 3.40 este de 127 V. Parametrii rețelei au următoarele valori :

$$\begin{array}{ll} G_1 = 0,01 \text{ S} & B_1 = 0,02 \text{ S} \\ R_2 = 20 \text{ } \Omega & X_2 = 10 \text{ } \Omega \\ R_3 = 50 \text{ } \Omega & X_3 = 25 \text{ } \Omega \\ & X_4 = 10 \text{ } \Omega \end{array}$$

Să se arate ce indică ampermetrul A . Să se găsească diferența de potențial între punctele a și b , verificându-se că, pe orice drum ar fi determinată, diferența de potențial este aceeași.

3.41. Pentru determinarea inductanței unei bobine a fost aleasă schema reprezentată în fig. 3.41.

Capacitatea condensatorului este astfel fixată, încât indicația ampermetrului să rămână neschimbată ori cum ar fi K , deschis sau închis.

Să se determine inductanța căutată a bobinei, știind că măsurătorile s'au făcut la tensiunea de 380 V, frecvența 50 Hz și că ampermetrul a arătat în ambele cazuri 1 A.

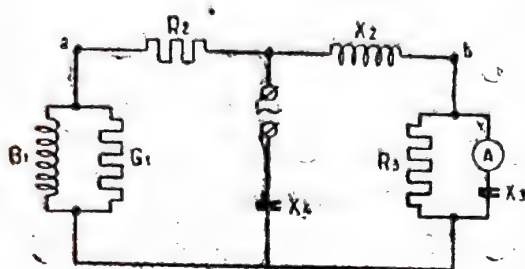


Fig. 3.40

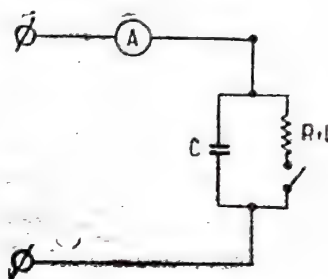


Fig. 3.41

3.42. În rețeaua din fig. 3.42 se aplică la bornele AB tensiunea de 220 V. Să se determine curenții în ramuri și curentul total pentru cazul întrerupătorului închis și deschis.

Aplicație numerică $R_1 = R_2 = X_L = X_C = 25 \Omega$

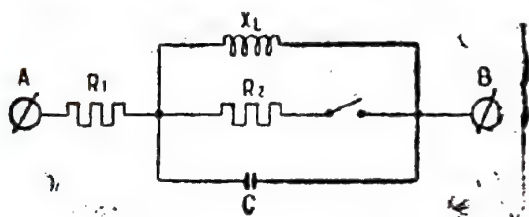


Fig. 3.42

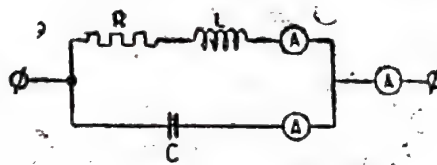


Fig. 3.43

3.43. În circuitul din fig. 3.43 are loc rezonanța curenților. Ampermetrul A_1 arată curentul $I_1 = 6 \text{ A}$, iar ampermetrul A_3 , curentul $I_3 = 3,6 \text{ A}$. Ce arată ampermetrul A_2 ?

3.44. În circuitul reprezentat în fig. 3.44 ampermetrul A_2 arată $I_2 = 0$. Ce curent I_4 arată ampermetrul A_4 , dacă tensiunea aplicată este $U = 200 \text{ V}$, iar parametrii circuitului sunt respectiv: $R_1 = 50 \Omega$, $L_1 = 0,2 \text{ H}$, $C_3 = 10 \mu\text{F}$, $L_4 = 0,1 \text{ H}$, $C_5 = 5 \mu\text{F}$, $R_5 = 50 \Omega$.

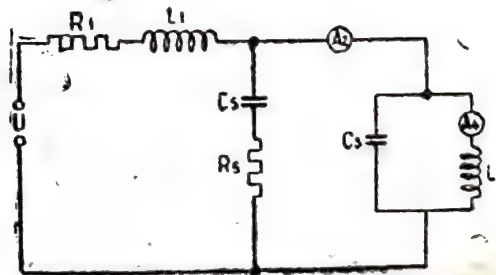


Fig. 3.44

Să se construiască diagrama vectorială a curenților și tensiunilor.

3.45. Pentru un aparat de înaltă frecvență se folosește un circuit format din două bobine cuplate magnetic între ele. În serie cu fiecare bobină este legat câte un condensator. Constantele circuitelor sunt: circuitul primar $L_1 = 0,150$ mH și $C_1 = 160$ μ F; circuitul secundar $L_2 = 0,150$ mH. Rezistența ambelor circuite este astfel ca, la frecvența de 10^6 Hz, raportul $\omega L/R$ este egal cu 100. Sursa de tensiune este în serie cu circuitul primar. Circuitul secundar este închis. Se cere:

a) Mărimea inductanței mutuale pentru care impedanța aparentă a primarului apare ca o rezistență pură dacă valoarea capacității din secundar este tot de 160 μ F. Se presupune că frecvența tensiunii din înfășurarea primară este de 10^6 Hz.

b) Dacă inductanța mutuală este de două ori mai mare decât aceea găsită mai sus, ce valoare a capacității din secundar face ca impedanța aparentă din primar să fie o rezistență pură la aceeași frecvență?

4. INVERSIUNE. LOCURI GEOMETRICE

— Să se găsească, analitic și grafic, inversul vectorilor:

4.1. $-4 - j1$

4.2. $2 - j2$

4.3. $4e^{j\frac{\pi}{3}}$

4.4. $5 \angle 30^\circ$

4.5. $0,1 \angle -25^\circ$

4.6. $3 + j4$, puterea de inversiune fiind $\bar{V}_0^2 = (1 + j1)^2$

4.7. $5 \angle -25^\circ$, puterea de inversiune fiind $\bar{V}_0^2 = (2 + j2)^2$

4.8. $3 \angle 30^\circ$, puterea de inversiune fiind $\bar{V}_0^2 = (2 \angle 20^\circ)^2$

4.9. $3 + j4$ puterea de inversiune fiind $\bar{V}_0^2 = (1 + j0)^2$

4.10. $3 + j4$ puterea de inversiune fiind $\bar{V}_0^2 = (-1 + j0)^2$

4.11. $3 + j4$ puterea de inversiune fiind $\bar{V}_2^0 = (0 + j1)^2$

4.12. $3 + j4$ puterea de inversiune fiind $\bar{V}_2^0 = (0 - j1)^2$

— Să se traseze locul geometric al vectorilor

4.13. $\bar{Z} = a + jb$ pentru $a = 0,5$ și b variind între -5 și $+5$

4.14. $\bar{Z} = a + jb$ pentru $b = 2$ și a variind între 0 și 5 .

4.15. $\bar{Z} = \frac{1}{a + jb}$ pentru $a = 0,5$ și b variind între -5 și $+5$.

4.16. $\bar{Z} = \frac{1}{a + jb}$ pentru $b = 2$ și a variind între 0 și 5 .

4.17. $\bar{Z} = a + j(b + c)$ pentru $a = b = 1$ și c variind între -5 și $+5$.

4.18. $\bar{Z} = (a + b) + jc$ pentru $a = c = 1$ și b variind între -5 și $+5$.

4.19. $\bar{Z} = (a + b + jc)^{-1}$ pentru $a = c = 1$ și b variind între -5 și $+5$.

4.20. Tensiunea de punere la pământ a unei bobine de stingere este dată de relația

$$\bar{U}_0 = \frac{46 + j34,5}{j5 - v}$$

Să se studieze variația acestei tensiuni când variază parametrul v .

4.21. Circuitul echivalent al unui motor asincron ne conduce la ecuația :

$$\bar{I} = \frac{1}{2 + j3 + \frac{25}{4 + j\lambda}}$$

Să se construiască acest loc geometric prin metoda industrială, adică cu ajutorul a trei vectori caracteristici. Să se gradeze locul și să se traseze curba $I = f(\lambda)$ pentru $-5 \leq \lambda \leq +5$.

4.22. Să se deseneze locul geometric (IPB 1949)

$$\bar{I} = \frac{(5 + j3)^2}{[2 + j3 - \frac{9}{j1 + 4x}]}$$

4.23. Se dau vectorii

$$\bar{A} = -3 + j5 \quad \bar{B} = 7 + j6 \quad \bar{C} = 2 + j3$$

Se cere să se construiască diagrama

$$\bar{I} = \frac{\bar{C}}{\bar{A} + \lambda \bar{B}}$$

Se va grada locul și trasa caracteristica $I = f(\lambda)$ pentru valorile lui λ cuprinse între ± 2 . (IPB 1949)

4.24. Se dau vectorii

$$\bar{A} = -5 + j2 \quad \bar{B} = 3 + j3 \quad \bar{C} = -2 - j4 \quad \bar{D} = 5 - j1$$

Se cere să se construiască diagrama

$$\bar{I} = \frac{\bar{A} + \lambda \bar{B}}{\bar{C} + \lambda \bar{D}}$$

folosindu-se metoda industrială, adică cu ajutorul a trei vectori caracteristici. Diagrama se va grada pentru valori ale lui λ cuprinse între ± 2 .

Toate operațiile se vor efectua numai grafic.

(IPB 1949)

4.25. Se dă circuitul din figura 4.25, în care R este o rezistență ohmică și se cere să se determine variația curentului absorbit de circuit, pentru toate regimurile de funcționare ale acestuia între mersul în gol și scurt circuit.

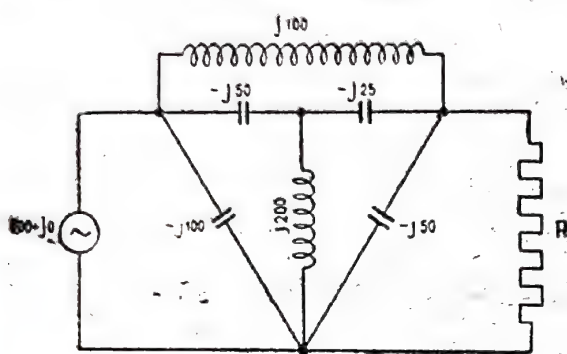


Fig. 4.25

4.26. Se dă circuitul din figura 4.26 în care X_L variază dela 0 la ∞ . Să se determine:

a) Valoarea curentului I în cazul rezonanței.

b) I minim

c) I maxim

d) Valorile lui X_L corespunzătoare fiecărei valori ale lui I . Se va folosi metoda analitică și cea grafică.

4.27. Pentru circuitul din figura 4.27 se cere să se determine valorile maxime și minime ale curentului I și factorul

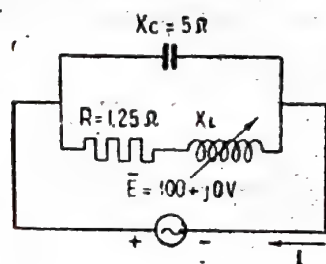


Fig. 4.26

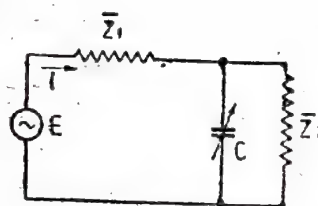


Fig. 4.27

de putere corespunzător la sursă, capacitatea C putând varia între 0 și ∞ . Aplicație numerică: $\bar{Z}_1 = \frac{3}{2} + j \frac{2}{\sqrt{3}} \Omega$; $\bar{Z}_2 = 0,2 + j 0,4 \Omega$; $\bar{E} = 10 + j 0 \text{ V}$; $f = 50 \text{ Hz}$.

4.28. In figura 4.28, M reprezintă un motor asincron de inducție absorbind o putere de 40 kW cu un factor de putere egal cu 0,8 inductiv; S reprezintă un motor sincron absorbind o putere de 40 kVA și al cărui factor de putere poate varia dela

0,1 inductiv la 0,1 capacitiv. Motorul asincron funcționează cu sarcina constantă în condițiile indicate mai sus. Motorul sincron funcționează în mod permanent absorbind aceeași putere aparentă de la rețea pentru orice factor de putere cuprins între limitele indicate.

Se cere să se traseze locul geometric al puterii aparente absorbite de grupul de mașini în funcție de factorul de putere al ansamblului și să se indice pe diagramă :

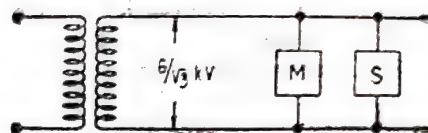


Fig. 4.28

- Vectorul corespunzător puterii aparente maxime.
- Vectorul corespunzător puterii active maxime.
- Vectorul corespunzător factorului de putere unitate.
- Vectorul corespunzător factorului de putere 0,9.

4.29. În figura 4.29 este dată schema unei punți pentru măsurarea inductanțelor. Luând tensiunea U_{ab} ca origine de fază, se cere să se construiască următoarele locuri geometrice :

- Locul geometric al tensiunii U_{ac} când variază R_s .
- Locul geometric al tensiunii U_{ad} când variază N .
- Ce concluzii se pot trage cu privire la comoditatea de echilibrare a punții ($U_{cd} = 0$) prin reglarea rezistențelor R_s și N ? Se poate face o mai bună alegere de variabile?

4.30. O fabrică utilizând motoare asincrone, este alimentată cu energie electrică printr-o linie lungă simetrică.

Constantele liniei sunt $r_1 = 2,0 \Omega/\text{fază}$ și $a_1 = 5,0 \Omega/\text{fază}$.

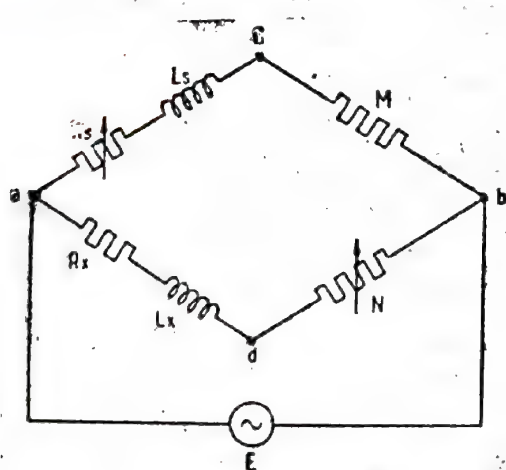


Fig. 4.29

Tensiunea de alimentare a liniei este $U_1 = 6 \text{ kV}$.

Asimilând motoarele fabricii cu o admitanță, a cărei susceptanță este constantă și egală cu $b_2 = 0,05 \text{ S/fază}$, iar conductanța g_2 este variabilă cu sarcina, se cere să se determine în funcție de încărcare :

- Tensiunea U_2 la barele de distribuție a fabricii;
 - Curentul I absorbit de fabrică;
 - Puterea activă maximă absorbită de fabrică;
 - Randamentul global al instalației și valoarea lui maximă.
 - Factorul de putere global al instalației.
- 4.31. La proiectarea aparatelor electrice de control este adesea necesar să se obțină o tensiune a cărei defazaj în raport

cu o sursă dată luată ca referință să fie continuu variabilă, mărimea sa rămânând totuși constantă. În cazul când prin bornele de ieșire nu se absoarbă un curent, pentru scopul urmărit se poate folosi o schemă în punte (fig. 4.31) la care se variază simultan, fie rezistențele R , fie capacitățile C , valorile celor două

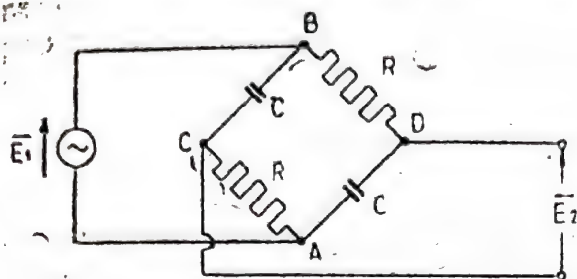


Fig. 4.31

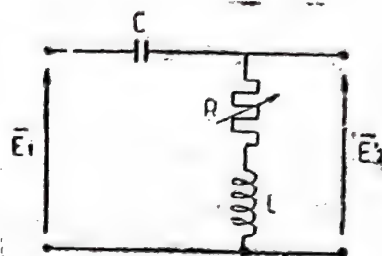


Fig. 4.32

rezistențe R sau ale capacităților C rămânând în permanență egale.

Se cere să se verifice că, în aceste condiții mărimea tensiunilor E_1 și E_2 rămâne mereu aceeași și circuitul răspunde scopului urmărit independent de frecvența sursei.

4.32. În scopul urmărit cu montajul din problema 4.31. se folosește și montajul din fig. 4.32. Tensiunea E_1 și parametrii L și C rămânând constante, tensiunea E_2 rămâne constantă ca amplitudine variind ca argument în funcție de valoarea rezistenței R .

Să se determine prin metoda inversiunii :

a) Relația dintre L , C și ω pentru ca E_2 să aibă amplitudinea constantă și argumentul variabil.

b) Limitele de variație a argumentului; să se compare rezultatul cu acela obținut în problema 4.31.

c) Să se găsească o metodă de stabilire a mărimei amplitudinii constante E_2 la valori dorite.

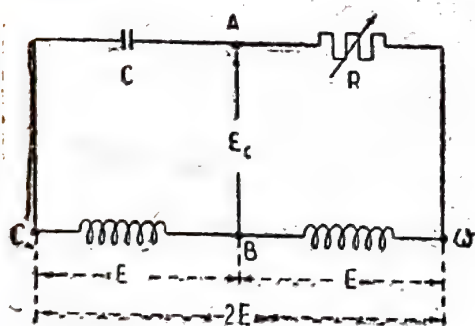


Fig. 4.33

d) Efectul variației frecvenței sursei asupra relației găsită la punctul (a).

4.33. Montajul din figura 4.33 servește pentru obținerea unei tensiuni variabile E_2 între punctele A și B. Bobinele CB și BD reprezintă înfășurarea secundară a transformatorului de alimentare care poate fi socotit ca o sursă de curent alternativ, fără impedanță interioară, de tensiune $2E$. Punctul B de conectare a fost astfel ales încât fiecare din cele două înfășurări ale transformatorului să dea tensiuni E egale ca amplitudine și

având argumente identice. La bornele sursei este conectat circuitul format din condensatorul C și rezistența variabilă R . Variația tensiunii la bornele AB se obține variind fie rezistența R , fie capacitatea C .

Presupunând că curentul absorbit de utilizare este neglijabil, se cere să se arate între ce limite poate fi variată tensiunea E , atât ca amplitudine cât și ca argument pentru toate valorile posibile ale lui R .

Aplicație numerică: $E = 230 \text{ V}$, $f = 50 \text{ Hz}$, $C = 0,005 \mu\text{F}$.

5. STUDIUL CIRCUITELOR CU AJUTORUL CANTITĂȚILOR COMPLEXE. DIPOLI. CUADRIPOLI. METODE DE CALCUL. CIRCUITE ECHIVALENTE

5.1. Se dă un circuit format din trei rezistențe, respectiv de 5Ω , 10Ω și 20Ω , legate în triunghi. Să se găsească rezistențele echivalente corespunzătoare conectării în stea.

5.2. Impedanțele $\bar{Z}_{12} = 1 + j2\Omega$, $\bar{Z}_{23} = 2 + j3\Omega$ și $\bar{Z}_{31} = 3 + j1\Omega$ sunt legate în triunghi. Să se găsească impedanțele circuitului echivalent în stea.

5.3. Să se transforme circuitul stea format din impedanțele $\bar{Z}_{10} = 1 - j2\Omega$, $\bar{Z}_{20} = 2 - j3\Omega$, $\bar{Z}_{30} = 3 - j1\Omega$ într'un circuit echivalent în triunghi.

5.4. Să se determine rezistența echivalentă a unei punți Wheatstone desechilibrată, (fig. 5.4), alimentată cu tensiunea alternativă $\bar{U} = 10 + j0$.

(IPB 1950)

5.5. Se dă o rețea având configurația din fig. 5.5 și impedanțele indicate pe aceasta. Între punctele A și C se aplică o tensiune

$$u = 100 \text{ V}.$$

Se cere să se calculeze distribuția de curenți între diversele ramuri ale rețelei aplicându-se metoda transfigurării. (IPB 1949)

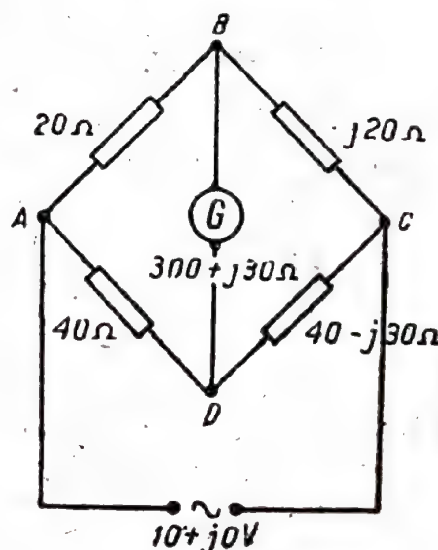


Fig. 5.4.

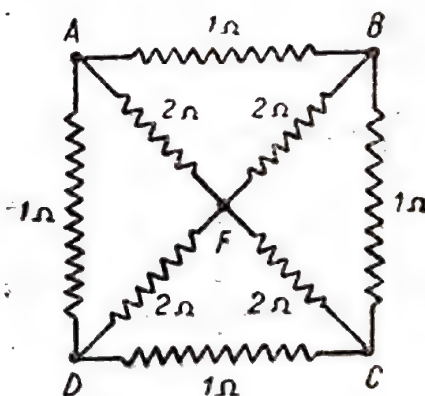


Fig. 5.5.

5.6. O punte Wheatstone (fig. 5.6) este alimentată cu curent alternativ de la o sursă de 4 V, având impedanța proprie neglijabilă. Ca instrument de zero se întrebuintează un galvanometru de rezonanță având o impedanță de 30Ω .

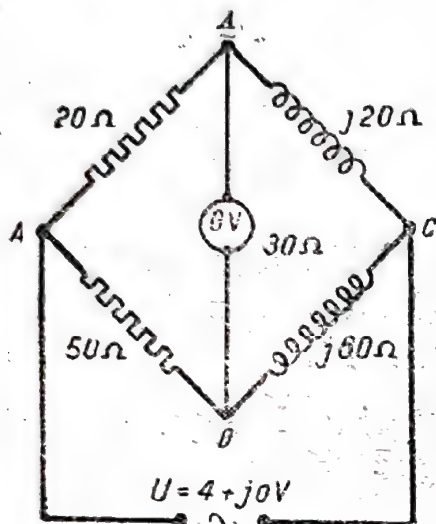


Fig. 5.6.

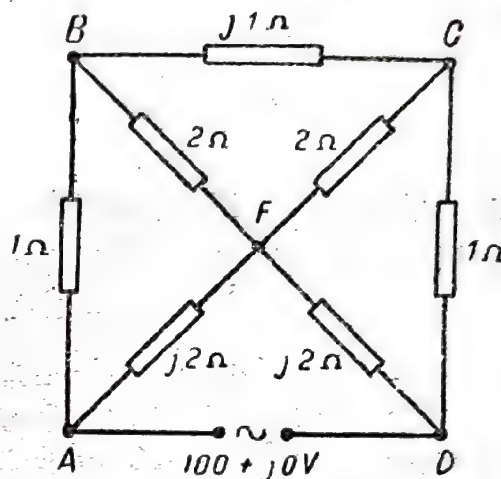


Fig. 5.7.

Să se găsească curentul în galvanometru în cazul desechilibrului, folosindu-se următoarele metode:

- Metoda transfigurării,
- Metoda curenților ciclici,
- Teorema lui Thévenin.

(IPB 1950)

5.7. Se dă circuitul din fig. 5.7. Să se determine repartiția curenților folosindu-se metoda circuitelor independente (a curenților ciclici).

(IPB 1949)

5.8. Fiind dat circuitul din figura 5.8, se cere să se determine curenții din laturi și tensiunile la

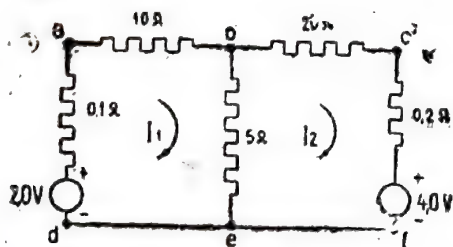


Fig. 5.8

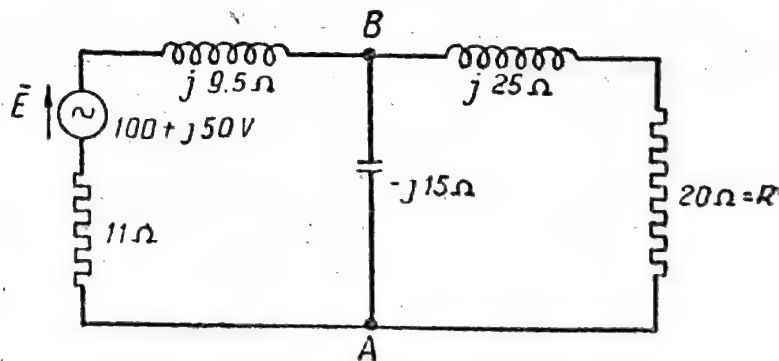


Fig. 5.9.

noduri aplicând (a) metoda directă; (b) principiul suprapunerii efectelor; (c) metoda perechilor de noduri.

5.9. Se dă rețeaua din fig. 5.8 și se cere să se determine distribuția de curenți folosind metoda curenților ciclici (a circuitelor independente).

5.10. Aceeași problemă pentru rețeaua din fig. 5.10.

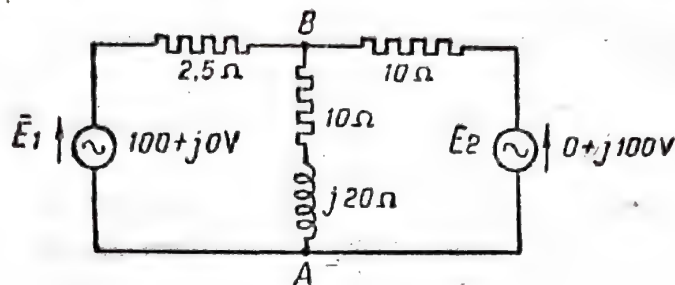


Fig. 5.10.

5.11. Aceeași problemă pentru rețeaua din fig. 5.11.

5.12. Fiind dat circuitul din figura 5.12., să se determine curenții din laturi și tensiunile la noduri prin metoda perechilor

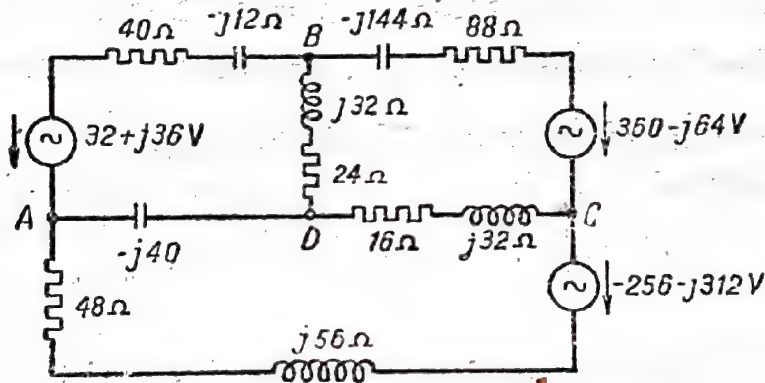


Fig. 5.11

de noduri independente aplicând (a) metoda directă; (b) metoda suprapunerii efectelor.

5.13. Se dă circuitul din fig. 5.13, format dintr'o capacitate C în paralel cu o inductanță L și totul în serie cu o

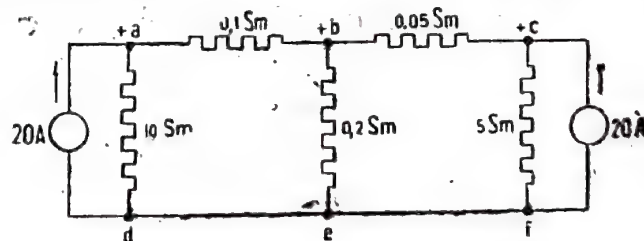


Fig. 5.12

rezistență neinductivă R , alimentat de o forță electromotoare alternativă $e = E \sin \omega t$. Se cere:

a) să se găsească cu ajutorul teoremei lui Thévenin curentul din inductanță;

b) să se verifice rezultatul printr'un calcul direct al circuitului;

c) care este valoarea curentului în cazul rezonanței?

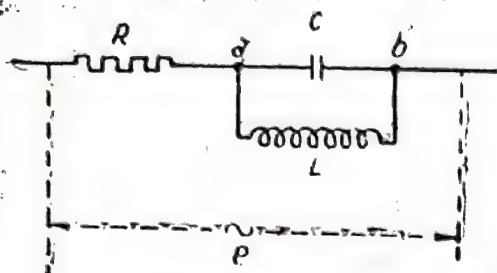


Fig. 5.13

5.14. Pentru circuitul din problema 5.9, să se determine curentul din rezistența $R = 20 \Omega$ cu ajutorul teoremei lui Thévenin.

5.15. Idem pentru condensator.

5.16. Pentru același circuit să se calculeze curentul din rezistența $R = 20 \Omega$ cu ajutorul teoremei reciprocității (a lui Maxwell).

5.17. Se dă o linie electrică trifazată, perfect simetrică și perfect izolată față de pământ, având următoarele caracteristici:

$$l = 60 \text{ km} \quad s = 50 \text{ mm}^2 \quad L = 2,35 \text{ mH/km} \\ f = 50 \text{ Hz} \quad I_2 = 500 \text{ A} \quad U_2 = 60 \text{ kV} \quad \cos \varphi_2 = 0,9 \text{ ind.}$$

Se cere să se calculeze U_1 , θ_1 , φ_1 și η .

Cunoscând aceste elemente, să se construiască pentru punctul considerat diagrama de funcționare cu doi poli de tensiune. Capacitățile sistemului se neglijează.

(IPB 1950)

5.18. Un alternator de 5000 kVA cu impedanța de $1 + j10 \Omega$ funcționează în paralel pe o bară de 10000 V și produce o f.e.m. de 11000 V. Să se găsească puterea maximă pe care o poate debita mașina și randamentul.

5.19. Un motor sincron trifazat de 1000 V, conectat în stea, având impedanța proprie (impedanța sincronă) de $0,2 + j2,2 \Omega$ pe fază, absoarbe 250 kW și produce pe fază o f.e.m. de 720 V. Să se găsească curentul de linie și factorul de putere.

5.20. Fie cuadripolul (ABCD) având parametrii:

$$\bar{A} = \sqrt{2} \angle -20^\circ, \quad \bar{B} = 10 \angle 15^\circ \Omega, \quad \bar{C} = \frac{1}{10} \angle -75^\circ \text{ S}$$

$$\bar{D} = \sqrt{1,5} \angle -10^\circ$$

Să se determine:

a) circuitul echivalent în Π ;

b) impedanța caracteristică a acestui circuit.

(IPB 1950)

5.21. Pentru cuadripolul din problema precedentă să se determine circuitul echivalent în T .

5.22. Un cablu subteran de $3 \times 150 \text{ mm}^2$ secțiune, având caracteristicile: $R = 0,121 \Omega/\text{km}$, $L = 0,7 \text{ mH}/\text{km}$ și $C = 0,32 \mu\text{F}/\text{km}$ și o lungime de 60 km, este închis pe impedanța sa caracteristică. Se cere să se afle curentul la plecare, curentul la sosire, decalajele respective și curentul de încărcare, cunoscând că acest cablu este alimentat cu o tensiune de 60 kV (50 Hz) între faze. Se neglijează conductanța, iar L și C sunt respectiv inductanța și capacitatea de serviciu a cablului.

5.23. O linie electrică aeriană trifazată are caracteristicile:

$$l = 40 \text{ km}$$

$$R = 0,260 \Omega/\text{km} \text{ și fază}$$

$$L = 1,35 \text{ mH}/\text{km} \text{ și fază}$$

$$C = 0,00085 \mu\text{F}/\text{km} \text{ și fază.}$$

Se consideră următoarea situație la sosire:

$$U_2 = 60 \text{ kV între faze} \quad I_2 = 240 \text{ A} \quad f = 50 \text{ Hz}$$

$$\cos \varphi_2 = 0,8 \text{ inductiv.}$$

Se cere să se determine U_1 , θ_1 , I_1 , φ_1 , precum și randamentul liniei.

5.24. Transmiterea de energie electrică din problema precedentă, se face printr'un cablu subteran, de aceeași secțiune ca și linia aeriană, dar pentru care $L = 0,4 \text{ mH}/\text{km}$ și fază și $C = 0,21 \mu\text{F}/\text{km}$ și fază. Pentru aceleași condiții de funcționare la sosire, se cere să se determine elementele la uzină.

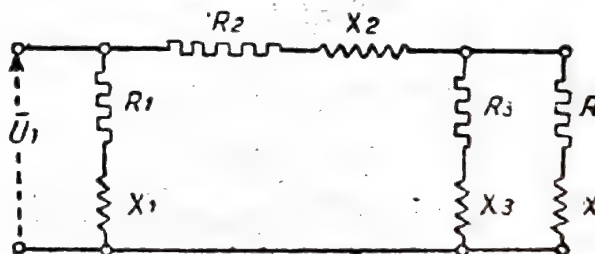


Fig. 5.25

5.25. Se dă un circuit Π având următoarele caracteristici (fig. 5.25).

$$R_1 = 5 \Omega \quad R_2 = 1 \Omega \quad R_3 = 4 + \lambda \Omega \quad R = 3 \Omega$$

$$X_1 = 0 \Omega \quad X_2 = -2 \Omega \quad X_3 = -2 + 3\lambda \Omega \quad X = 4 \Omega$$

în care λ este un număr ce poate lua orice valoare între $-\infty$ și $+\infty$.

La intrare se aplică o tensiune sinusoidală alternativă

$$u_1 = 297 \cos(\omega t + 30^\circ).$$

Se cere :

a) Locul geometric al curentului I_1 absorbit de circuitul dat. Acest loc se va determina atât analitic, cât și grafic prin inversiune arătându-se că rezultatele sunt identice prin determinarea erorii ce se face în calculul grafic față de calculul analitic.

b) Valoarea eficace și decalajul curentului I_1 față de tensiune pentru $\lambda = 0, 1$ și ∞ .

c) Valoarea impedanței, admitanței, conductanței și susceptanței pentru cele două ramuri în paralel.

d) Caracteristica $I_1 = f(\lambda)$ pentru λ cuprins între ± 5 .

5.26. Probele de mers în gol și scurtcircuit ale unui motor asincron de 190 kW, 750 rot/min, 578/1000 V, 222/129 A au dat următoarele rezultate :

$$\begin{array}{ll} P_0 = 4080 \text{ W} & P_{sc} = 7140 \text{ W} \\ I_0 = 103,9 \text{ A} & I_{sc} = 129 \text{ A} \\ U_{0\Delta} = 578 \text{ V} & U_{sc\lambda} = 136 \text{ V} \\ U_{rot\lambda} = 370 \text{ V} & \end{array}$$

Să se determine elementele circuitului echivalent.

(IPB 1949)

5.27. Să se determine elementele circuitului echivalent al motorului asincron de 100 kW, 1000 rot/min, 578/1000 V, 126,8/73 A, la care probele de mers în gol și scurtcircuit au dat următoarele rezultate :

$$\begin{array}{ll} P_0 = 3560 \text{ W} & P_{sc} = 5200 \text{ W} \\ I_0 = 50,5 \text{ A} & I_{sc} = 73 \text{ A} \\ U_{0\Delta} = 578 \text{ V} & U_{sc\lambda} = 137 \text{ V} \\ U_{rot\lambda} = 300 \text{ V} & \end{array}$$

(IPB 1949)

5.28. Un transformator trifazat de 10,5/110 kV, cu o putere de 31,5 MVA, are următoarele caracteristici :

$$\begin{array}{ll} \text{Curentul de mers în gol} & I_0 = 4\% I_n \\ \text{Pierderile la mersul în gol} & P_0 = 75 \text{ kW} \\ \text{Pierderile la mersul în scurtcircuit} & P_{sc} = 199,5 \text{ kW} \\ \text{Tensiunea de scurtcircuit} & \epsilon_{sc} = 10,5\% \end{array}$$

Se cere :

a) Să se determine cuadripolul în T echivalent acestui transformator;

b) Să se determine constantele $ABCD$ ale acestui cuadripol.

5.29. Se dă un cuadripol definit prin ecuațiile :

$$\bar{U}_1 = j 50 \bar{I}_1 - j 40 \bar{I}_2$$

$$\bar{U}_2 = j 40 \bar{I}_1 - (10 + j 40) \bar{I}_2$$

Se cere :

1) să se determine cuadripolul echivalent în T ;

2) presupunând că acest cuadripol reprezintă circuitul echivalent al unui transformator perfect ($\bar{Y} = 0$) se cere să se determine tensiunea de alimentare, în gol și în sarcină, știind că $U_2 = 10$ kV, transformatorul debitând în sarcină un curent de 400 A la un factor de putere de 0,6 inductiv.

(IPB 1951)

5.30. Un transformator de 12000/2000 V, 50 Hz are rezistențele primarului și secundarului de 1,0, respectiv 0,04 Ω și reactanțele de 6,0, respectiv 0,15 Ω .

Se cere să se găsească :

1) Tensiunea necesară în partea de înaltă tensiune pentru ca în bobinajul părții de joasă tensiune, legat în scurt-circuit, să se producă un curent de 200 A.

Această tensiune se va exprima în procente din tensiunea nominală.

2) Factorul de putere la scurt-circuit.

3) Considerând curentul de magnetizare egal cu 6% din curentul nominal, iar factorul de putere la mersul în gol deducându-se din impedanțele respective ale transformatorului, se cere să se determine cuadripolul corespunzător acestui transformator, din care se vor deduce apoi elementele circuitului T corespunzător.

(IPB 1950)

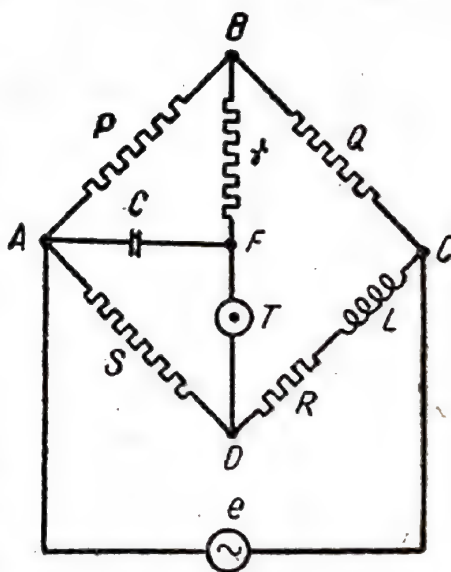


Fig. 5.31

5.31. Pentru măsurarea inductanței L și a rezistenței R a unei impedanțe necunoscute, se folosește un montaj în punte

(fig. 5.31). Puntea este în echilibru când prin aparatul de zero T nu trece niciun curent.

Se cere să se determine, aplicând metoda circuitelor independente, condiția de echilibru a punții, din care să se deducă apoi valorile lui L și R .

Aplicație: Să se determine L și R pentru cazul când echilibrul punții a fost obținut cu $P = Q = 1000 \Omega$, $S = 500 \Omega$, $r = 200 \Omega$ și $C = 2 \mu F$.

(IPB 1950)

5.32. Pentru măsurarea inductanței bobinelor se folosește un montaj de punte (fig. 5.32), valoarea inductanței căutate fiind dedusă din valoarea parametrilor punții când aceasta este echilibrată.

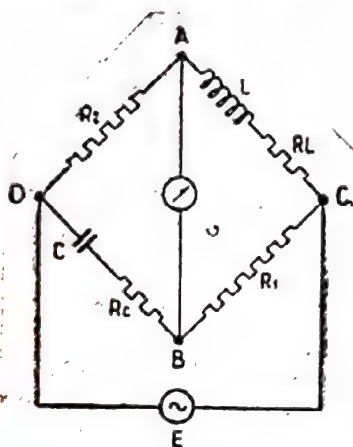


Fig. 5.32

Se cere să se determine expresia inductanței necunoscute L în funcție de parametrii C , R_c , R_1 , R_2 și R_L a punții.

5.33. Doi transformatori trifazați perfecți T_1 și T_2 de 35/10 kV având puterile aparente egale, funcționează în paralel, debitând împreună 2000 kVA cu un factor de putere $\cos \varphi = 0,8$. Cei doi transformatori au tensiunile de scurt-circuit diferite și anume: transformatorul T_1 are $u_{sc1} = 14,3\%$, iar transformatorul T_2

are $u_{sc2} = 9,21\%$. Cei doi transformatori având aceeași cădere de tensiune ohmică $RI = 6\%$, au căderile de tensiune inductive diferite, și anume, $X_1 I = 13\%$ și $X_2 I = 7\%$, indicii raportându-se la cei doi transformatori.

Se cere să se determine repartitia sarcinii între cei doi transformatori.

(IPB 1951)

5.34. Un alternator trifazat, având o tensiune la borne de 6000 V, produce la plină sarcină un curent de 964 A, lucrând supraexcitat (forța electromotoare a alternatorului este mai mare decât tensiunea la borne și anume $E = 7200$ V).



Fig. 5.35.

Știind că tensiunea de scurt-circuit a alternatorului este de 45%, se cere să se determine:

- puterea activă produsă de alternator;
- puterea reactivă produsă sau absorbită de alternator;
- factorul de putere cu care funcționează alternatorul;
- cu cât trebuie redusă excitația, în %, pentru ca puterea reactivă să-și schimbe semnul?

Se neglijează rezistența alternatorului și toate pierderile în fier, etc.

(IPB 1951)

5.35. Să se determine coeficienții cuadripolului corespunzător unei scheme formate dintr'o linie și un transformator (fig. 5.35). Coeficienții cuadripolului echivalent al transformatorului sunt $\bar{A}_1 = \bar{D}_1 = 1$; $\bar{B}_1 = 2,23 + j51,25 \Omega$; $\bar{C} = 12,1 - j91,91 \mu S$; iar cei ai cuadripolului echivalent al liniei, $\bar{A}_2 = \bar{D}_2 = 0,9904 + j0,00345$; $\bar{B}_2 = 20 + j56,6 \Omega$; $\bar{C}_2 = j345 \mu S$.

5.36. Pentru compensarea parametrilor liniilor de transmitere a energiei electrice, se folosește uneori o compensare longitudinală centrală. Studiul unei astfel de compensări se face echivalând cele două porțiuni ale liniei cu două circuite în Π , legate între ele prin elementul de compensare (fig. 5.33). Considerând această schemă ca formată din trei cuadripoli având constantele $\bar{A}_1, \bar{B}_1, \bar{C}_1, \bar{D}_1$; $\bar{A}_2, \bar{B}_2, \bar{C}_2, \bar{D}_2$; $\bar{A}_3, \bar{B}_3, \bar{C}_3, \bar{D}_3$, se cere să se determine constantele cuadripolului rezultat.

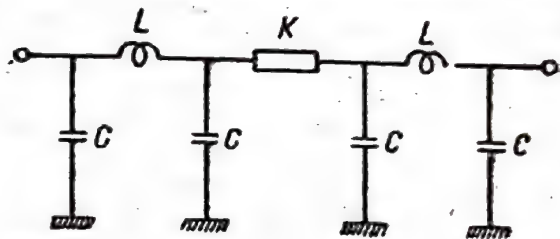


Fig. 5.36.

5.37. Să se determine coeficienții cuadripolului echivalent unui sistem, format dintr'o linie de transport și doi transformatori (fig. 5.37).

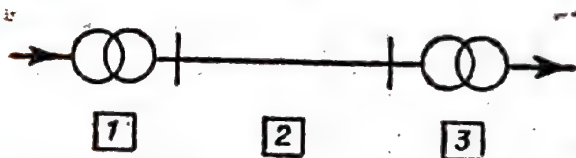


Fig. 5.37.

Coeficienții cuadripolilor echivalenți liniei și transformatorilor sunt: a) pentru transformatori, $\bar{A}_1 = \bar{A}_3 = \bar{D}_1 = \bar{D}_3 = 1$; $\bar{B}_1 = 6,5 +$

$+j66 \Omega$; $\bar{C}_1 = (4 - j40) 10^{-6} S$; $\bar{B}_3 = 5,9 + j60 \Omega$; $\bar{C}_3 = (4,4 - j44) 10^{-6} S$; b) pentru linie, $\bar{A}_2 = \bar{D}_2 = 0,9940 + j0,0015$; $\bar{B}_2 = 10 + j57 \Omega$; $\bar{C}_2 = j3,0 \cdot 10^{-4} S$.

5.38. Circuitele echivalentele transformatorilor unei instalații de transmitere de energie electrică (circuite în Γ), au următoarele caracteristici: $\bar{Z}_1 = \bar{Z}_3 = 5,4 + j103 \Omega$ și $\bar{Y}_1 = \bar{Y}_3 = (3,8 - j59,0) 10^{-6} S$ iar cel echivalent liniei: $\bar{Z}_2 = 23 + j100 \Omega$ și $\bar{Y}_2 = j8,5 \cdot 10^{-4} S$.

Se cere să se determine coeficienții cuadripolului echivalent.

5.39. Un alternator trifazat, având tensiunea la borne de 6 kV, alimentează un motor asincron printr-o linie a cărei impedanță totală pe fază este egală cu $3,2 + j4,8 \Omega$. Puterea dată de alternator este de 300 kW, cu un factor de putere 0,8. Se cere să se determine randamentul transmisiei.

5.40. Tensiunea la cele două extremități ale unei linii trifazate de transport de energie electrică are aceeași valoare eficace $U = 6$ kV, iar curentul pe linie este de 140 A. Impedanța totală a liniei este $Z = 1,8 + j2,4 \Omega$. Care este randamentul transmisei? Se presupune linia perfectă și se neglijează capacitatea.

5.41. Un motor sincron supraexcitat lucrează la extremitatea unei linii monofazate a cărei impedanță totală este $\bar{Z} = 3,2 + j4,8 \Omega$. Tensiunea la barele uzinei este de 6000 V și motorul absoarbe o putere de 450 kW la un factor de putere egal cu 0,86. Se cere să se determine care este tensiunea la bornele motorului sincron. Se presupune linia fără conduc-tanță și se neglijează capacitatea ei.

5.42. Un motor de inducție (asincron) și un motor sincron supraexcitat sunt legate în paralel la o rețea de 380/220 V, 50 Hz. Puterea motorului sincron este de 60 kVA, iar motorul asincron absoarbe o putere de 49,5 kW la un factor de putere egal cu 0,86. Excitația motorului sincron trebuie astfel aranjată încât factorul de putere al întregului sistem să fie egal cu 1.

Se cere să se determine care este cel mai mic factor de putere pe care îl poate compensa motorul sincron.

5.43. La extremitatea unei linii electrice perfecte, trifazate, a cărei impedanță totală pe fază este $\bar{Z} = 0,1 + j0,2 \Omega$, se conectează un motor asincron și o sarcină neinductivă ce absoarbe 100 A pe fază. La pornire, motorul absoarbe 30 kW

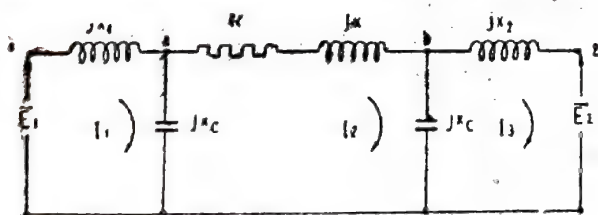


Fig. 5.44

la un factor de putere egal cu 0,4. Tensiunea la utilizare trebuie să fie de 380/220 V. Se cere să se determine cât trebuie să fie tensiunea la plecare în momentul pornirii motorului.

5.44. Cuadripolul din figura 5.44. reprezintă circuitul echivalent al unei linii de transport de energie electrică. Se cere să se determine.:

- Circuitul echivalent în T .
- Circuitul echivalent în π .
- Constantele generale ale cuadripolului.

Aplicație numerică. $R = 5,66 \Omega$; $X = 81,8 \Omega$; $X_1 = X_2 = 240 \Omega$; $X_c = -3790 \Omega$.

5.45. Un potențiomtru, ca cel reprezentat în figura 5.45, poate fi asimilat cu un cuadripol. Rezistența totală a potențiometrului este R . Rezistența între punctele a și b este nR . Să se determine variația coeficienților cuadripolului în funcție de n .

5.46. Să se determine coeficienții cuadripolului din figura 5.46 în care: $R_1 = 400 \Omega$, $R_2 = 500 \Omega$; $R_3 = 1000 \Omega$ și $R_4 = 4000 \Omega$.

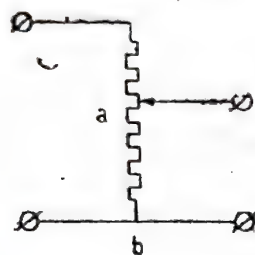


Fig. 5.45

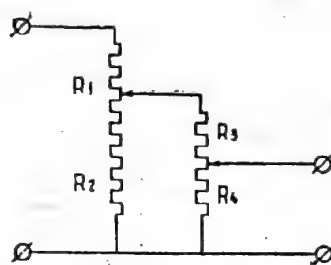


Fig. 5.46

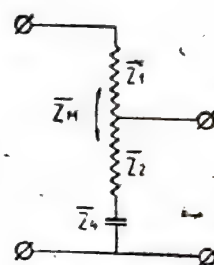


Fig. 5.47

5.47. În tehnica telecomunicațiilor, în punctele unde se leagă linii aeriene cu cabluri subterane se utilizează un montaj format din autotransformatori în serie cu un condensator (fig. 5.47). Să se găsească coeficienții cuadripolului echivalent.

Aplicație numerică: $\bar{Z}_1 = \bar{Z}_2 = 10 + j60 \Omega$; $\bar{Z}_m = j30 \Omega$; $\bar{Z}_3 = -j90 \Omega$.

5.48. Pentru determinarea coeficienților A , B , C și D ai schemei echivalente a unei linii simetrice de transport s'au făcut probe de mers în gol și de scurtcircuit.

Inercarea de mers în gol a dat:

$$U_{10} = 30 \text{ kV}; I_{10} = 6 \text{ A}; P_{10} = 27 \text{ kW}; \varphi_{10} < 0.$$

Inercarea de scurtcircuit:

$$U_{1K} = 4,5 \text{ kV}; I_{1K} = 30 \text{ A}; P_{1K} = 69 \text{ kW}; \varphi_{1K} > 0.$$

Să se determine coeficienții schemei echivalente.

5.49. Doi cuadripoli sunt conectați după schema indicată în figura 5.49 (conectare în serie).

Coeficienții primului cuadripol sunt A_1 , B_1 , C_1 , D_1 , iar al celui de al doilea A_2 , B_2 , C_2 , D_2 .

Să se găsească coeficienții cuadripolului echivalent. Ce devin valorile acestor coeficienți dacă $A_1 = A_2 = A$; $B_1 = B_2 = B$; $C_1 = C_2 = C$; $D_1 = D_2 = D$?

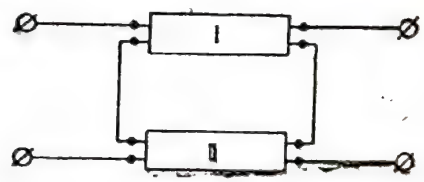


Fig. 5.49

5.50. Doi cuadripoli sunt legați în serie — paralel (fig. 5.50). Să se determine coeficienții cuadripolului echivalent dacă se cunosc coeficienții fiecărui cuadripol în parte, $A_1 B_1 C_1 D_1$ și $A_2 B_2 C_2 D_2$.

Ce devin acești coeficienți dacă cuadripolii sunt identici?

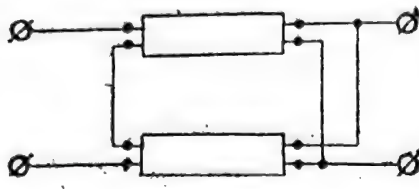


Fig. 5.50

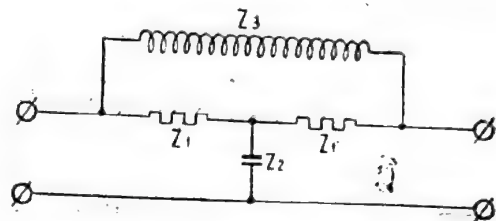


Fig. 5.52

5.51. Care este puterea dată unui consumator, alimentat printr'un sistem de transport, coeficienții cuadripolului echivalent al schemei de transport fiind $\bar{A} = 1,02 + j 0,002$; $\bar{B} = 0,06 + j 0,08 \Omega$; $\bar{C} = -j 0,025 S$; $\bar{D} = 0,98 - j 0,0034$ dacă tensiunea la sursă este $U_1 = 220 V$, puterea consumată de întreg sistemul $S_1 = 17,6 kW$ iar $\cos \varphi_2 = 0,8$, $\varphi_1 > 0$.

5.52. Să se determine elementele circuitului în Π echivalent cuadripolului de tip punte din fig. 5.52 în care $Z_1 = 20 \Omega$; $\bar{Z}_2 = -j 20 \Omega$ și $\bar{Z}_3 = j 20 \Omega$.

5.53. Printr'o linie cu dublu circuit se transportă energie la un consumator. Tensiunea receptorului este $U_2 = 10 kV$, puterea consumată de receptor $P_2 = 500 kW$ pentru $\cos \varphi_2 = 0,8$ ($\varphi_2 < 0$). Reprezentând linia sub forma unui cuadripol echivalent (fig. 5.53) ai cărui parametri sunt $r = 20 \Omega$; $x = 40 \Omega$; $x_0 = -200 \Omega$; să se determine tensiunea U_1 la generator, curentul I_1 și puterea P_1 .

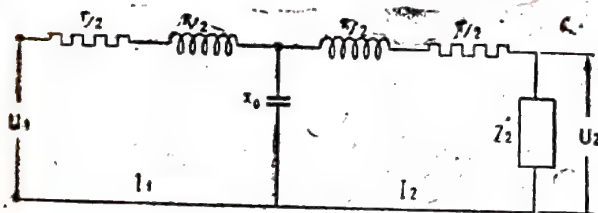


Fig. 5.53

coeficientul de propagare $\gamma = 0,13 + j 0,18$ și impedanța caracteristică $\bar{Z} = 480 - j 30 \Omega$. Curentul I_1 , puterea P_1 și tensiunea U_1 la bornele generatoare, sunt respectiv $I_1 = 160 A$; $P_1 = 170 \cdot 10^3 kW$, $U_1 = 115 kV$ ($\varphi_1 > 0$). Să se calculeze curentul I_2 , tensiunea U_2 , puterea P_2 la capătul receptor, randamentul liniei η și $\cos \varphi_2$ al receptorului.

5.55. Montajul reprezentat în figura 5.55 permite să se ia din linia de transport de înaltă tensiunea o putere oarecare,

prin intermediul unui potențiomtru capacitiv. Parametrii circuitului sunt: $C = 0,05\mu\text{F}$, $C_1 = 0,5\mu\text{F}$, bobina de inductanță are caracteristicile $L = 17\text{ H}$ și $r = 500\ \Omega$. Tensiunea pe fază a liniei este $U = \frac{100}{\sqrt{3}}\text{ kV}$, frecvența $f = 50\text{ Hz}$.

Să se calculeze curentul de sarcină I_2 , tensiunea la utilizare U_2 , puterea P_2 consumată în receptor, randamentul η și $\cos \varphi$ al întregii instalații, dacă $\bar{Z}_2 = 600 + j 550\ \Omega$. Să se construiască diagrama vectorială a curenților și tensiunilor.

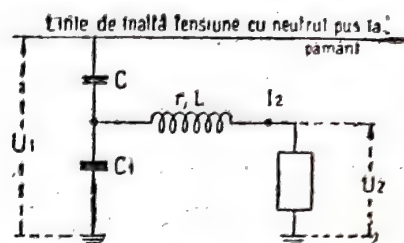


Fig. 5.55

5.56. La bornele de intrare ale unui cuadripol Q oarecare este legat în lanț un cuadripol în T format din rezistențe egale cu $2\ \Omega$ fiecare (fig. 5.56). Cuadripolul este caracterizat prin următoarele elemente:

Bornele 3 și 4 de ieșire fiind deschise,

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{E_2'}{I_1'} = 2 \text{ numeric};$$

Bornele 3 și 4 de ieșire fiind legate în scurtcircuit

$$\frac{I_1}{I_2} = 2.$$

Se cere să se determine:

- Constantele generale ale cuadripolului Q .
- Circuitul T echivalent al cuadripolului Q .
- Circuitul echivalent în T și în Π al sistemului de cuadripoli în lanț.
- Constantele generale ale cuadripolului rezultat.

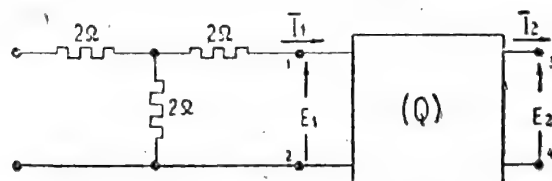


Fig. 5.56

5.57. Fie un sistem de transmitere a energiei electrice reprezentat printr'un cuadripol general Q . Să se arate, prin aplicarea teoremei lui Thévenin acestui circuit, că, sistemul de transmitere poate fi reprezentat prin circuitul echivalent dat

în figura 5.57, dacă, pentru orice valoare a sarcinii \bar{Z}_s , raportul tensiunilor este dat de relația

$$\frac{\bar{E}_1}{\bar{E}_2} = \bar{A} + \frac{\bar{B}}{\bar{Z}_s}$$

5.58. Un sistem de transmitere a energiei electrice este reprezentat printr'un cuadripol având constantele \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} , \bar{D} . Să se arate că sistemul poate fi reprezentat prin circuitele echivalente din figura 5.58. Transformatoarele din scheme sunt fără pierderi.

5.59. O linie trifazată de transport de energie electrică de 60 km, are următoarele caracteristici electrice: $U_2 = 35$ kV, $R = 0,26 \Omega/\text{km}$ și fază;

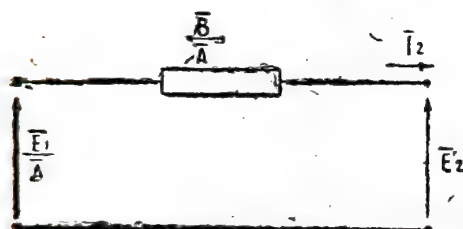


Fig. 5.57

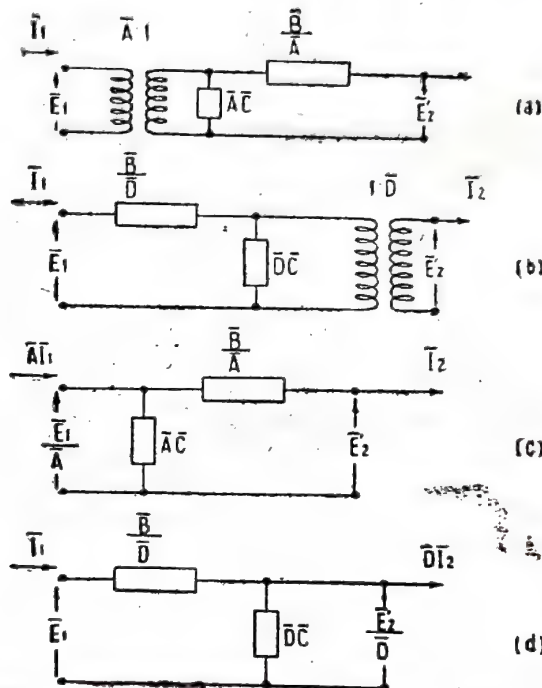


Fig. 5.58

$X = 0,4 \Omega/\text{km}$ și fază. Linia fiind perfect simetrică și izolată, alimentează o regiune care absoarbe puterea cu un factor de putere egal cu 0,707. În aceste condiții tensiunea de alimentare a liniei este numai cu 20% mai mare decât tensiunea de sosire.

Se cere:

- Puterea activă transmisă de linie.
- Puterea reactivă transmisă de linie.
- Randamentul liniei.
- Factorul de putere la plecare.
- Pierderile de putere activă și reactivă pe linie.
- Variația randamentului liniei când factorul de putere la sosire variază între 1 și 0.

(IPB 1951)

5.60. Circuitul echivalent simplificat al unei faze a unei linii de transport a energiei electrice de înaltă tensiune este reprezentat prin schema din figura 5.60. Această linie leagă

centrala generatoare E cu o stație de alimentare a unui centru Z_s și de un mare combinat industrial Z_u . Factorul de putere al întregului sistem este îmbunătățit în stație cu ajutorul unui motor sincron, reprezentat în schemă prin admitanța R_G, C_0 .

Se cere să se determine puterea dată de centrala generatoare și factorul de putere corespunzător.

Aplicație numerică. $E = 60/\sqrt{3}$ kV; $f = 50$ Hz; $R_1 = 8,2 \Omega$; $L_1 = 65$ mH; $C_L = 0,5 \mu\text{F}$; $\bar{Z}_u = 705 + j232 \Omega$; $R_2 = 23,4 \Omega$; $L_2 = 68$ mH; $C_0 = 10 \mu\text{F}$; $R_c = 12500 \Omega$; $\bar{Z}_s = 165 + j103 \Omega$.

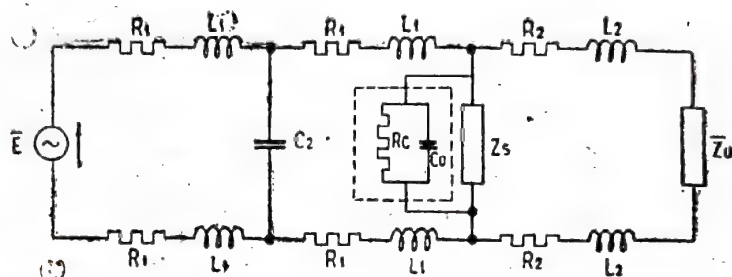


Fig. 5.60

5.61. Doi generatori sincroni alimentează un receptor compus din 2 ramuri legate în triunghi (fig. 5.61)

$$\bar{Z}_{12} = (4 + j4); \bar{Z}_{13} = \bar{Z}_{23} = (29 + j38).$$

Forța electromotoare a generatorilor și impedanțele lor interioare sunt respectiv $\bar{E}_1 = 200$ V; $\bar{E}_2 = 200 e^{j\frac{\pi}{3}}$ V;

$\bar{Z}_1 = \bar{Z}_2 = (1 + j2) \Omega$;

$\bar{Z}_1 = \bar{Z}_2 = (1 + j2) \Omega$;

Să se calculeze curenții $I_1, I_{12}, I_{23}, I_{31}, I_2$ și puterea dată de fiecare generator rețelei.

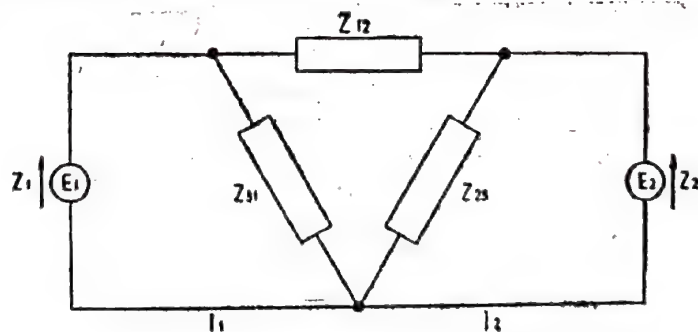


Fig. 5.6

5.62. Un sistem format din două mașini sincrone conectate între ele printr-un cablu poate fi reprezentat prin circuitul

echivalent din figura 5.62. Astfel, o mașină sincronă, funcționând în regim permanent, poate fi reprezentată printr-o forță electromotoare complexă \bar{E} în serie cu o reactanță X_s . O mașină sincronă funcționează ca motor dacă vectorul tensiunii la borne \bar{U}_t este decalat înaintea vectorului forței electromotoare \bar{E} ; ea funcționează ca generator în cazul contrariu. În circuitul din figura 5.62. mașina 1 funcționează ca generator producând energie electrică iar mașina 2 ca motor, absorbind energia produsă de prima mașină. În acest caz \bar{E}_1 este înaintea tensiunii \bar{E}_2 .

Se cere să se determine :

- Ecuatiile de funcționare ale sistemului.
- Puterea la bornele de intrare și de ieșire ale circuitului echivalent în funcție de unghiul de defazaj $\theta = \Psi_1 - \Psi_2$ al celor două forțe electromotoare \bar{E}_1 și \bar{E}_2 .
- Valoarea minimă a unghiului θ pentru ca sistemul să funcționeze în condițiile enunțului.

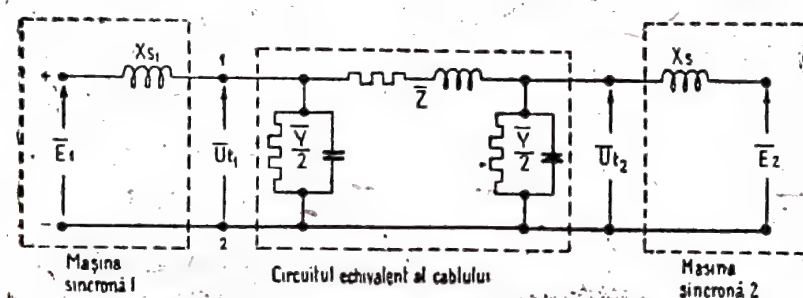


Fig. 5.62

Ce se întâmplă dacă unghiul Ψ_1 este mult mai mare decât Ψ_2 , adică dacă unghiul θ este mult mai mare decât valoarea minimă necesară? Mașina 1 funcționează ca generator sau ca motor?

De rezolvat această problemă prin metoda perechilor de noduri.

5.63. Pentru transformarea unei distribuții de energie electrică din distribuție cu tensiune constantă în distribuție cu curent constant, se utilizează un montaj în punte (fig. 5.63). În acest montaj, alimentându-se una din diagonale cu o tensiune constantă, se obține în cealaltă un curent constant, și invers. Rezistența R a bobinei de inducție se face cât mai mică posibil. Dacă la bornele 2-2' este conectată o sarcină de impedanță \bar{Z}_s , se cere :

- Expresia admitanței de transfer $\bar{Y}_{12} = \frac{\bar{I}_2}{\bar{E}_1}$ între sursa \bar{E} și sarcina \bar{Z}_s .

(b) Să se arate că, în cazul când $R = 0$, curentul prin impedanță \bar{Z}_s este independent de valoarea acestei impedanțe.

(c) În cazul când $R = 0$, să se arate că dacă se alimentează sistemul la bornele 1—1' cu un curent constant, la bornele 2—2' apare o tensiune constantă.

(d) Să se determine admitanța aparentă la bornele de alimentare 1—1', bornele de utilizare fiind scurtcircuitate.

(e) În aceleași condiții să se determine admitanța de transfer a montajului.

5.64. Un cuptor electric cu arc are pe fiecare fază rezistența $R_{fază} = 0,25 \cdot 10^{-3} \Omega$ și este alimentat de la un transformator prin trei conductori de cupru $\left(\rho = \frac{1}{57 \cdot 10^4} \Omega \text{ cm} \right)$

având secțiunea de 50000 mm^2 , diametrul 300 mm și lungimea 10 m . Distanța între faze 3 m . Tensiunea la bornele transformatorului este de 500 V ; transformatorul are conexiunea stea. Neglijând impedanțele transformatorului, să se găsească curenții în electrozii cuptorului și sarcina [(puterea activă) pe fiecare fază a transformatorului.

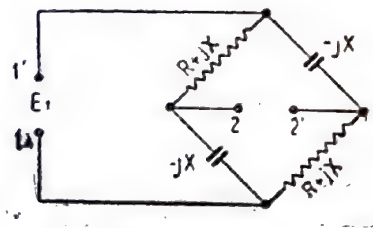


Fig. 5.63

PARTEA II

STUDIUL REGIMULUI DEFORMANT

6. STUDIUL UNDELOR COMPLEXE

— Să se transforme funcțiile ce urmează în funcții sinusoidale cu amplitudine pozitivă și defazaj mai mic ca 180° :

6.1. $y = 120 \sin(\omega t - 610^\circ)$

6.2. $y = -100 \sin(\omega t - 30^\circ)$

6.3. $y = -150 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$

6.4. $y = 220 \cos(\omega t - 20^\circ)$

6.5. $y = -380 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$

— Să se determine decalajul dintre funcțiile:

6.6. $y_1 = 100 \sin(\omega t - 38^\circ)$

$y_2 = 120 \sin(\omega t - 25^\circ)$

6.7. $y_1 = 5 \cos(\omega t - 15^\circ)$

$y_2 = 120 \sin(\omega t - 120^\circ)$

6.8. $u = 120 \sin(\omega t - 120^\circ)$

$i = 5 \cos \omega t$

6.9. $y_1 = 100 \sin(\omega t + 15^\circ)$

$y_2 = 120 \sin(\omega t - 120^\circ)$

6.10. $y_1 = 6 \sin(\omega t - 120^\circ)$

$y_2 = -10 \sin(\omega t - 30^\circ)$

— Să se determine decalajul față de origină a armonicelor:

6.11. $y_3 = 5 \sin(3\omega t - 33^\circ)$

6.12. $y_5 = 2 \cos(5\omega t - 20^\circ)$

6.13. $y_4 = -3 \cos(4\omega t - 30^\circ)$

6.14. $y_{17} = -1,2 \sin(17\omega t - 86^\circ 30')$

— Să se transforme armonicile:

6.15. $y_3 = 12 \sin 3(\omega t - 70^\circ)$

6.16. $y_7 = 100 \sin(7\omega t + 212^\circ)$

6.17. $y_{11} = 5 \sin 11(\omega t - 25^\circ)$

6.18. $y_5 = 2 \cos 5(\omega t + 30^\circ)$

— Să se determine decalajul dintre armonicile:

6.19. $y_3 = 12 \sin 3(\omega t - 42^\circ)$

$y_5 = 10 \sin(5\omega t - 5^\circ)$

6.20. $y_2 = 2 \sin 2\omega t$

$y_3 = 3 \sin 3(\omega t + 18^\circ)$

6.21. $y_{11} = 22 \sin 11(\omega t - 3^\circ)$

$y_{13} = 18 \sin 13(\omega t - 43^\circ)$

— Să se compună armonicile

6.22. $y_3' = 3 \sin(3\omega t + 15^\circ)$ cu $y_3'' = 5 \sin 3(\omega t + 8^\circ)$

6.23. $y_1' = 120 \cos(\omega t + 10^\circ)$ cu $y_1'' = 128 \sin(\omega t - 15^\circ)$

- 6.24. $y_5' = 2 \cos 5(\omega t - 1^\circ)$ cu $y_5'' = 3 \sin(5\omega t + 7^\circ)$
 6.25. $e = 120 \sin \omega t + 3 \sin 17 \omega t + 3 \sin(19 \omega t + 180^\circ)$
 6.26. $e = 220 \sin \omega t + 2 \sin 17 \omega t + 2 \sin 19 \omega t$
 6.27. $i = 5 \sin \omega t + 2 \sin(11 \omega t + 16^\circ) + 2 \sin(13 \omega t + 6^\circ)$
 6.28. $e = E_n \sin n \omega t + E_n \sin(n + 4) \omega t$
 6.29. $i = 2 \sin 2 \omega t + 3 \sin 4 \omega t$
 6.30. $i = 3 \sin 4 \omega t + 2 \sin(6 \omega t - 180^\circ)$
 6.31. $e = 15 \sin(3 \omega t + 45^\circ) + 10 \sin(5 \omega t + 135^\circ)$
 6.32. $i = 2 \sin(2 \omega t + 30^\circ) + 3 \sin(4 \omega t - 30^\circ)$
 6.33. $i = 5 + 2 \sin(2 \omega t + 30^\circ) + \sin(4 \omega t - 15^\circ)$

— Să se construiască diagrama polară a următoarelor funcții :

6.34. $e = 100 \sin \omega t + 20 \sin 3(\omega t + \alpha)$ pentru $\alpha = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ și 120° .

6.35. $e = 100 \sin \omega t + 20 \sin 5(\omega t + \beta)$ pentru $\beta = 0^\circ, 18^\circ, 36^\circ, 54^\circ$ și 72°

6.36. Să se construiască curba polară a unei unde dreptunghiulare.

6.37. Idem pentru unda triunghiulară.

6.38. Idem pentru unda trapezoidală.

6.39. Să se studieze forma curbei

$$e = 100 \sin \omega t + 50 \sin(2 \omega t - \varphi)$$

pentru diferite valori ale unghiului φ cuprinse între 0 și 2

6.40. Aceiași chestiune pentru curba

$$i = 75 + 100 \sin \omega t + 50 \sin 3 \omega(t + \theta),$$

θ variind între 0 și T .

7. ANALIZA ARMONICĂ

7.1. Să se descompună în armonice funcția formată dintr'un segment de dreapta AB între 0 și 2π (fig. 21), de ecuație

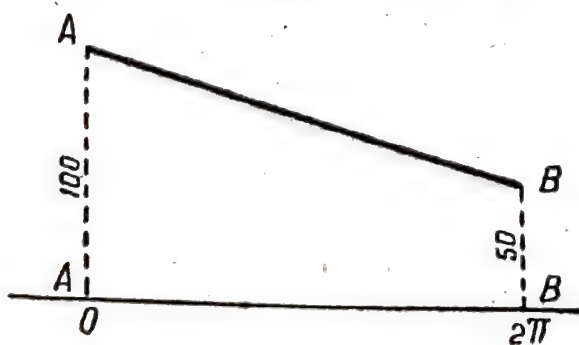


Fig. 7.1

$$y = -\frac{25}{\pi} x + 100$$

7.2. O funcție nesinusoidală este formată dintr'un arc unic de parabolă între 0 și 2π , având ecuația

$$y = \frac{Y}{\pi^2} x (2\pi - x).$$

Să se descompună în armonice.

7.3. Să se descompună în armonice funcția din figura 7,3 formată din două drepte : între 0 și $\frac{\pi}{2}$ dreapta AB de ecuația $y = \frac{2Y}{\pi} x$ și între $\frac{\pi}{2}$ și 2π dreapta $B'C$ de ecuație $y = 0$.

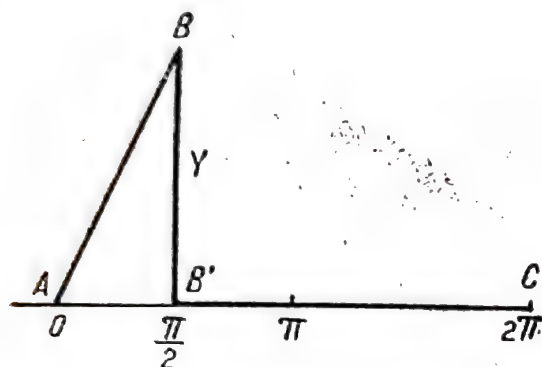


Fig. 7.3

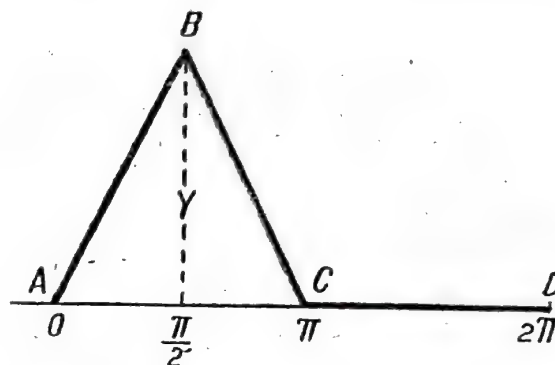


Fig. 7.4

7.4. Să se descompună în armonice funcția formată între 0 și π de un triunghi isoscel ABC de înălțime Y și între π și 2π de dreapta CD având ecuația $y = 0$ (fig. 7.4).

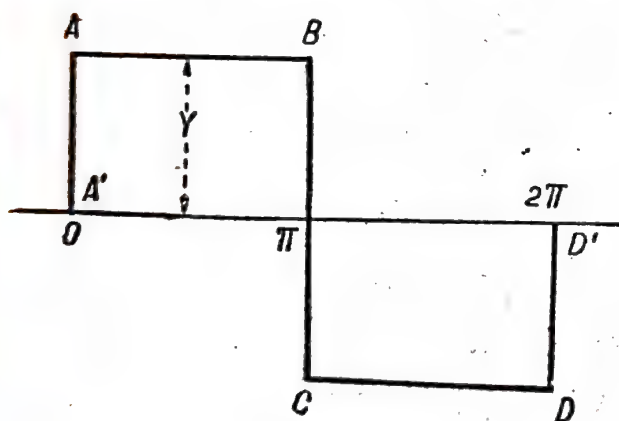


Fig. 7.5

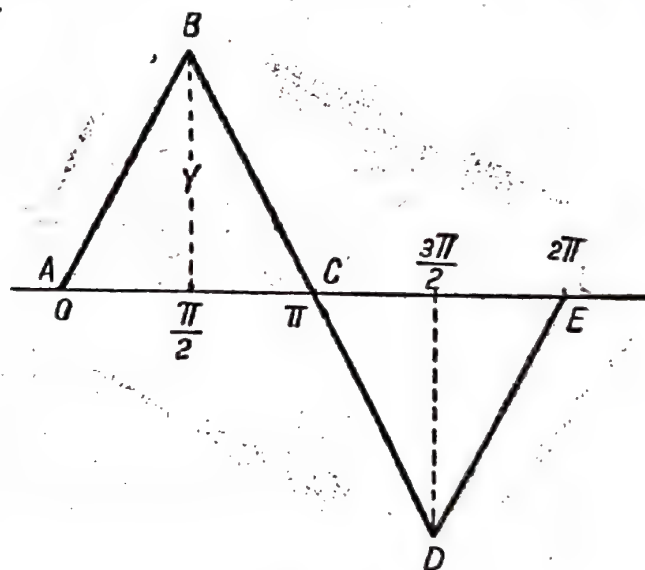


Fig. 7.6

7.5. Se dă funcția formată din două drepte și anume, între 0 și π de dreapta AB de ecuația $y = Y$ și între π și 2π de dreapta CD de ecuație $y = -Y$. Se cere să se descompună în armonice (fig. 7.5).

7.6. Să se descompună în armonice funcția nesinusoidală formată din triunghiuri isoscele de înălțime Y . (fig. 7.6).

7.7. Să se descompună în armonice funcția nesinusoidală formată din trapeze (fig. 7.7).

7.8. Se dă funcția nesinusoidală formată din două parabole, și anume, între 0 și π , de parabola având ecuația

$$y = \frac{4Y}{\pi^2} x (\pi - x)$$

iar între π și 2π , de parabola având ecuația

$$y = -\frac{4Y}{\pi^2} x (\pi - x)$$

Se cere să se descompună în armonice.

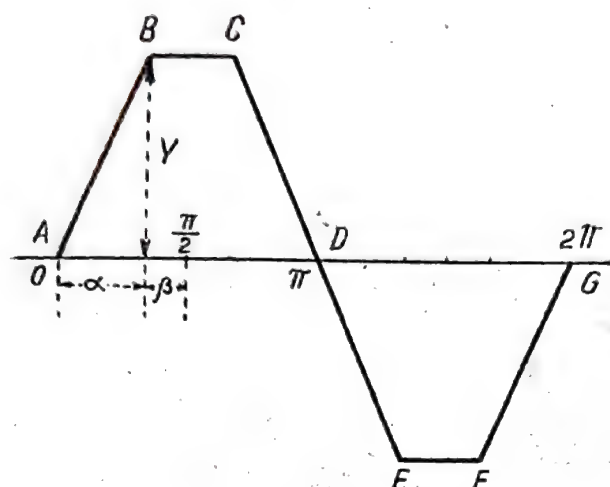


Fig. 7.7

7.9. Tensiunea dată de un redresor monofazic simplu

este formată între 0 și π de o sinusoidă de ecuație $y = Y \sin x$, iar între π și 2π de dreapta de ecuație $y = 0$. Se cere să se descompună în armonice această curbă de tensiune.

7.10. Aceeași problemă pentru curba de tensiune a unui redresor monofazic care redresează ambele semiperioade, și care este formată din două sinusoidă identice.

7.11. Să se verifice prin metoda grafică a lui Krug că o curbă electrotehnică nu are decât armonice impare.

7.12. Unda de tensiune a unui alternator este nesinusoidală și are forma unui dreptunghi de bază $T/2$ și înălțimea U , având suprapus un triunghi isoscel. Tensiunea maximă a undei fiind $U_1 = 2U$, se cere

- descompunerea în serie Fourier;
- valoarea eficace;
- rezidiul deformant;
- coeficientul de distorsiune.

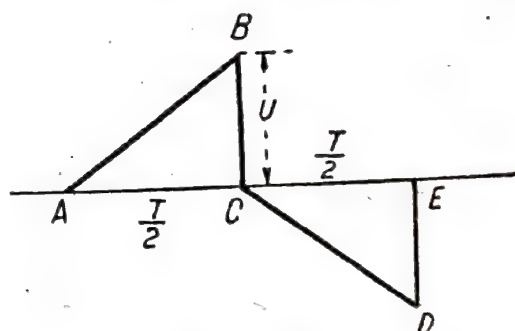


Fig. 7.13

7.13. Aceeași problemă pentru unda unui alternator care este formată din două triunghiuri dreptunghice cu o catetă egală cu $T/2$ și cealaltă catetă egală cu U (fig. 7.13).

7.14. Se dă oscilograma din fig. 7.14, și se cere :

a) Să se facă analiza armonică a acesteia folosind metoda ordonatelor echidistante și cu ajutorul cartoanelor ajurate.

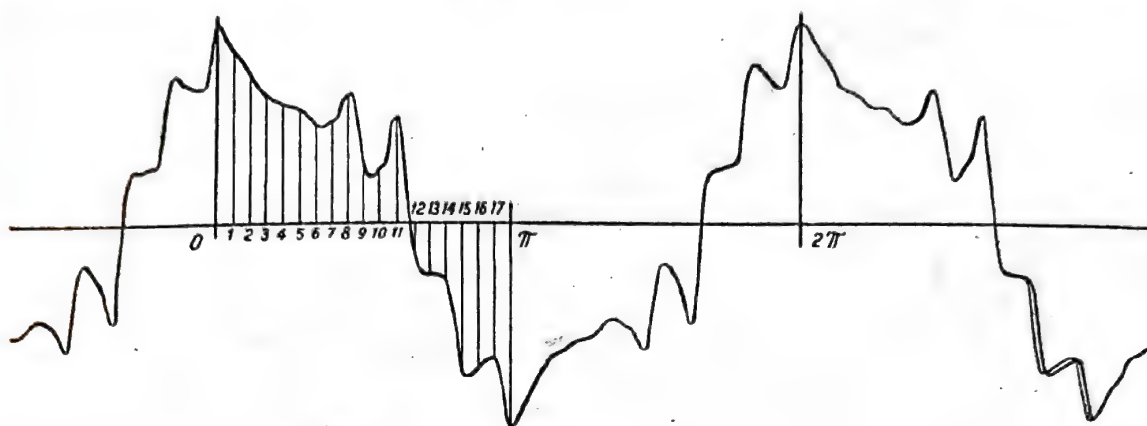


Fig. 7.14

Perioada se va împărți în 36 părți egale. Scara oscilogramei este $2 \text{ A} = 1 \text{ mm}$.

b) Reprezentarea grafică a rezultatului analizei armonice, care se va pune sub forma

$$i = \sum C_n \sin (n \omega t - \varphi_n),$$

figurându-se pe desen decalajele $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.

c) Curba rezultantă, care se va obține prin sumarea armonicelor dela punctul precedent și care se va compara cu curba analizată, în care scop aceasta se va trasa pe aceeași diagramă.

d) Calculul analitic și grafic al intensității eficace.

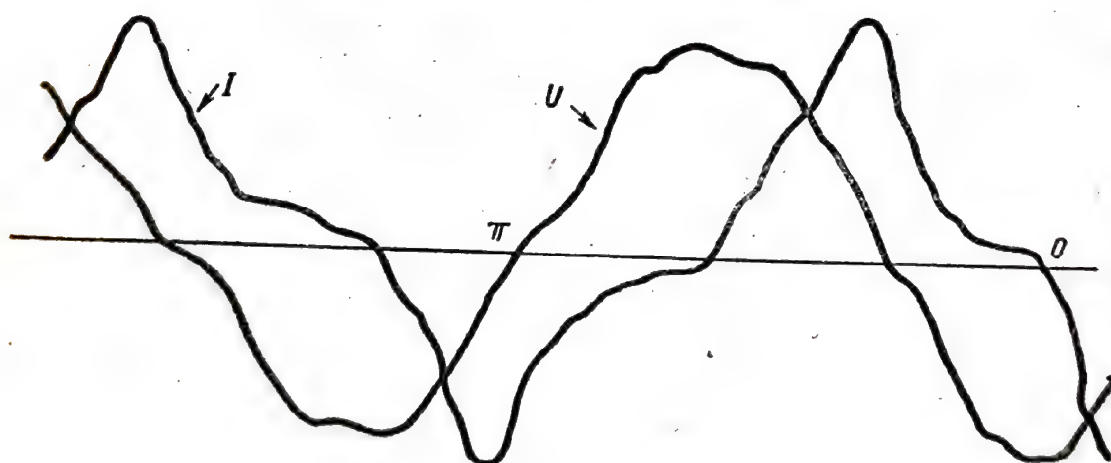


Fig. 7.15

7.15. Un regim deformant are ambele curbe, de tensiune și de curent, deformate, așa după cum se vede în oscilograma din fig. 7.15 $U_d = 150 \text{ V}$ și $I_d = 5 \text{ A}$.

Se cere :

a) analiza armonică a curbelor de tensiune și curent, utilizându-se metoda ordonatelor echidistante și folosind ca metodă de calcul tabelele de calcul;

b) să se determine din analiza armonică efectuată :

- valoarea eficace;
- reziduiul deformant;
- coeficientul de distorsiune;

c) să se calculeze, din analiza armonică :

- puterea activă;
- puterea reactivă;
- puterea deformantă;
- puterea aparentă;
- eroarea de determinare

a puterii aparente în raport cu cea măsurată direct cu aparatele de măsură;

d) să se determine valoarea eficace prin metoda grafică și să se compare cu aceea obținută prin calcul.

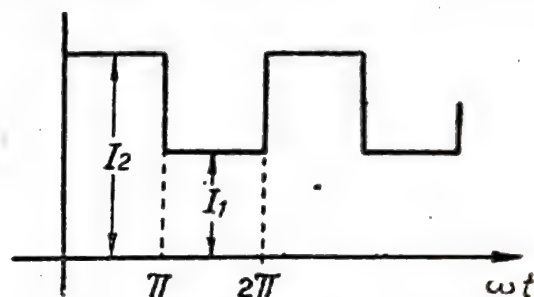


Fig. 7.16

7.16. Se cere să se descompună în serie Fourier curba semnalelor telegrafice (fig. 7.16) în cazul semnalizării periodice de puncte.

7.17. Aceeași problemă pentru curba curentului din fig. 7.17 și să se calculeze valoarea eficace : a) folosind seria obținută; b) fără a folosi seria obținută.

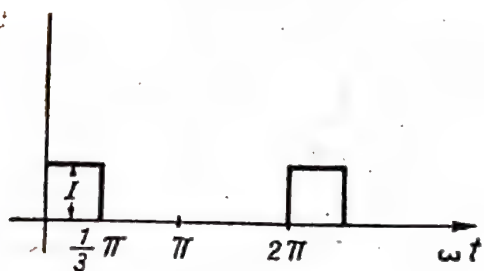


Fig. 7.17

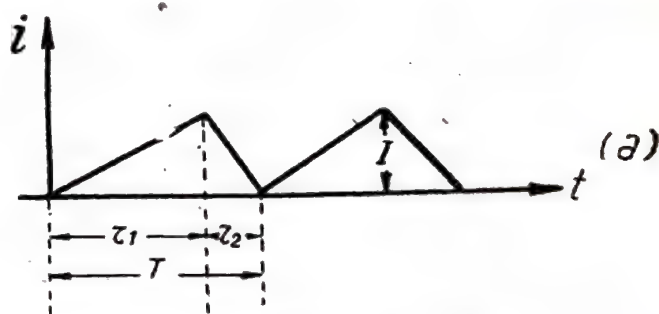


Fig. 7.18

7.18. Un circuit format dintr'o rezistență R în serie cu o inductanță L , este străbătut de un curent alternativ a cărui curbă este dată în fig. 7.18,

Fără a descompune această curbă în armonice, să se determine curba tensiunii aplicate circuitului.

7.19. Să se descompună în armonice curba tensiunii a cărei oscilogramă este formată dintr'o jumătate de sinusoidă trunchiată (fig. 7.19).

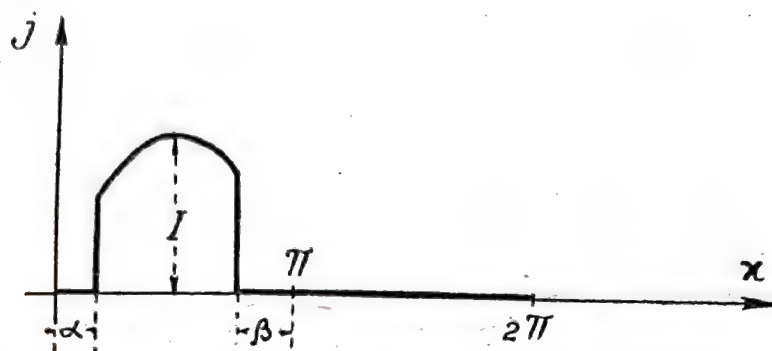


Fig. 7.19

7.20. Să se determine grafic prima, a treia și a cincea armonică a unei curbe de curent, simetrică față de de axa timpurilor, definită prin amplitudinile măsurate din 15° în 15° , prima fiind la $t = 0$ și ultima la $t = 180^\circ$, $i = 0, 15, 20, 18, 15, 32, 45, 50, 45, 50, 45, 37, 21$ mA.

7.21. Oscilograma tensiunii unui redresor, care redresează ambele alternanțe, este formată din două sinusoides trunchiate și se obține din figura 7.19. construind și în intervalul $\pi - 2\pi$ o curbă identică cu aceea din intervalul $0 - \pi$. Se cere să se descompună în serie armonică această curbă de tensiune.

7.22. Curba de tensiune a unui alternator la care bobinajul este așezat în creștături are forma unei scări cu trei trepte și cu regiune de ordonată nulă. Lățimea și înălțimea diverselor trepte sunt: treapta de ordonată nulă 2α ; treapta întâia β și X ; treapta doua γ și Z ; treapta treia 2δ și W . Amplitudinea maximă a curbei este $X + Z + W = Y$. Primul sfert de perioade se găsește la absciza $(\alpha + \beta + \gamma + \delta)$. Se cere să se deseneze curba și să se descompună în serie Fourier.

7.23. Curba de tensiune a unui alternator cu indusul fără creștături, la care lățimea unei bobine este mai mare decât pasul polar are forma unei linii trapezoidale frânte, fără regiune de ordonată nulă. Pornind din origină, primul segment de dreaptă este ipotenuza unui triunghi dreptunghic având catetele α (pe axa abscizelor) și X (în ordonată); al doilea segment la fel, catetele fiind β și Z ; al treilea segment este orizontal de lungime 2γ . Ordonata maximă este $Y = X + Z$. Se cere să se deseneze curba și să se descompună în serie armonică.

7.24. Din rezultatele obținute în problema precedentă, să se deducă termenul general al curbelor în trapez, în dreptunghi și în triunghi isoscel.

7.25. Să se descompună în serie Fourier curba curentului redresat de un redresor trifazat care redresează numai o alternanță.

8. STUDIUL REGIMULUI DEFORMANT

— Să se determine valoarea eficace, rezidiul deformant, sinusoida echivalentă, factorul de formă și coeficientul de distorsiune la următoarele funcții nesinusoidale:

$$8.1. i = 8,46 \sin(\omega t - 15^\circ) + 2,82 \sin 3\omega t + 2,11 \sin 5(\omega t - 5^\circ).$$

$$8.2. u = 120 \sqrt{2} \sin(\omega t - 10^\circ) + 15 \sqrt{2} \sin(3\omega t - 15^\circ) + 8 \sqrt{2} \sin(5\omega t - 5^\circ) + 1,4 \sqrt{2} \sin 7\omega t + 2,7 \sqrt{2} \sin(9\omega t - 18^\circ).$$

$$8.3. u = 100 + 100 \sin(\omega t + 55^\circ) + 10 \sin(3\omega t - 100^\circ) + \sin 5\omega t.$$

$$8.4. i = 5 + 5 \sin \omega t + 3 \sin 3\omega t + \sin 5\omega t + 1,4 \sin 7\omega t.$$

$$8.5. i = 7,05 \sin(\omega t - 60^\circ) + 1,41 \sin(2\omega t - 25^\circ) + 4,23 \sin 3\omega t + 2,82 \sin(4\omega t + 45^\circ) + 5,64 \sin 5\omega t.$$

8.6. Unda de tensiune a unui alternator are forma unui dreptunghi cu bază $T/2$ și înălțimea U , având suprapus un triunghi isoscel. Tensiunea maximă a undei este $U_M = 2U$. Descompunerea în armonice a acestei unde a dat ca termen general

$$A_n = \frac{4U}{(2n+1)\pi} \left[1 + \frac{2}{(2n+1)\pi} \sin(2n+1) \frac{\pi}{2} \right]$$

Se cere să se calculeze:

- a) valoarea eficace;
- b) rezidiul deformant;
- c) coeficientul de distorsiune.

(IPB 1950)

8.7. Analiza armonică a unui regim deformant a dat următoarele unde de tensiune și curent:

$$u = 141 \sin(\omega t - 120^\circ) + 14,1 \sin(3\omega t - 250^\circ)$$

$$i = 7,05 \sin(\omega t - 150^\circ) + 1,41 \sin(3\omega t - 310^\circ)$$

Să se calculeze factorul de putere al regimului și factorii reactiv și deformant.

(IPB 1949)

8.8. Un regim deformant este format din următoarele unde :

$$u = 141 \sin(\omega t - 30^\circ) + 0,141 \sin(3\omega t + 200^\circ) + 0,0141 \sin(5\omega t - 150^\circ) \text{ V.}$$

$$i = 7,05 \sin(\omega t - 60^\circ) + 1,41 \sin(2\omega t - 25^\circ) + 4,23 \sin(3\omega t + 260^\circ) + 2,82 \sin(4\omega t + 45^\circ) + 5,64 \sin(5\omega t + 255^\circ) \text{ A.}$$

Să se determine factorul de putere, factorul reactiv și factorul deformant al regimului.

Pentru calculul puterii deformante se va folosi o relație aproximativă, justificându-se aceasta.

(IPB 1949)

8.9. Se dă tensiunea

$$u = 169 \sin(\omega t + 12^\circ) + 16,9 \sin(3\omega t - 100^\circ) + 1,69 \sin(5\omega t - 85^\circ) \text{ V.}$$

și curentul

$$i = 7,06 \sin(\omega t - 86^\circ) + 4,25 \sin(3\omega t - 168^\circ) + 2,12 \sin(5\omega t - 123^\circ) \text{ A.}$$

Se cere să se calculeze puterea deformantă cu ajutorul formulei exacte.

Se va arăta care este eroarea ce se comite utilizându-se formula care presupune tensiunea sinusoidală.

(IPB 1949)

8.10. Se dau undele nesinusoidale

$$u = 100 + 100 \sin(\omega t + 55^\circ) + 10 \sin(3\omega t - 100^\circ) + \sin(5\omega t + 50^\circ) \text{ V}$$

$$i = 5 + 5 \cos(\omega t - 65^\circ) + 2 \cos(3\omega t - 235^\circ) + \cos(5\omega t - 100^\circ) \text{ A.}$$

Să se calculeze factorul de putere al acestui circuit.

(IPB 1950)

8.11. Să se calculeze factorul reactiv, factorul deformant și factorul de putere al regimului deformant, caracterizat prin unde :

$$u = 100 + 100 \sin \omega t + 10 \sin 2\omega t + \sin 3\omega t \text{ V.}$$

$$i = 5 + 5 \sin(\omega t - 30^\circ) + 3 \sin(2\omega t - 45^\circ) + \sin(3\omega t - 60^\circ) \text{ A.}$$

(IPB 1950)

8.12. Unui circuit format dintr'o reactanță inductivă $L\omega = 25 \Omega$ în serie cu o reactanță capacitivă $1/C\omega = 125 \Omega$ i se aplică tensiunea nesinusoidală

$$u = \sin \omega t + 50 \sin(5\omega t - 30^\circ).$$

Se cere să se determine expresia curentului din circuit. Ce va indica un voltmetru așezat la bornele inductanței?

8.13. Rezistența $R = 6 \Omega$ și reactanțele $L\omega = 2 \Omega$ și $\frac{1}{C\omega} = 18 \Omega$ sunt legate în paralel și la bornele comune este aplicată tensiunea :

$$u = 180 \sin \omega t + 60 \sin (3\omega t + 20^\circ).$$

Se cere să se determine expresia curenților din fiecare element și curentul total dat de sursă.

8.14. Impedanțele $\bar{Z}_1 = R_1 - j \frac{1}{C\omega}$ și $\bar{Z}_2 = R_2 + j L\omega$ sunt legate în paralel și circuitul astfel format este alimentat de tensiunea

$$u = 200 \sin 50t + 100 \sin 100t + 40 \sin 150t.$$

Știind că $L = 1 \text{ H}$, $C = 100 \mu\text{F}$ și $R_1 = R_2 = \sqrt{\frac{L}{C}}$, se cere să se arate ce va indica un ampermetru electrodinamic montat în serie cu sursa.

8.15. Reactanțele $\bar{Z}_1 = 2 + j 2 \Omega$ și $\bar{Z}_2 = 2 - j 2 \Omega$ sunt legate în paralel și alimentate cu tensiunea nesinusoidală

$$u = 100 \sin \omega t + 40 \sin 3\omega t \text{ V}$$

Se cere să se determine: (a) valorile instantanee ale curenților din impedanțe și curentului total debitat de sursă; (b) Valorile eficace ale aceluiași curenți și a tensiunii aplicate; (c) factorul de formă, factorul de vârf și reziduiul deformant al tensiunii și curenților; (d) puterea totală consumată de receptor.

8.16. Unui circuit serie format dintr'o rezistență neinductivă de 3Ω , o reactanță inductivă de 8Ω și o reactanță capacitivă de 12Ω , i se aplică tensiunea nesinusoidală :

$$u = 282 \sin \omega t + 4,25 \sin 3\omega t + 3,54 \sin 5 \omega t \text{ V}.$$

Se cere să se afle :

- a) curentul care ia naștere în circuit;
- b) reziduiul deformant;
- c) coeficientul de distorsiune;
- d) puterea activă, reactivă, deformantă și aparentă;
- e) factorul de putere.

(IPB 1950)

8.17. Fiind date undele de curent și de tensiune :

$$i = 50 \sqrt{2} \sin(\omega t - 10^\circ) + 15 \sqrt{2} \sin(3\omega t - 15^\circ) + 115 \sqrt{2} \sin 5(\omega t - 5^\circ) + 10 \sqrt{2} \sin 7 \omega t \quad \text{A}$$

$$u = 10 \sqrt{2} \cos(\omega t - 70^\circ) + 2 \sqrt{2} \cos(5\omega t - 130^\circ) + 10 \sqrt{2} \cos(7\omega t - 150^\circ) \quad \text{V}$$

să se calculeze :

- puterea activă;
- puterea reactivă;
- puterea deformantă;
- puterea complimentară;
- puterea aparentă.

8.18. Unei reactanțe inductive $X_L = \omega L$ i se aplică tensiunea nesinusoidală $u = \sum U_k \sqrt{2} \sin k\omega t$. Să se determine reactanța aparentă corespunzătoare.

8.19. Cu cât crește reactanța inductivă a unui circuit dacă tensiunea aplicată conține armonicile 3 și 5 având amplitudinile respectiv 25% și 15% din unda fundamentală?

8.20. Unui circuit format dintr'o rezistență de 80Ω și o reactanță inductivă de 60Ω i se aplică o tensiune nesinusoidală conținând numai armonica 3 a cărei amplitudine este de 20% din unda fundamentală.

Să se determine impedanța aparentă echivalentă, reactanța aparentă echivalentă precum și creșterea procentuală a acestora.

8.21. Aceeași chestiune ca în problema 8.18 însă în ipoteza că se cunoaște forma curentului nesinusoidal care o străbate și care este $i = \sum I_k \sqrt{2} \sin k\omega t$.

8.22. Tensiunea $u = \sum U_k \sqrt{2} \sin k\omega t$ se aplică unei reactanțe capacitive $X_c = \frac{1}{\omega C}$.

Se cere să se afle admitanța aparentă corespunzătoare.

8.23. Cu cât scade reactanța capacitivă a unui circuit fără rezistență dacă i se aplică o tensiune nesinusoidală conținând numai armonica 7 cu o amplitudine de 10% față de amplitudinea fundamentalei?

8.24. Aceeași problemă ca 8.20, însă considerându-se reactanța capacitivă.

8.25. Aceeași chestiune ca în problema 8.22 însă în ipoteza că se cunoaște curentul nesinusoidal care o străbate și care este $i = \sum I_k \sqrt{2} \sin k\omega t$.

8.26. Să se calculeze impedanța aparentă a circuitului din problema 8.16.

8.27. Unui circuit format dintr'o reactanță inductivă $X_L = 100 \Omega$ în paralel cu o reactanță capacitivă $X_C = 100 \Omega$ i se aplică tensiunea nesinusoidală

$$u = 100 \sqrt{2} \sin \omega t + 20 \sqrt{2} \sin 3\omega t + 10 \sqrt{2} \sin 5 \omega t \text{ V.}$$

Se cere să se determine curentul total și curenții din cele două ramuri.

8.28. Pentru a se analiza la oscilograf unda de tensiune

$$u = 282 \sin \omega t + 70,5 \sin 3\omega t + 42,3 \sin 5\omega t$$

se formează un circuit serie, compus dintr'o rezistență de 100Ω , un condensator de $31,8 \mu\text{F}$ și o inductanță variabilă.

Se cere să se determine L pentru separarea fiecăreia din armonicele unde de tensiune, făcându-se în acest scop ca circuitul să intre în rezonanță.

Să se traseze oscilograma corespunzătoare a curentului.

8.29. Un cablu subteran de 30 kV, având o capacitate de $0,31 \mu\text{F/km}$ și o lungime de 6 km, formează un circuit având la extremități câte un transformator identic de 10 MVA putere. Tensiunea de scurtcircuit a acestor transformatoare fiind de 7%, se întreabă, pentru care armonică circuitul poate intra în rezonanță.

8.30. La bornele unui condensator de capacitate C se aplică tensiunea triunghiulară

$$u = \frac{8U}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \sin(2k+1) \frac{\pi}{2} \sin(2k+1) \omega t.$$

Să se determine forma curentului și să se calculeze coeficienții de distorsiune ai ambelor curbe. Ce concluzii se pot trage din examinarea acestor coeficienți de distorsiune?

8.31. Aceeași problemă în cazul când tensiunea dată se aplică la bornele unei inductanțe L .

8.32. Se dă circuitul din figura 8.32. căruia i se aplică la bornele AB tensiunea

$$u = 100 \sin \omega t + 10 \sin 3\omega t + \sin 5\omega t \text{ V}$$

în care $f = 50 \text{ Hz}$.

Dacă $C = 101,5 \mu\text{F}$, se cere să se determine L , astfel ca unda fundamentală să nu treacă prin acest circuit. Să se determine deasemenea impedanța Z astfel ca amplitudinea armonice 5 să fie 5% din amplitudinea armonice 3.

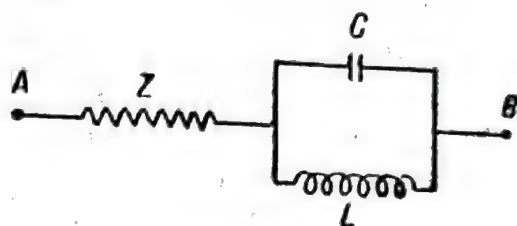


Fig. 8.32

Să se scrie apoi expresia curentului care trece prin circuit și să i se calculeze coeficientul de distorsiune.

(IPB 1950)

8.33. Se dă circuitul din fig. 8.33 în care

$$R_1 = 20 \Omega \quad R_2 = 70 \Omega \quad R_3 = 30 \Omega$$

$$L = 0,28 \text{ H} \quad C = 106 \mu\text{F} \quad f = 50 \text{ Hz}$$

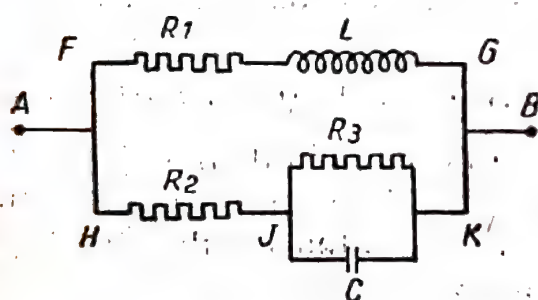


Fig. 8.33

și care este alimentat cu tensiunea nesinusoidală

$$u = 141 \sin \omega t + 70,5 \sin 3\omega t \text{ V.}$$

Se cere să se determine curentul total debitat de sursă și să se calculeze coeficienții de distorsiune ai ambelor curbe. Ce concluzii se pot trage?

(IPB 1950)

8.34. Într'un regim deformant se întâlnesc următoarele puteri:

$$P = 750 \text{ kW} \quad Q = 180 \text{ kVAR} \quad D = 242 \text{ kVAD}$$

Presupunând că în acest regim tensiunea este practic sinusoidală și are $U_{ef} = 5,2 \text{ kV}$ iar curentul nesinusoidal are valoarea maximă a undei fundamentale $I_1 = 122,85 \text{ A}$, se cere să se calculeze:

a) sporul de putere aparentă față de puterea aparentă a undei fundamentale;

b) sporul de pierderi ohmice față de regimul nedeformant.

8.35. Să se determine aceleași mărimi ca în problema precedentă în cazul circuitului din problema 8.16.

8.36. Care este raportul dintre tensiunea între faze și tensiunea pe fază într'un sistem trifazat care conține armonica 3 a cărei amplitudine este $k\%$ din amplitudinea undei fundamentale, k variind între 0 și 100?

8.37. Intr'un regim deformant trifazat, simetric și echilibrat, se măsoară factorul de putere prin metoda celor două wattmetre. Regimul deformant are numai armonica 5. Să se calculeze eroarea ce se comite la determinarea factorului de putere prin această metodă.

8.38. Aceeași problemă în cazul când regimul deformant conține numai armonica 7. În care caz este mai mare eroarea?

8.39. Între fazele unui alternator simetric trifazat, dar a cărei forță electromotoare pe fază nu este sinusoidală și are expresia :

$$e = 220 \sqrt{2} \sin \omega t + 40 \sqrt{2} \sin 3\omega t + 20 \sqrt{2} \sin 5\omega t \text{ V,}$$

se leagă impedanța $80 + j60 \Omega$.

Să se determine impedanța aparentă echivalentă, reacțanța aparentă și creșterea procentuală a acestora.

Să se calculeze apoi factorul de putere al circuitului și să se deducă puterile activă, reactivă și aparentă.

(IPB 1951)

8.40. Un alternator trifazat simetric și echilibrat, având forța electromotoare pe fază

$$e_1 = 180 \sin \omega t + 70,8 \sin (3\omega t - 30^\circ) \text{ V}$$

alimentează trei sarcini montate în stea și anume $Z_1 = 30 \Omega$, $Z_2 = j 30 \Omega$ și $Z_3 = -j 30 \Omega$,

Se cere să se determine curenții debitați de alternator pe fiecare fază și curentul care circulă în firul neutru.

(IPB 1951)

8.41. Să se generalizeze problema 8.6, în sensul că valoarea maximă a undei este $U_m = \gamma U$. Să se determine termenul general al dezvoltării în serie Fourier al acestei unde, precum și valoarea eficace, rezidiul deformant și coeficientul de distorsiune.

8.42. Se dă un circuit, format dintr'o rezistență $R = 184 \Omega$ în serie cu un condensator $C = 10 \mu\text{F}$, căruia i se aplică tensiunea nesinusoidală

$$u = 4879 \sin \omega t + 488 \sin 3\omega t \text{ V}$$

în care $f = 50 \text{ Hz}$

Să se determine
 a) curentul care ia naștere în circuit;
 b) puterea activă, reactivă, deformantă și aparentă;
 c) factorul de putere, acesta din urmă calculându-se
 atât direct cât și cu ajutorul factorilor reactiv și deformant.

(IPB 1951)

8.43. Aceeași problemă ca mai sus înlocuindu-se însă în circuit condensatorul cu o inductanță $L = 338,5 \text{ mH}$.

(IPB 1952)

8.44. Circuitelor din fig. 8.44 li se aplică o tensiune nesinusoidală având valoarea eficace a armonicei 1 egală cu 100 V , a armonicei 2 egală cu 25 V și a armonicei 3 egală cu 10 V .

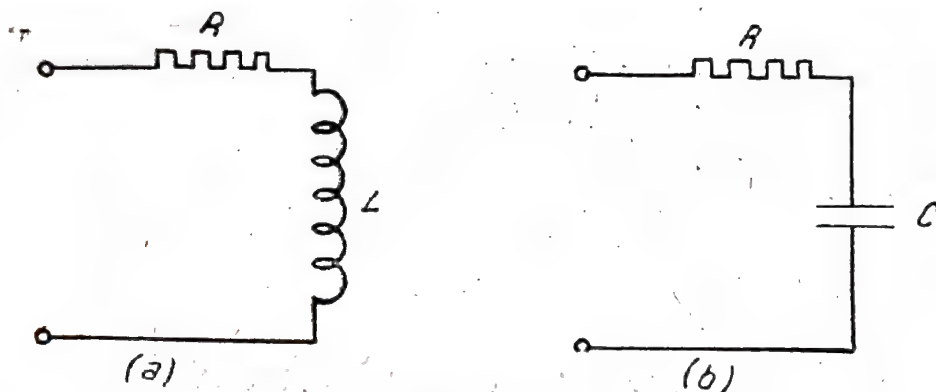


Fig. 8.44

Se cere să se determine valoarea eficace a curentului, puterea absorbită în circuit și factorul de putere, în cazul când $R = 20 \Omega$, $L = 63,7 \text{ mH}$, $C = 265 \mu\text{F}$, frecvența unei fundamentale fiind 50 Hz .

8.45. Unui circuit format dintr-o rezistență $R = 8 \Omega$ în serie cu o inductanță $L = 15 \text{ mH}$ i se aplică o tensiune nesinusoidală, formată din armonice impare și având valoarea eficace 220 V .

Știind că frecvența unei fundamentale este $f = 50 \text{ Hz}$ și că $U_3 = 0,4 U_1$, $U_5 = 0,2 U_1$, $U_7 = 0,05 U_1$, se cere să se determine valoarea eficace a curentului și factorul de putere al circuitului.

8.46. Un circuit serie este format din rezistența $R = 2 \Omega$, reactanța capacitivă $X_C = 9 \Omega$ și o reactanță inductivă X_L variabilă. La bornele acestui circuit se aplică tensiunea.

$$u = 100 \sin \omega t + 40 \sin 3\omega t \text{ V}$$

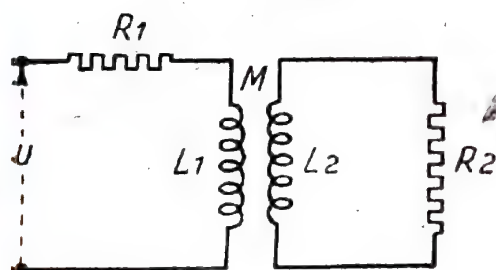
Să se studieze variația valorii eficace a curentului absorbit de circuit și a factorului de putere corespunzător când reactanța inductivă X_L variază.

Să se determine valoarea acestor mărimi pentru $X_L = 1 \Omega$, 3Ω și 9Ω .

8.47. Aplicând o tensiune sinusoidală, $U = 100 \text{ V}$, la bornele unei bobine (fără pierdere), curentul în bobină este $I = 10 \text{ A}$. Atunci când în curba de tensiune există și armonica trei, pentru aceeași valoare eficace a tensiunii $U = 100 \text{ V}$, se obține curentul $I = 8 \text{ A}$. Să se determine raportul $\beta = \frac{U_3}{U_1}$ între armonica trei și fundamentală a curbei de tensiune.

8.48. Tensiunea aplicată la bornele circuitului din fig. 8.48 fiind $u = 100 + 70,7 \sin \omega t \text{ V}$ se cere să se determine expresia curenților i_1 și i_2 .

Aplicație: $R_1 = 40 \Omega$; $R_2 = 60 \Omega$; $\omega L_1 = 30 \Omega$; $\omega L_2 = 60 \Omega$; $\omega M = 20 \Omega$



Zig. 8.48

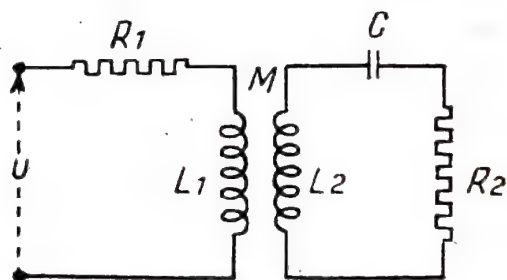


Fig. 8.49

8.49. Aceeași problemă pentru circuitul din fig. 8.49, căruia i se aplică tensiunea $u = 20 \sin \omega t + 5 \sin 3 \omega t$, valorile numerice ale constantelor circuitului fiind: $R_1 = 2 \Omega$; $R_2 = 3 \Omega$; $\omega L_1 = \omega L_2 = 4 \Omega$; $\omega M = 1 \Omega$; $1/C\omega = 6 \Omega$.

8.50. Un circuit electric este constituit din o rezistență a cărei valoare variază invers proporțional cu rădăcina pătrată a curentului care o străbate putând fi reprezentată prin relația $r = R/\sqrt{i}$, în care R este o constantă și i valoarea instantanee a curentului. Acestui circuit i se aplică o tensiune perfect sinusoidală. Să se determine forma curentului și valoarea sa eficace.

8.51. Impedanțele

$$\bar{Z}_a = -j 12 \Omega, \quad \bar{Z}_b = j 12 \Omega, \quad \bar{Z}_c = 12 \Omega,$$

sunt legate în stea și alimentate de un sistem trifazat, simetric și echilibrat având tensiunea pe fază

$$u = 310 \sin \omega t + 93 \sin 3\omega t \quad \text{V.}$$

Sistemul fiind cu neutrul *izolat*, se cere să se calculeze puterile activă, reactivă și deformantă absorbite de impedanțe.

PARTEA III

STUDIUL REGIMULUI DESECHILIBRAT

9. DEPLASAREA PUNCTULUI NEUTRU. CALCUL DIRECT DE REȚELE

9.1. Să se facă reprezentarea topografică a tensiunilor
 $\bar{U}_1 = 5 + j2 \text{ V}; \quad \bar{U}_2 = -3 + j6 \text{ V}; \quad \bar{U}_3 = -5 - j7 \text{ V}$

- a) față de punctul de concurență al acestor trei vectori;
- b) față de centrul de greutate al triunghiului format de vârfurile vectorilor.

Se va determina modulul tuturor tensiunilor din această diagramă.

9.2. Să se construiască diagrama topografică a tensiunilor unei încărcări, căreia i se aplică o tensiune simetrică trifazată \bar{U}_d , și care este formată din impedanțele

$$\bar{Z}_B = \bar{Z}_A \quad \text{și} \quad \bar{Z}_C = 2\bar{Z}_A.$$

9.3. Să se studieze deplasarea punctului neutru al unui sistem de sarcini trifazat, format din impedanțele

$$\bar{Z}_A = \bar{Z}_B = R \quad \bar{Z}_C = \alpha R$$

R fiind o rezistență ohmică și α un număr pozitiv oarecare.

Sistemul este alimentat de un sistem stelat de tensiuni simetric și echilibrat.

9.4. Aceeași chestiune pentru sistemul format din impedanțele

$$\bar{Z}_A = jL\omega \quad \bar{Z}_B = \frac{-j}{C\omega} \quad \bar{Z}_C = \alpha R,$$

R fiind o rezistență ohmică și α un număr pozitiv oarecare.

9.5. Se dă sistemul de impedanțe legate în stea

$$Z_1 = R/\alpha \quad Z_2 = -jR \quad Z_3 = jR$$

alimentate de un sistem simetric și echilibrat de tensiuni E .

Se cere să se studieze variația curenților pe cele trei linii în funcție de parametrul α , α fiind un număr real și pozitiv.

9.6. Un sistem stelat trifazat de tensiuni, perfect simetric și echilibrat, având modulul $E = 120$ V, alimentează un sistem stelat de impedanțe format din impedanțele

$$\bar{Z}_A = 10\Omega \quad \bar{Z}_B = 4\Omega \quad \bar{Z}_C = 25\Omega$$

Știind că impedanța firului neutru este

$$\bar{Z}_0 = 3 + j4\Omega,$$

se cere să se calculeze curenții pe faze și în firul neutru, precum și tensiunile pe faze.

9.7. Aceeași chestiune în cazul când sistemul de tensiuni alimentează impedanțele

$$\bar{Z}_A = 40\Omega \quad \bar{Z}_B = 10\Omega \quad \bar{Z}_C = 20\Omega$$

sistemul neavând fir de nul.

9.8. Să se determine grafic și analitic tensiunile pe faze și deplasarea punctului neutru al sistemului

$$\bar{Y}_1 = 0,2 + j0,15\text{ S}$$

$$\bar{Y}_2 = 0,1 + j0,15\text{ S}$$

$$\bar{Y}_3 = 0 + j0,10\text{ S}$$

$$\bar{Y}_0 = 0 + j0,45\text{ S}$$

căruia i se aplică sistemul de tensiuni

$$\bar{E}_1 = 100 \angle 0^\circ \text{ V}, \quad \bar{E}_2 = 100 \angle -120^\circ \text{ V}, \quad \bar{E}_3 = 100 \angle 120^\circ \text{ V}.$$

9.9. Aceeași chestiune pentru sistemul

$$\bar{Y}_1 = 0,15 - j0,2\text{ S}$$

$$\bar{Y}_2 = 0,15 - j0,1\text{ S}$$

$$\bar{Y}_3 = 0,10 - j0\text{ S}$$

$$\bar{Y}_0 = 0,45 - j0\text{ S}$$

9.10. Sistemul de impedanțe legate în stea

$$\bar{Z}_1 = 25 \angle 30^\circ \Omega, \quad \bar{Z}_2 = 20 \angle -45^\circ \Omega, \quad \bar{Z}_3 = 40 \angle 0^\circ \Omega$$

este alimentat de tensiunile pe fază

$$\bar{E}_1 = 120 \angle 0^\circ \text{ V}, \quad \bar{E}_2 = 120 \angle -120^\circ \text{ V}, \quad \bar{E}_3 = 120 \angle 120^\circ \text{ V}.$$

Se cere să se determine curenții din impedanțele \bar{Z}_1 , \bar{Z}_2 , \bar{Z}_3 , utilizându-se calculul direct, fără coordonate simetrice, aplicându-se o metodă grafică sau analitică.

(IPB 1949)

9.11. Un sistem de sarcini egale, având fiecare valoarea $\bar{Z} = 100 + j 173 \Omega$ este legat în stea și alimentat cu un sistem simetric și echilibrat de tensiuni de 380 V între faze. Se leagă între bornele 1 și 2 ale sarcinii impedanța $Z_1 = 173 - j 100 \Omega$. Se cere să se determine curenții debitați de sursă pe linie și curenții absorbiți de diversele impedanțe.

9.12. Un sistem de trei impedanțe în stea este alimentat de un alternator trifazat, simetric, echilibrat, cu tensiunea pe fază de 100 V. Impedanțele fiind

$$\bar{Z}_A = 5 - j 8,65 \Omega$$

$$\bar{Z}_B = 8,65 + j 5 \Omega$$

$$\bar{Z}_C = 0 - j 20 \Omega$$

se cere

- deplasarea punctului neutru;
- valoarea curenților.

9.13. Un sistem nesimetric de tensiuni între faze, având modulele

$$U_{AB} = 140 \text{ V}, \quad U_{BC} = 120 \text{ V}, \quad U_{CA} = 100 \text{ V}$$

se aplică unui sistem de rezistențe egale, $R = 10 \Omega$, legate în stea.

Se cere să se determine tensiunile pe fază și curenții respectivi.

9.14. Trei grupuri de lămpi, dintre care primul are 55 lămpi identice, al doilea 44 lămpi identice și al treilea 22 lămpi identice, sunt legate în stea. Rezistența unei lămpi este de 220Ω , iar tensiunea aplicată sistemului este de 127 V pe fază.

Se cere să se determine tensiunea la bornele lămpilor când :

- a) sistemul funcționează fără fir neutru;
- b) sistemul funcționează cu un fir neutru având o rezistență de $0,5 \Omega$.

9.15. Intr'un sistem trifazat perfect simetric și echilibrat având tensiunea pe fază $U = 120 \text{ V}$, se montează între fazele 1 și 2 o lampă de 60 W, iar între fazele 2 și 3 o lampă de 75 W.

Se cere să se determine curenții în cele trei faze, utilizându-se o metodă grafică.

9.16. Un alternator, legat în stea, perfect simetric și echilibrat, cu tensiunea pe fază $E = 100 \text{ V}$, alimentează o sarcină formată din două rezistențe egale, $R = 10 \Omega$, montate între fazele 1-2 și 2-3.

Se cere:

- Să se determine valoarea curenților pe fiecare fază.
- Să se arate cum poate fi eliminat regimul desechilibrat.

9.17. Aceeași chestiune însă, în locul rezistențelor R se găsesc impedanțele egale:

$$\bar{Z} = 8 + j6 \Omega.$$

9.18. Aceeași chestiune, însă cele două impedanțe nu sunt egale și au valorile:

$$\bar{Z}_{12} = 8 + j6 \Omega, \quad \bar{Z}_{23} = 6 + j8 \Omega.$$

9.19. Pentru a se determina sensul de rotire al câmpului învârtitor într-o rețea trifazată, se realizează montajul din figură, format dintr'un condensator montat pe una din faze și din două lămpi incandescente identice montate pe celelalte două faze, în serie cu câte o rezistență R . Rezistențele sunt egale.

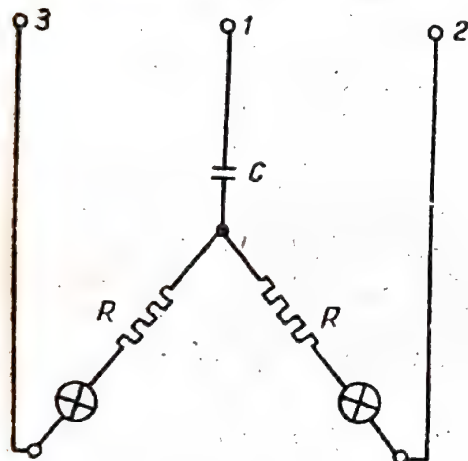


Fig. 9.19

Se alimentează circuitul cu o tensiune E între faze, perfect simetrică și echilibrată.

Cele două lămpi se vor aprinde una sau cealaltă, după cum sensul câmpului este cel direct sau cel invers.

Să se determine relația dintre C și R astfel ca, în cazul sensului direct să se aprindă lampa din dreapta și să fie stinsă lampa din stânga.

(IPB 1949)

9.20. Un aparat ca cel din problema precedentă se conectează cu borna din mijloc la faza 3, borna din dreapta la faza 1 și borna din stânga la faza 2 a unei rețele trifazate simetrice, având o tensiune între faze de 127 V , $f = 50 \text{ Hz}$, sistemul de tensiuni fiind direct. Elementele constructive ale aparatului sunt:

$$R = 1250 \Omega \quad C = 4,78 \mu\text{F}.$$

Se cere să se arate care lampă se va aprinde.

(IPB 1950)

9.21. Aceeași chestiune ca în cazul precedent însă folosindu-se un aparat la care capacitatea C este înlocuită cu o inducțanță L . Aparatul se conectează la o rețea trifazată simetrică având o tensiune de 66 V între faze, sistem de succesiune inversă, $f = 50$ Hz. Elementele constructive ale aparatului sunt

$$R = 1250 \, \Omega \quad L = 2,12 \, \text{H}.$$

(IPB 1950)

9.22. O linie trifazată, simetrică și echilibrată, are capacitatea între fiecare fază și pământ egal cu CF . La un moment dat faza 3 se pune la pământ prin rezistența $R \, \Omega$. Știind că tensiunea fiecărei faze față de pământ, la funcționarea normală este U V, se cere :

- tensiunea fiecărei faze după punerea la pământ a fazei 3 ;
- curentul ce se scurge prin rezistența R ;
- ce inductanță trebuie să aibă o bobină de stingere, pentru ca să nu avem curent de punere la pământ ?

Aplicație. $U = 17,3$ kV, $C = 3,18 \, \mu\text{F}$, $R = 1000 \, \Omega$, $f = 50$ Hz.

9.23. Impedanțele

$$\bar{Z}_{AB} = 12 + j 16 \, \Omega$$

$$\bar{Z}_{BC} = 12 + j 0 \, \Omega$$

$$\bar{Z}_{CA} = 8 + j 6 \, \Omega$$

sunt legate în triunghi. La bornele lor se aplică o tensiune trifazată simetrică și echilibrată, de 220 V între faze.

Se cere să se determine curenții pe fază și pe linie.

9.24. Un sistem de trei rezistențe $Z_{AB} = 10 \, \Omega$, $Z_{BC} = 20 \, \Omega$ și $Z_{CA} = 20 \, \Omega$, legate în triunghi, sunt alimentate de la o rețea trifazată, perfect simetrică și echilibrată, având tensiunea între faze de 208 V, prin trei conductori având fiecare o rezistență de $1 \, \Omega$. Se cere să se determine curenții din fiecare impedanță, precum și curenții debitați de sursă. Ce se întâmplă dacă $Z_{AB} = Z_{BC} = Z_{CA}$?

9.25. Se dă sistemul de impedanțe legate în triunghi

$$\bar{Z}_{12} = R/\alpha \quad \bar{Z}_{23} = -jR \quad \bar{Z}_{31} = jR$$

alimentate de un sistem de tensiuni perfect simetric și echilibrat U .

Se cere să se studieze variația curenților pe cele trei linii de alimentare în funcție de variația parametrului α , α fiind un număr real și pozitiv.

Se vor calcula acești curenți pentru cazul $\alpha = 2\sqrt{3}$, $R = 10 \Omega$ și $U = 380 \text{ V}$.

(IPB 1951)

9.26. Trei impedanțe identice \bar{Z} sunt legate în triunghi și alimentate cu un sistem trifazat de tensiuni, simetric și echilibrat. Trei ampermetre montate pe linie indică toate la fel, 10 A. Cât va indica fiecare ampermetru dacă se întrerupe una din impedanțe?

9.27. Se cere să se arate ce curent va indica ampermetrul montat ca în schema din fig. 9.27, în care $L\omega = \frac{1}{C\omega} = R = 10 \Omega$ și $Z_A = 0,2 \Omega$, tensiunea între faze fiind $U = 380 \text{ V}$.

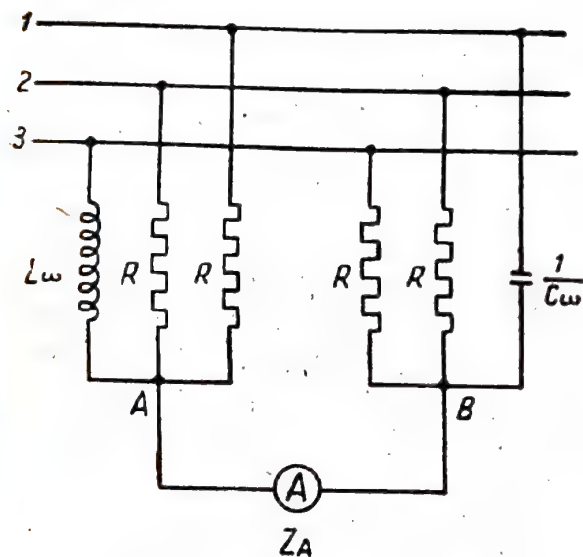


Fig. 9.27

9.28. Un cuptor electric este alimentat cu un sistem de tensiuni trifazat, nesimetric, având următoarele valori între faze

$$\bar{U}_1 = 100 \angle 20^\circ \text{ V}$$

$$\bar{U}_2 = 80 \angle -123^\circ \text{ V}$$

$$\bar{U}_3 = 60 \angle 147^\circ \text{ V}$$

Sarcina cuptorului poate fi reprezentată prin trei rezistențe ohmice legate în stea. La un moment dat această sarcină este $R_1 = R_2 = 0,1 \Omega$, $R_3 = 0,01 \Omega$.

Se cere să se determine pentru acest moment de funcționare curenții absorbiți de cei trei electrozi.

Problema se va rezolva printr-o metodă directă, analitică sau grafică, fără a se utiliza coordonatele simetrice.

(IPB 1951)

9.29. Fie un sistem trifazat de tensiuni simetric și echilibrat, fără fir neutru. Între fazele A și C se montează reactanța jX_L , iar între fazele B și C se montează reactanța $-jX_C$. Știind că $X_L = X_C = X$, se cere să se calculeze puterea totală aparentă absorbită de circuit și să se deducă apoi valoarea puterii active și a puterii reactive absorbită de circuit.

9.30. Sistemul de sarcini din figura 9.30 este alimentat cu un sistem trifazat de tensiuni simetric și echilibrat de 220 V între faze. Se cere să se determine :

- (a) Curenții din linie pe fiecare fază ;
- (b) Indicația wattmetrului ;
- (c) Măsurând puterea prin metoda celor două wattmetre, montate pe fazele A și B, care sunt indicațiile acestor wattmetre ?

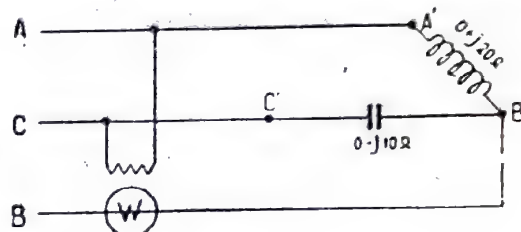


Fig. 9,30

9.31. La bornele de contact, A, B, C, ale unui tablou de distribuție, alimentate cu un sistem direct de tensiuni, simetric și echilibrat, de 220 V între faze, se leagă patru impedanțe, având celelalte extremități legate la două borne M și N izolate între ele. Impedanțele respective au valorile

$$\begin{aligned}\bar{Z}_{AM} &= 8,66 + j 5,00 \quad \Omega \\ \bar{Z}_{MC} &= 0,00 - j 10,00 \quad \Omega \\ \bar{Z}_{AN} &= 8,66 - j 5,00 \quad \Omega \\ \bar{Z}_{NB} &= 0,00 + j 10,00 \quad \Omega\end{aligned}$$

Se cere să se determine

- (a) Curentul care intră prin borna A.
- (b) Tensiunea între bornele M și N, luându-se ca origină de fază tensiunea V_{AB} .

9.32. Trei impedanțe de $200 + j 0$, $100 - j 100$ și $100 + j 100 \Omega$ sunt legate respectiv între fazele AB, BC și CA ale unui sistem trifazat, tensiunile între fazele corespunzătoare fiind 200, 141 și 141 V. Sistemul de tensiuni este direct.

Se cere să se determine

- (a) Puterea absorbită de fiecare impedanță.
- (b) Puterea totală absorbită de sistem.
- (c) Dacă măsurarea puterii absorbită se face prin metoda celor două wattmetre, care sunt indicațiile wattmetrelor, montarea acestora făcându-se în toate modurile posibile.

9.33. Un sistem direct de tensiuni în triunghi, având tensiunile între faze $U_{AB} = U_{BC} = 220 \text{ V}$ și $U_{CA} = 240 \text{ V}$ alimentează un sistem de sarcini legat de asemenea în triunghi. Sarcina montată între fazele A și B absoarbe o putere de 10 kW cu un factor de putere de 0,8 inductiv ; cea dintre fazele B și C, 15 kW cu un factor de putere de 0,70 inductiv ; și cea dintre fazele C și A, 10 kW cu factorul de putere unitate. Pu-

terea totală absorbită de sistem este măsurată prin metoda celor două wattmetre, montate pe fazele *A* și *C*, faza *B* fiind luată ca fază de referință.

Se cere să se arate ce indică fiecare wattmetru.

9.34. Un sistem trifazat de tensiuni, simetric și echilibrat, având 380 V între faze, alimentează un motor asincron trifazat de 10 kW, funcționând la plină sarcină cu un factor de putere de 0,8 inductiv și cu un randament de 90% și un motor monofazat, montat între fazele *B* și *C*, de 5 kW, funcționând la plină sarcină cu un factor de putere de 0,85 inductiv și cu un randament de 83%.

Se cere să se determine:

(a) Curentul pe linie în fiecare fază.

(b) Puterea activă totală absorbită de mașini.

Ce indică fiecare wattmetru, dacă măsurarea puterii active se face prin metoda celor două wattmetre, montate pe fazele *A* și *C*.

(c) Puterea reactivă totală absorbită de mașini.

9.35. O linie de distribuție minieră, de înaltă tensiune străbate mai multe abataje, distribuind energie electrică dela o stație *S* (fig. 9.35). Cea mai mare parte dintre sarcini sunt monofazate și sunt preluate dela transformatoare, astfel conectate la linia de distribuție încât, în condiții normale de funcționare, sarcina dealungul liniei, între *S* și *W*, este echilibrată.

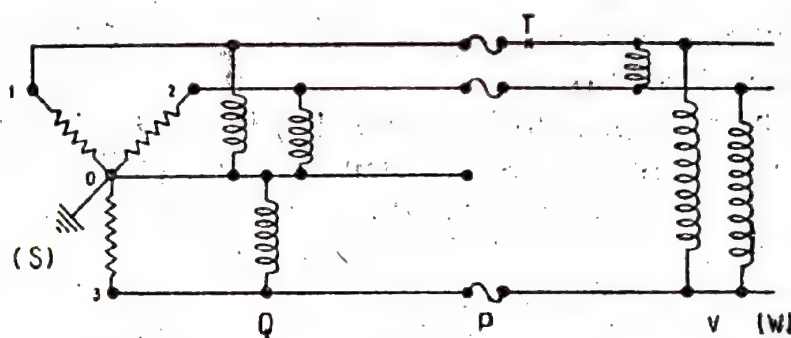


Fig. 9.35.

Puterea stației se consideră practic infinită. În punctul *P* este instalat un separator trifazat prevăzut cu siguranțe fuzibile monofazate, care se topesc în cazul unui defect între *P* și *W*. Pe porțiunea de linie *SP*, mai veche, transformatoarele sunt conectate în stea, înfășurarea primară fiind legată între o fază și neutru, la tensiunea de $4/\sqrt{3}$ kV. Pe porțiunea *PW*, corespunzând unei extinderi ulterioare, transformatoarele sunt conectate la rețea în triunghi, înfășurarea primară fiind legată între faze, la tensiunea de 4 kV.

În condițiile normale de funcționare, s'a măsurat în punctul P tensiunea între faze, găsindu-se 4 kV, și puterea absorbită de porțiunea de linie PW , găsindu-se 150 kW cu un factor de putere de 0,9 inductiv.

Sarcina între S și P poate fi reprezentată printr-o sarcină echilibrată în stea de 135 kW, cu un factor de putere de 0,85 inductiv, concentrată în P .

Impedanța fiecărui conductor al liniei între S și P este $\bar{Z} = 5,10 + j 2,60 \Omega$, iar impedanța firului neutru este $\bar{Z}_N = 12,0 + j 3,0 \Omega$.

Se cere :

(a) Să se determine puterea cerută dela stație, factorul de putere la stație și căderea de tensiune în linie în cazul funcționării sistemului echilibrat.

(b) Din cauza unui defect, fuzibilul corespunzător liniei 1 a fost topit. Se cere să se determine tensiunile între fiecare fază și firul neutru în punctul P , presupunându-se că tensiunea în S se menține constantă și aceiași corespunzătoare cazului (a).

(c) Să se construiască topograma tensiunilor corespunzătoare cazului (b).

(d) Să se discute situația fizică rezultând din ruperea conductorului (1).

(e) Să se determine puterea aparentă absorbită dela stație în cazul funcționării desechilibrate. Dacă măsurarea puterilor activă și reactivă se face prin metoda celor 3 watt-metre, respectiv varmetre, ce indică fiecare aparat?

10. TEORIA COORDONATELOR SIMETRICE

10.1. Cunoscând valoarea operatorului $a = 1 \sqrt[3]{\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} = e^{j 120^\circ}$, să se calculeze expresiile :

$$(1-a)(1-a^2); (a-a^2)(a^2-1); (1-a)/(1-a^2); (a-a^2)/(a^2-1);$$

$$(1+a)^2; (1+a)(1+a^2); (1-a)/(1+a); (1+a^2)/(1-a).$$

10.2. Să se calculeze cele șase valori ale expresiei $\sqrt[6]{1}$.

10.3. Se dau curenții : $\bar{I}_a = 8 - j6 \text{ A}$; $\bar{I}_b = -13 - j10 \text{ A}$; $\bar{I}_c = 2 + j10 \text{ A}$. Să se calculeze componentele simetrice ale acestor curenți, și să se verifice rezultatul.

10.4. Aceeași chestiune pentru sistemul de tensiuni $\bar{E}_a = 150,4 \angle 0^\circ \text{ V}$; $\bar{E}_b = 220 \angle 250^\circ \text{ V}$; $\bar{E}_c = 220 \angle -110^\circ \text{ V}$.

10.5. Aceeași chestiune pentru sistemul de curenți :
 $\bar{I}_a = 0 + j20 \text{ A}$; $\bar{I}_b = 20 + j0 \text{ A}$; $\bar{I}_c = 0 + j0 \text{ A}$.

10.6. Idem pentru curenții $\bar{I}_a = 0 + j100 \text{ A}$; $\bar{I}_b = -86,6 - j50 \text{ A}$; $\bar{I}_c = +86,6 - j50 \text{ A}$.

10.7. Un sistem stelat nesimetric de tensiuni are componentele $U_A = U_B = 220 \text{ V}$, $U_C = 180 \text{ V}$. Unghiurile dintre diverșii vectori sunt $\alpha = 150^\circ$, $\beta = 90^\circ$, $\gamma = 120^\circ$, aceste unghiuri fiind socotite în sensul direct al sistemului. Se cere să se descompună sistemul în coordonatele sale simetrice.

10.8. Fiind dat sistemul de vectori $\bar{I}_A = 3 \angle 90^\circ \text{ A}$, $\bar{I}_B = 4 \angle 180^\circ \text{ A}$, $\bar{I}_C = 5 \angle 143^\circ 08'$, se cere să se determine componentele sale simetrice.

10.9. Într'un sistem trifazat, dacă faza 1 este întreruptă, atunci în celelalte două faze circulă curenții $I_2 = I$ și $I_3 = -I$. Să se determine componentele simetrice ale acestui sistem de curenți.

10.10. Aceeași chestiune ca în problema precedentă, faza întreruptă fiind însă faza 2. Să se compare rezultatele.

10.11. Să se descompună într'un sistem trifazat de coordonate simetrice sistemul de tensiuni bifazat simetric

$$\bar{E}_a = 100 \angle 0^\circ \text{ V și } \bar{E}_b = 100 \angle 180^\circ \text{ V.}$$

10.12. Aceiași chestiune pentru sistemul tetrafazat nesimetric $\bar{E}_a = 100 \angle 0^\circ \text{ V}$; $\bar{E}_b = 100 \angle 90^\circ \text{ V}$; $\bar{E}_c = \bar{E}_d = 0$.

10.13. Într'un sistem trifazat simetric și direct, curentul pe faza 1 are intensitatea $I_1 = 100 \text{ A}$. Pe fazele 2 și 3, curenții au aceeași intensitate $I_2 = I_3 = -50 \text{ A}$. Să se arate care este ordinul sistemului și să se calculeze componentele sale simetrice.

10.14. Tensiunile între faze ale unui sistem trifazat sunt 100, 150 și 200 V. Să se găsească componentele simetrice ale sistemului; a) pentru sistemul cu conectarea în triunghi; b) pentru sistemul cu conectarea în stea.

10.15. Vectorii principali ai unui sistem de coordonate simetrice sunt $\bar{V}_1 = 20 \angle -60^\circ$; $\bar{V}_2 = 100 \angle 0^\circ$; $\bar{V}_3 = 30 \angle -45^\circ$. Cărui sistem trifazat nesimetric aparțin aceste coordonate?

10.16. Un motor de inducție, cu înfășurarea statorului conectată în stea, este alimentat de la o rețea a căror tensiuni formează un sistem simetric direct. Înfășurarea motorului a fost conectată din eroare cu o bobină inversată. Se cere să se determine gradul de disimetrie a fluxurilor.

10.17. Un sistem trifazat, cu conectarea în stea, are neutrul legat la pământ. Componenta directă a tensiunii este

E_{1d} . Să se arate că, dacă se leagă la pământ una din faze, în locul neutrului, componenta directă a tensiunii rămâne neschimbată.

10.18. Un sistem trifazat, conectat în triunghi, cu tensiunea între faze de 15000 V, este pus la pământ pe una din faze. Să se determine componenta homopolară a sistemului de tensiuni obținut între conductorii de fază și pământ.

10.19. Se dă un sistem de tensiuni simetric și echilibrat de 35000 V între faze. Faza B este pusă la pământ. Se cere să se calculeze componentele simetrice ale sistemului de tensiuni obținut între conductorii fazelor sănătoase și pământ.

(IPB 1950)

10.20. Fie vectorii : $\bar{V}_1 = 20 \angle 0$; $\bar{V}_2 = 60 \angle \frac{\pi}{6}$; $\bar{V}_3 = 35 \angle -\frac{\pi}{3}$.

Să se determine componentele simetrice prin calcul și folosindu-se două metode grafice diferite. Să se verifice rezultatul.

10.21. Tensiunile între faze ale unui sistem trifazat conectat în triunghi sunt $U_{AB} = 75$ V; $U_{BC} = 65$ V; $U_{CA} = 40$ V. Să se determine componentele simetrice, directă și inversă, printr-o metodă grafică.

10.22. Cu ajutorul rezultatelor din problema precedentă să se determine componentele simetrice ale sistemului în stea și factorii de disimetrie și asimetrie ai sistemului.

10.23. Se dau tensiunile : $\bar{E}_a = 25 + j2,0$ V; $\bar{E}_b = -13 + j2,0$ V; $\bar{E}_c = 0 + j15$ V. Să se determine componentele simetrice cu ajutorul unei metode grafice.

10.24. Fie trei vectori $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \bar{V}_3$, care formează un triunghi oarecare ABC (fig. 10.24).

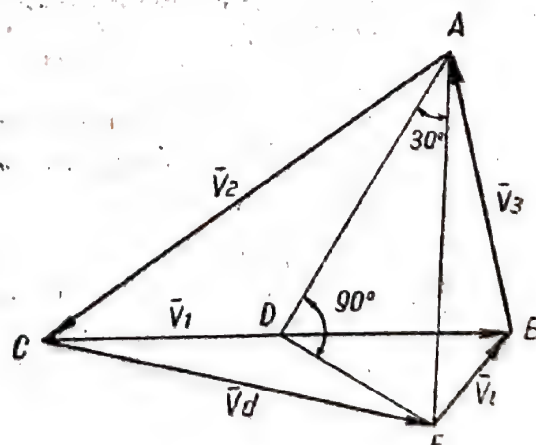


Fig. 10.24

Se duce mediana AD. Din punctul D se duce perpendiculara DF iar din punctul A se duce dreapta AF făcând 30° cu AD. Se unește punctul F astfel obținut cu C și cu B. Să se arate că vectorii \overline{CF} și \overline{FB} reprezintă respectiv, în direcție și în mărime, vectorii principali ai componentelor directă și inversă a sistemului.

10.25. Să se arate că dacă $\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_3$ sunt curenții din cele trei faze ale unui sistem trifazat, $\bar{I}_h, \bar{I}_d, \bar{I}_i$ vectorii prin-

cipali ai componentelor simetrice ale acestor curenți și R rezistența fiecărei faze, pierderea de putere prin efect Joule în sistem este dată de una din relațiile :

$$R (I_1^2 + I_2^2 + I_3^2) \equiv 3 R (I_h + I_d^2 + I_l^2).$$

10.26. Un sistem trifazat, a cărui tensiune între faze este de 380 V, perfect simetric și echilibrat, este încărcat cu impedanțele între faze :

$$\begin{aligned}\bar{Z}_{AB} &= 20 + j3 \quad \Omega \\ \bar{Z}_{BC} &= 5 - j20 \quad \Omega \\ \bar{Z}_{CA} &= 10 + j20 \quad \Omega\end{aligned}$$

Să se determine puterile aparente \bar{S}_d , \bar{S}_l și \bar{S}_{TOTAL} .

10.27. Se dau sistemele trifazate pe fază :

$$\begin{aligned}\bar{V}_1 &= 0 + j120 \quad \text{V} & \bar{I}_1 &= 6 + j6 \quad \text{A} \\ \bar{V}_2 &= 120 - j120 \quad \text{V} & \bar{I}_2 &= 0 - j6 \quad \text{A} \\ \bar{V}_3 &= -120 + j0 \quad \text{V} & \bar{I}_3 &= -6 - j6 \quad \text{A}\end{aligned}$$

Se cere să se calculeze puterile *activă*, *reactivă* și *aparentă* folosindu-se componentele simetrice ale acestor sisteme.

Se va verifica rezultatul printr'un calcul direct.

Determinarea componentelor simetrice se va face grafic, elementele necesare calculului luându-se direct din diagramele vectoriale.

(IPB 1950)

10.28. Un transformator de sudură monofazat, absorbind la funcționarea normală un curent $I = 520 \text{ A}$, trebuie racordat la o rețea trifazată simetrică având tensiunea între faze $U = 400 \text{ V}$.

Se cere :

1^o Să se arate, din punct de vedere al disimetriei produse, care este modul de cuplare cel mai bun

a) direct la rețea;

b) printr'un transformator stea-triunghi cu raportul 1;

c) printr'un transformator triunghi-stea cu raportul 1.

2^o Să se calculeze curenții absorbiți dela rețea, pe fiecare fază în parte, în cazul celor trei conectări indicate mai sus.

(IPB 1950)

10.29. O rețea trifazată alimentează o sarcină formată din trei impedanțe legate în stea. Se măsoară tensiunea la bornele fiecărei impedanțe, găsindu-se $V_A = 133 \text{ V}$, $V_B = 133 \text{ V}$, $V_C = 119,5 \text{ V}$. Tensiunea între fazele AB și BC fiind respectiv $U_{AB} = 200 \text{ V}$ și $U_{BC} = 230 \text{ V}$, se cere să se determine

tensiunea între fazele CA , precum și componentele simetrice ale ambelor sisteme de tensiuni.

10.30. Un generator trifazat, ale cărui tensiuni pe fază sunt $\bar{V}_A, \bar{V}_B, \bar{V}_C$, alimentează, printr-o linie de transport, un receptor triazat simetric, conectat în stea având impedanța pe fază egală cu \bar{Z} . Impedanța pe fază a liniei de transport este \bar{Z}_1 , iar a firului neutru \bar{Z}_N ; impedanța mutuală între două faze oarecare ale liniei de transport este \bar{M} , iar între oricare din faze și firul neutru este \bar{M}_N ; impedanțele generatorului sunt $\bar{Z}_o, \bar{Z}_s, \bar{Z}_a$.

Se cere să se determine expresiile $\bar{Z}_h, \bar{Z}_d, \bar{Z}_i$, ale sistemelor de impedanțe homopolară, directă și inversă.

11. MĂSURAREA COMPONENTELOR SIMETRICE

11.1. Pentru măsurarea componentelor simetrice de curent, directă și inversă, se folosește montajul din fig. 11.1, în care A_1 și A_2 sunt ampermetre care măsoară direct aceste componente. Dacă M este impedanța aparatelor de măsură (presupuse identice), să se găsească relația între R și Z astfel ca ampermetrul A_1 să măsoare componenta directă \bar{I}_d , și A_2 să măsoare componenta inversă \bar{I}_i . (IPB 1950)

11.2. Pentru măsurarea componentei directe de tensiune se folosește montajul din fig. 11.2. Dacă M este impedanța aparatului de măsură, să se determine Z și R , astfel ca aparatul să măsoare această componentă.

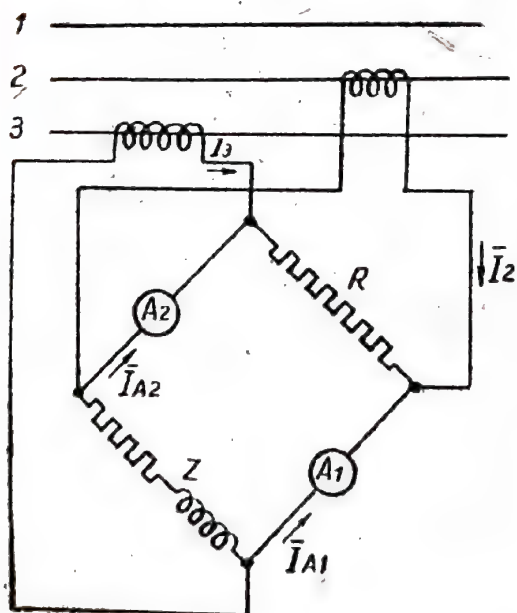


Fig. 11.1

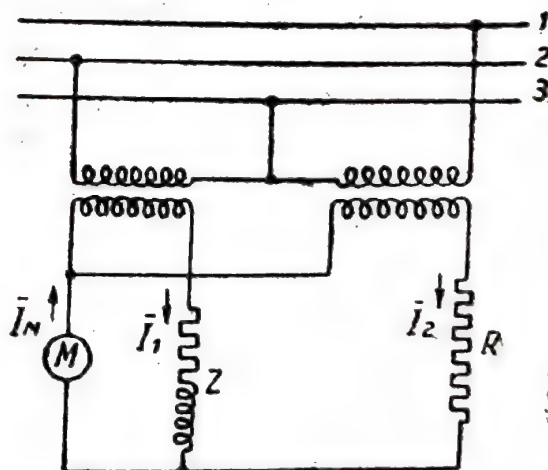


Fig. 11.2

Cum trebuie modificat montajul pentru ca aparatul să măsoare componenta inversă?

11.3. Un montaj pentru măsurarea componentei directe de tensiune, ca cel din problema precedentă, are următoarele caracteristici: $M = 500 \Omega$ și $R = 2000 \Omega$. Se aplică o tensiune

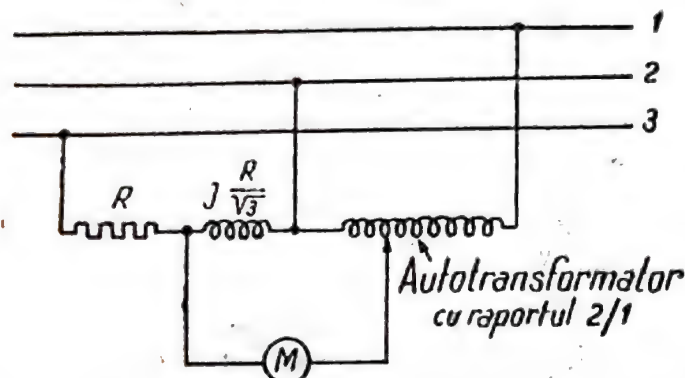


Fig. 11.4

de 100% din tensiune nominală numai la bornele unuia din cei doi transformatori. Ce va indica voltmetrul în cele două cazuri?

11.4. Să se arate că, cu ajutorul montajului din fig. 11.4 se măsoară componenta directă de tensiune.

11.5. Un voltmetru pentru măsurarea componentei directe de tensiune, având schema corespunzătoare figurii din problema 11.2, are impedanța proprie $M = 400 + j80 \Omega$ și în montaj $R = 5000 \Omega$. În urma unui defect, aparatul a fost rebobinat cu o sârmă mai subțire, astfel că impedanța sa a devenit $M = 2530 + j1810 \Omega$. Să se calculeze rezistența R_1 ce trebuie pusă în circuit pentru ca etalonarea voltmetrului să nu se schimbe.

11.6. Ce măsoară voltmetrul din problema precedentă, înainte și după rebobinare, dacă i se aplică o tensiune inversă de 50 V?

11.7. Să se determine elementele constructive ale voltmetrului de inducție, montat conform fig. 11.7, pentru a măsura componenta directă de tensiune. Voltmetrul se leagă la o rețea de 380 V între faze; curentul maxim, admis într-o înfășurare este de 5 mA.

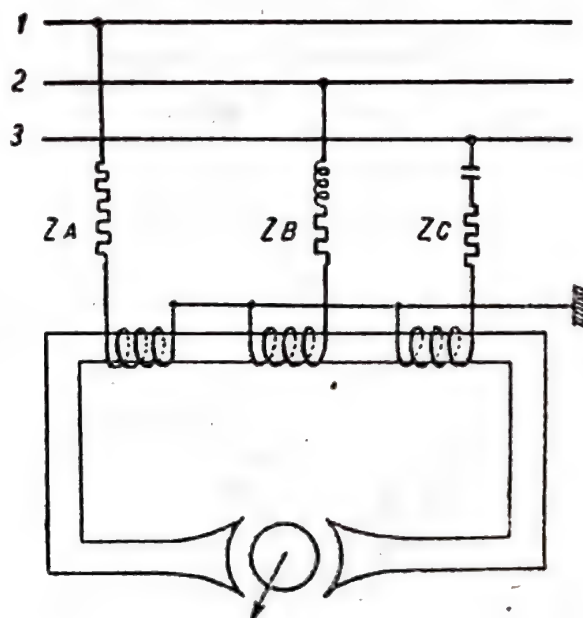


Fig. 11.7

11.8. Un alternator, având o forță electromotoare constantă, funcționează pe diverse defecte a căror rezistență este neglijabilă. Astfel, în diversele cazuri, curentul pe defect este:

- a) la un defect trifazat, 1000 A;
- b) la un defect între 2 faze, 1400 A;
- c) la un defect între o fază și pământ, 2220 A.

Componenta simetrică directă a tensiunii simple este 2000 V. Care sunt impedanțele directă, inversă și homopolară ale circuitului? (IPB 1950)

11.9. Pentru măsurarea impedanței de nul a unui alternator se leagă în scurtcircuit fazele *b* cu *c* și neutrul alternatorului, montându-se un voltmetru la bornele fazei libere și un ampermetru pe firul de nul. Să se arate că impedanța de nul a alternatorului este dată de relația

$$Z_0 = \frac{E_a}{I_n}$$

în care E_a și I_n sunt tensiunea și curentul măsurat de aparate.

Să se rezolve problema prin metoda coordonatelor simetrice. (IPB 1952)

11.10. Pentru măsurarea componentei directe a tensiunilor între faze se efectuează montajul din figura 11.10, în care V este un voltmetru având rezistența interioară $R_0 = 1260 \Omega$. Se cere să se determine valoarea rezistenței R , a inductanței L și a capacității C , frecvența rețelei fiind $f = 50 \text{ Hz}$.

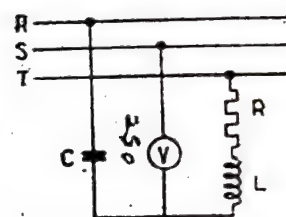


Fig. 11.10

Fig. 11.10.

11.11. Să se arate că, folosind montajul din figura 11.11, în care $\bar{Z} = -a^2 R$, componentele directe ale curenților din linia

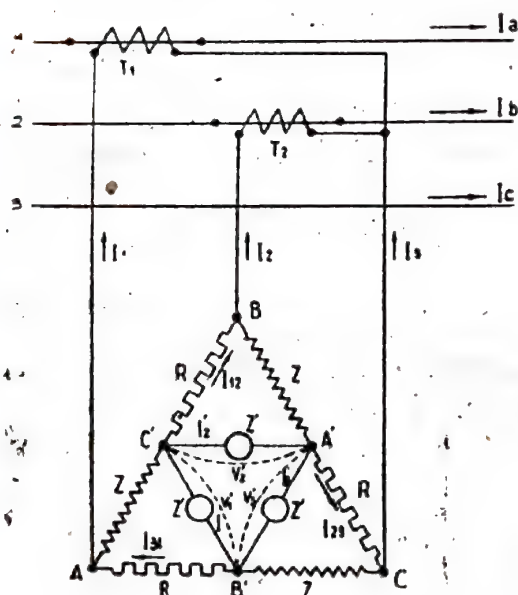


Fig. 11.11.

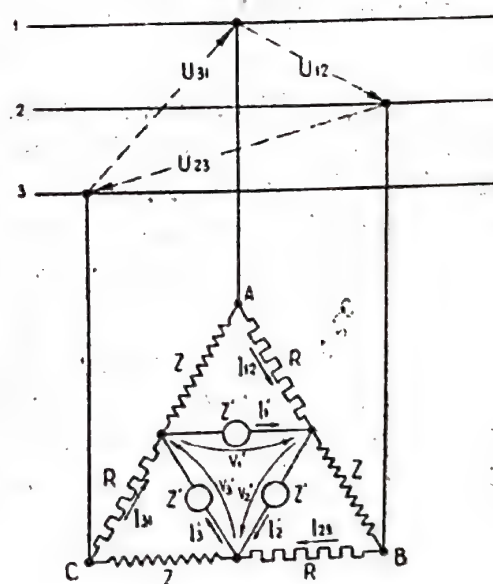


Fig. 11.12.

trifazată pot fi măsurate fie cu voltmetre montate între punctele $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$, fie cu ampermetre montate între aceleași puncte.

11.12. Montajul din figura 11.12, realizat în aceleaș condiții ca precedentul, permite să se măsoare fie cu ajutorul unor voltmetre, fie cu ajutorul unor ampermetre, componentele inverse ale tensiunilor între faze ale sistemului trifazat dat.

12. CALCULUL CIRCUITELOR TRIFAZATE DESECHILIBRATE. CALCULE DE SCURTCIRCUIT

12.1. Un transformator monofazat de 525 kVA, 2300/110 V, are o reactanță de 3%. Să se determine reactanța în ohmi, la ambele bare, de înaltă și de joasă tensiune.

12.2. Un grup de transformatoare, având o putere totală de 20 MVA, este conectat la un sistem de 132 kV. Reactanța totală a transformatoarelor este de 9%. Se cere:

— să se recalculeze această reactanță, în procente, pentru o tensiune de referință, de 100 kV;

— să se calculeze reactanța grupului de transformatoare, în ohmi, pentru tensiunile de 132 kV și 220 kV.

12.3. Un alternator având o forță electromotoare de 7000 V pe fază, alimentează o sarcină desechilibrată formată dintr'o impedanță legată între fazele 2 și 3. Neglijând rezistența alternatorului față de reactanțele sale, care sunt $\bar{Z}_s = j1,0 \Omega$ și $\bar{Z}_a = j0,15 \Omega$, dacă impedanța sarcinii este $\bar{Z} = 0,8 + j0,6 \Omega$, care sunt tensiunile între faze?

(IPB 1949)

12.4. Trei rezistențe, de 5,10 și 20 Ω , sunt legate respectiv între fazele A, B, C ale unui sistem echilibrat de tensiune, de 100 V pe fază.

Ce sisteme de curenți apar în rezistențe și în linie și care este mărimea acestor curenți?

(IPB 1949)

12.5. Un cuptor electric trifazat este alimentat de un transformator de 3500 kVA, 2200/200 V, 50 Hz, cu conectarea stea pe înaltă tensiune și triunghi pe joasă tensiune. La un moment dat, cuptorul este echivalent din punct de vedere electric cu 3 rezistențe legate în stea de 0,010 Ω , 0,010 Ω și 0,001 Ω , respectiv pe fazele A, B, și C. Dacă reactanța transformatorului este de 30%, care este intensitatea curentului în cei 3 electrozi, neglijându-se rezistențele transformatorului și impedanțele conductorilor?

Care este puterea absorbită de cuptor în momentul considerat?

(IPB 1950)

12.6. Un generator simetric trifazat ($E_a = E_b = E_c = \frac{1}{\sqrt{3}} 400 \text{ V}$) conectat în stea, alimentează printr-o linie de transport cu impedanța $\bar{Z}_e = 0,5 + j1 \Omega / \text{fază}$ un receptor, conectat tot în stea. Impedanțele fazelor receptorului sunt $\bar{Z}_A = 4,5 + j2 \Omega$, $\bar{Z}_B = 9,0 + j \Omega$; $\bar{Z}_C = 1,5 - j3 \Omega$.

Impedanța firului neutru este $Z_0 = 1 + j2 \Omega$. Reactanțele generatorului $X_s = 2 \Omega$, $X_a = 0,5 \Omega$, $X_0 = 0,2 \Omega$.

Se cere să se determine curenții din conductorii liniei, folosind metoda coordonatelor simetrice.

12.7. Ce relație trebuie să existe între impedanțele \bar{Z}_A , \bar{Z}_B , \bar{Z}_C , ale unei sarcini trifazate, conectate în stea, pentru ca aplicându-se un sistem de tensiuni între faze nesimetric \bar{U}_{AB} , \bar{U}_{BC} , \bar{U}_{CA} , componenta homopolară a sistemului de tensiune pe fază să fie zero. Se pot alege impedanțele \bar{Z}_A , \bar{Z}_B , \bar{Z}_C astfel încât sistemul tensiunilor pe fază să fie direct sau invers?

12.8. Unei sarcini formate din trei impedanțe egale $\bar{Z} = 10 + j10 \Omega$ legate în stea i se aplică sistemul de tensiuni desechilibrat $U_{AB} = U_{CA} = 141,4 \text{ V}$, $U_{BC} = 200 \text{ V}$. Se cere să se determine:

- (a) Componentele simetrice ale tensiunilor.
- (b) Componentele simetrice ale curenților din linii.
- (c) Puterea directă, puterea inversă și puterea totală absorbită de sarcină.

12.9. Un motor asincron trifazat, conectat în stea, are impedanțele pe fază

$$\bar{Z}_s = 43,3 + j25,0 \Omega$$

$$\bar{Z}_a = 5,0 + j8,66 \Omega$$

Motorul este alimentat printr-o linie trifazată, având impedanța pe fază

$$\bar{Z}_L = 0,5 + j0,866 \Omega$$

Sistemul nu are fir neutru.

Tensiunea la bornele de alimentare a liniei este

$$E_{AB} = 2000 \text{ V}; \quad E_{BC} = 2300 \text{ V}; \quad E_{CA} = 2300$$

Se cere să se determine:

- (a) Componentele directă și inversă a curentului;

(b) Mărimea componentelor simetrice ale tensiunilor la bornele motorului în raport cu mărimea componentelor simetrice ale tensiunii la bornele sursei.

(c) Puterea absorbită de motor.

12.10. Pentru sistemul din figura 12.10 se cere să se determine :

(a) Curenții I_A , I_B , I_C ;

(b) tensiunile la bornele sarcinii;

(c) Indicațiile wattmetrelor W_A și W_B și puterea absorbită de sarcină.

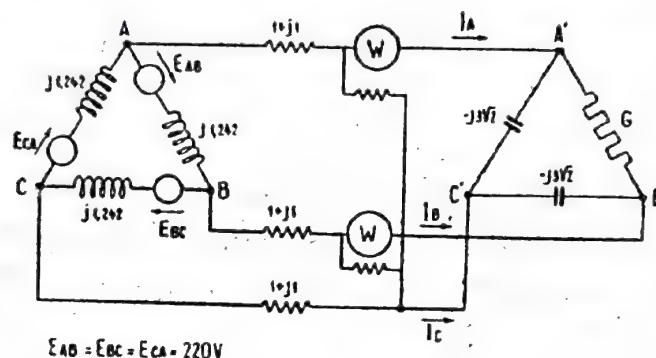


Fig. 12.10.

12.11. Un alternator simetric și echilibrat alimentează printr-o linie, a cărei reactanță este $0,3 \Omega/\text{fază}$, o sarcină desechilibrată formată din rezistențele

$$R_{12} = 11 \Omega$$

$$R_{23} = 33 \Omega$$

$$R_{31} = 16,5 \Omega$$

legate respectiv între fazele 1-2, 2-3, 3-1.

Dacă reactanțele mașinii sunt $X_s = 1 \Omega$ și $X_a = 0,5 \Omega$ pe fază și dacă forța electromotoare a alternatorului este de 1500 V pe fază, care sunt tensiunile la bornele alternatorului?

12.12. Un dispozitiv pentru determinarea sensului câmpului învârtitor este format din două lămpi și o inductanță, legate în stea pe cele trei faze ale unui sistem trifazat. Lămpile sunt conectate la fazele A și C, iar inductanța la faza B. Presupunând că tensiunea între faze este de 110 V și impedanțele fiecărei lămpi și a inductanței sunt respectiv $10 + j0 \Omega$ și $0 + j10 \Omega$, să se determine curentul prin lămpi când se aplică dispozitivului a) o tensiune directă; b) o tensiune inversă.

12.13. Un alternator trifazat simetric are următoarele constante: $\bar{Z}_s = j100\%$, $\bar{Z}_a = j30\%$ și $\bar{Z}_0 = j5\%$. El este

încărcat între faza a și neutru cu impedanța $\bar{Z}_1 = 100 + j0\%$, între faza b și neutru cu impedanța $\bar{Z}_2 = 0 + j100\%$ și între faza c și neutru cu impedanța $\bar{Z}_3 = 100 + j100\%$. Excitația este de 120% față de excitația de mers în gol. Să se determine tensiunile între fază și nul și între faze.

12.14. Un alternator de 5000 kVA, 2200 V și cu un factor de putere de 0,8 este conectat la o linie a cărei reactanță este de $0,2\Omega/\text{fază}$. Alternatorul este încărcat cu o rezistență de 4Ω între fazele 2 și 3, chiar la bornele sale, și cu rezistențe egale, de 5Ω fiecare, între fazele 2 și 3 și 3 și 1 la capătul liniei. Dacă reactanțele mașinii sunt $X_s = 1,0\Omega$ și $X_a = 0,5\Omega$ pe fază, și dacă forța electromotoare a alternatorului este de 1500 V pe fază, care sunt tensiunile între faze la bornele mașinii și la capătul liniei?

12.15. Un alternator trifazat cu conectarea stea și cu nulul legat la pământ este cuplat direct cu un transformator cu conectarea stea-stea, având nulul legat la pământ pe ambele părți. Tensiunea la bornele alternatorului este $U = 6\text{ kV}$, iar raportul de transformare al transformatorului este 6/30 kV.

Prin măsurători s'a determinat că, la curentul nominal de excitație, avem

$$E = 6250\text{ V între faze}$$

$$\bar{I}_1 = 1100 - j2630\text{ A}$$

$$\bar{I}_2 = 1050 - j2200\text{ A}$$

$$\bar{I}_3 = 1200 - j1300\text{ A}$$

iar pentru transformator, privite dinspre partea de înaltă tensiune,

$$\bar{Z}_d = 5 + j35\Omega$$

$$\bar{Z}_h = 10 + j15\Omega$$

Să se determine curentul de scurtcircuit la care va fi solicitat alternatorul în cazul unui scurtcircuit pe faza 3 la pământ, la bornele transformatorului.

Impedanța cablului de legătură se neglijează.

(IPB 1949)

12.16. Un alternator trifazat cu conectarea în stea, cu nulul legat la pământ, este cuplat direct cu un transformator cu conectarea triunghi-stea, cu nulul legat la pământ. Tensiunea la bornele alternatorului este de 6 kV, iar raportul de transformare al transformatorului este 6/30 kV.

Cunoscând că impedanțele alternatorului sunt

$$\bar{Z}_s = j 10 \Omega \quad \bar{Z}_a = j 8 \Omega \quad \bar{Z}_0 = 10 + j 12 \Omega$$

iar ale transformatorului, pe partea de joasă tensiune

$$Z_d = 10 + j 30 \Omega \quad \bar{Z}_h = 20 + j 55 \Omega$$

să se determine curenții de scurtcircuit la care va fi solicitat alternatorul în cazul unui scurtcircuit între fazele 1 și 3 ale transformatorului, pe partea de înaltă tensiune, și la pământ.

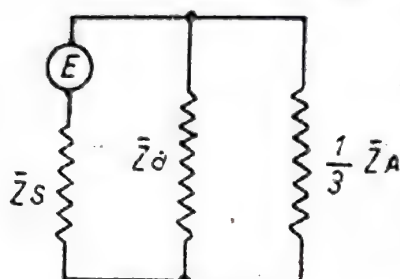


Fig. 12.17

Se neglijează impedanța cablului de legătură.

(IPB 1949)

12.17. Fie un generator la care fazele 2 și 3 sunt în scurtcircuit și legate printr'o impedanță Z_A cu faza 1 (scurtcircuit trifazat cu arc pe o fază).

Impedanțele alternatorului sunt \bar{Z}_s și \bar{Z}_a , și forța sa electromotoare este \bar{E} . Să se arate că circuitul echivalent al acestui defect este cel dat în fig. 12.17 și să se calculeze curenții debitați de alternator.

Aplicație : $E_A = 5400 \text{ V}$ $\bar{Z}_s = 0 + j 2,62 \Omega$

$$\bar{Z}_a = 1,4 + j 2,3 \Omega \quad \bar{Z}_A = 2,4 + j 0,6 \Omega$$

(IPB 1950)

12.18. Un alternator având tensiunea pe fază de 7000 V, alimentează o sarcină monofazată legată între fazele A și B.

Impedanțele alternatorului sunt $\bar{Z}_s = j 1,0 \Omega$, $\bar{Z}_a = j 0,15 \Omega$ iar impedanța sarcinii este $\bar{Z} = 0,8 + j 0,6 \Omega$.

Care sunt tensiunile între faze la utilizare?

(IPB 1950)

12.19. Un alternator trifazat simetric de 15 MVA și 5,4 kV este cuplat direct cu un transformator de 10 MVA, 5,4/30 kV, cu conexiunea triunghi-stea. La bornele transformatorului, pe partea de înaltă tensiune, între fazele 2 și 3, se produce un defect a cărui impedanță este de $3 + j 0 \Omega$.

Se cere puterea pe care o debitează alternatorul pe defect.

Impedanțele caracteristice ale alternatorului sunt $\varepsilon_s = 9\%$ și $\varepsilon_a = 7,5\%$; iar a transformatorului $\varepsilon_T = 10\%$.

(IPB 1950)

12.20. Un alternator având o forță electromotoare $E = 6350$ V pe fază, are fazele legate în stea cu nulul pus la pământ printr-o reactanță de $j10 \Omega$. Impedanțele sale caracteristice sunt :

$$\begin{aligned}\bar{Z}_s &= 0 + j 1,45 \Omega & \bar{Z}_a &= 0,07 + j 0,17 \Omega \\ \bar{Z}_0 &= 0 + j 0,12 \Omega\end{aligned}$$

Se cere să se calculeze puterea pe care o va debita alternatorul în cazul unui scurtcircuit la bornele sale, între două faze și la pământ, cu un arc având o rezistență de 10Ω .

(IPB 1950)

12.21. Un alternator simetric, având impedanțele \bar{Z}_0 , \bar{Z}_s , \bar{Z}_a , alimentează o sarcină echilibrată în triunghi, impedanța fiecărei faze fiind \bar{Z} . Dacă la un moment dat se produce un defect între două faze printr-o impedanță \bar{Z}_A , se cere să se determine curenții în fiecare element și tensiunile la bornele respective în timpul defectului.

12.22. O linie trifazată are reactanța de $1,2 \Omega/\text{fază}$ și rezistența neglijabilă, iar între linii o reactanță mutuală egală cu $0,4 \Omega$. Centrala, care alimentează linia, are o putere infinită (tensiunea la bare nu variază la orice regim de funcționare de la mersul în gol până la mersul în scurt circuit). Tensiunea de alimentare a liniei este de $6,6$ kV. Sistemul are neutrul pus direct la pământ. La un momest dat, fazele B și C se pun simultan la pământ.

Se cere să se arate ce vor indica aparatele de măsură din centrală (ampermetrele pe faze și pe neutru și voltmetrele dintre faze și nul). Se presupune că voltmetrele au o impedanță infinită.

12.23. Se dă o rețea ca cea din fig. 12.23, în care elementele caracteristice sunt indicate pe schemă. Producându-se un

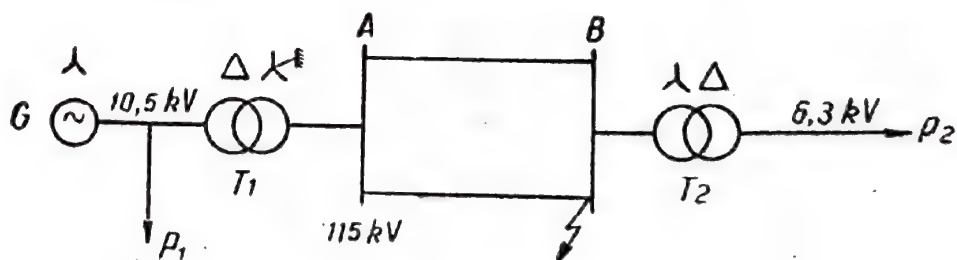


Fig. 12.23

scurtcircuit la bara B , se cere să se determine curenții de scurtcircuit la locul defectului în următoarele cazuri: a) scurtcircuit al unei faze la pământ, fără arc; b) scurtcircuit între

două faze și la pământ fără arc; c) scurtcircuit între două faze, izolat de pământ; d) scurtcircuit trifazat.

$G \equiv 120 \text{ MVA}$; $U = 10,5 \text{ kV}$; $\varepsilon_1 = 12\%$; $\varepsilon_2 = 15\%$
 $T_1 \equiv 60 \text{ MVA}$; $10,5/115 \text{ kV}$; $\varepsilon_{T_1} = 10,5\%$
 $T_2 \equiv 60 \text{ MVA}$; $115/6,3 \text{ kV}$; $\varepsilon_{T_2} = 10,5\%$
 $L \equiv l = 105 \text{ km}$; două circuite în paralel ; $x_1 = 0,4 \Omega/\text{km}$

$x_0 = 3 x_1$
 $P_1 = 60 \text{ MVA}$ λ $\varepsilon_k = 10,5\%$
 $P_2 = 40 \text{ MVA}$ λ $\varepsilon_k = 10,5\%$

12.24. Aceeași problemă pentru circuitul din fig. 12.24. Pe schemă sunt trecute toate elementele caracteristice ale rețelei.

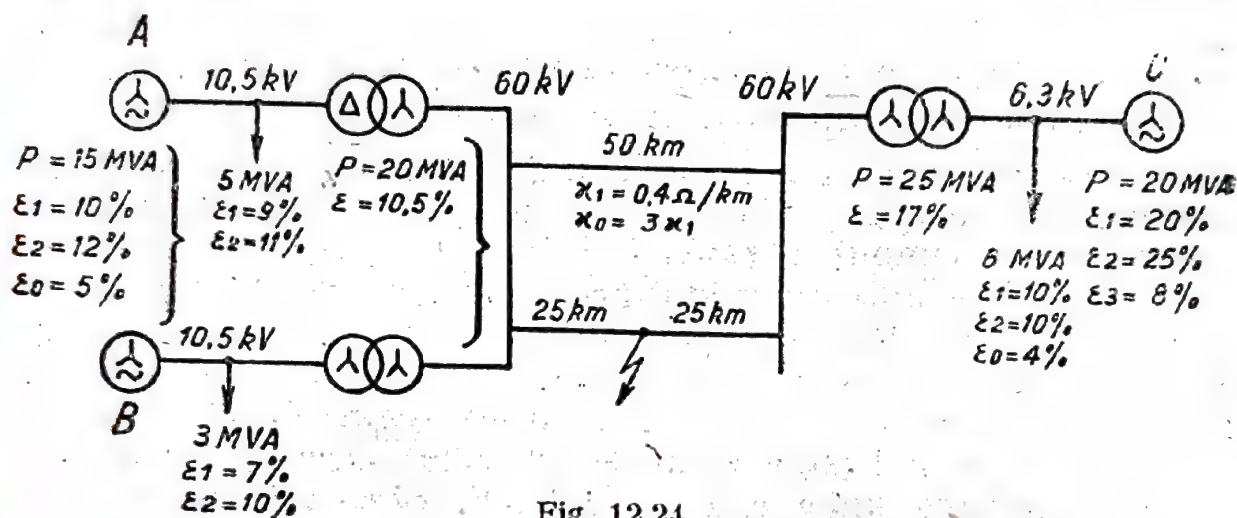


Fig. 12.24

Să se facă și repartitia curenților în întreaga rețea.

12.25. Pentru rețeaua din figura 12.25. se cere să se calculeze curenții de scurtcircuit la locul defectului pentru : (a) scurtcircuit monofazat; (b) scurtcircuit bifazat și la pământ; (c) scurtcircuit bifazat izolat de pământ.

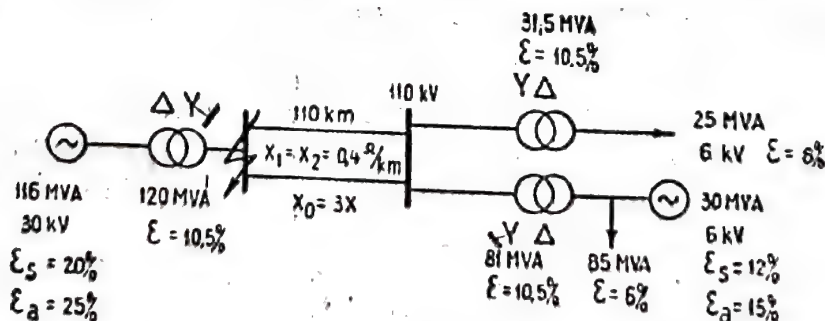


Fig. 12.25

Să se determine deasemenea și tensiunea la bara opusă defectului în cazul (b).

12.26. Aceiași chestiune pentru circuitul din fig. 12.26.

12.27. La unul din consumatorii unei rețele trifazate echilibrate se proiectează instalarea unui cuptor monofazat. Știind că puterea de scurt circuit trifazat la barele consumatorului este de 40 MVA iar puterea cuptorului este de 2500 kVA,

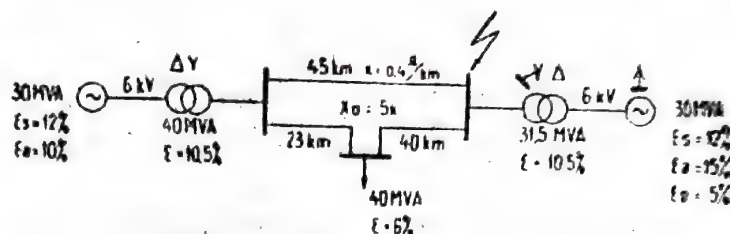


Fig. 12.26

se cere să se determine gradul de desimetrie a tensiunilor la consumator.

12.28. Se consideră un alternator trifazat, simetric și echilibrat, având neutrul pus la pământ, și cu faza A legată la pământ printr'o impedanță \bar{Z}_L .

Să se demonstreze că puterea aparentă totală cu care alternatorul alimentează defectul este dată de relația :

$$\bar{S} = \bar{S}_h + \bar{S}_d + \bar{S}_l = 9 \bar{Z}_L \left(\frac{E}{Z} \right)^2.$$

În relația de mai sus : E este tensiunea pe fază a alternatorului, \bar{S}_h , \bar{S}_d , \bar{S}_l sunt puterile aparente datorite componentelor simetrice și

$$\bar{Z} = \bar{Z}_0 + \bar{Z}_s + \bar{Z}_a + 3\bar{Z}_L,$$

\bar{Z}_0 , \bar{Z}_s , \bar{Z}_a fiind impedanțele alternatorului.

(IPB 1952)

12.29. Pentru sudarea carcasei unui alternator se folosește o mașină de sudură trifazată la care una din faze este legată printr'o impedanță $\bar{Z}_1 = 6 + j3 \Omega$ direct la masă.

Dacă impedanțele arcului sunt $\bar{Z}_2 = 3 + \sqrt{3} \Omega$ și $\bar{Z}_3 = 3 - \sqrt{3} \Omega$, se cere să se determine curenții debitați de alternator pe fiecare fază și tensiunile la bornele alternatorului.

Alternatorul este perfect simetric și echilibrat, cu conexiunea în stea, având o tensiune de 380/220 V și o putere de 10 kVA. Reactanțele alternatorului sunt $\epsilon_s = 13,85 \%$ și $\epsilon_a = 20,80 \%$.

(IPB 1951)

12.30. Doi alternatori identici având neutrul pus la pământ sunt legați în paralel numai prin faza a . Impedanțele mașinilor sunt $\bar{Z}_s = j 1,0 \Omega$, $\bar{Z}_a = j 0,30 \Omega$ și $\bar{Z}_0 = j 0,05 \Omega$. Dacă componenta directă a tensiunii este decalată în urmă cu 30° , care este diferența de potențial între bornele b și c ale celor două mașini? Se va presupune că forța electromotoare a alternatorilor este simetrică, echilibrată și egală cu 1.

12.31. Trei transformatoare, având fiecare o impedanță diferită, primesc energia dela un sistem trifazat echilibrat cu tensiune constantă.

Bornele de eșire ale transformatoarelor sunt legate în triunghi, tensiunea de mers în gol la bornele de eșire fiind de 220 V. Fiecare transformator poate fi considerat ca un generator monofazat având în serie impedanțele

$$\bar{Z}_{AB} = 0,5 + j 0,866 \Omega$$

$$\bar{Z}_{BC} = 0,1 + j 0,173 \Omega$$

$$\bar{Z}_{CA} = 0,5 + j 0,866 \Omega$$

Ce tensiune apare la bornele transformatorului dacă acesta debitează pe o sarcină trifazată formată din trei impedanțe egale, $\bar{Z} = 1 + j 1,73 \Omega$ legate în stea?

Observație. Valoarea impedanțelor interne indicate mai sus sunt mult mai mari decât acelea din practică.

12.32. Trei rezistențe egale de 45Ω fiecare sunt legate în triunghi și alimentate prin trei conductori identici, având fiecare o rezistență de 5Ω , de la un sistem de tensiuni monofazate legate în V, și egale cu $\bar{E}_{BA} = \bar{E}_{BC} = 120 \angle 0^\circ \text{ V}$. Se cere să se determine :

- (a) Componentele simetrice ale curenților din linii.
- (b) Curenții din linii.
- (c) Tensiunile la bornele sarcinii.
- (d) Puterea totală disipată în rezistențele care formează sarcina.

12.33. Trei sarcini inductive sunt conectate în triunghi și alimentate cu un sistem simetric de tensiuni de 220 V între faze. Prima sarcină absoarbe un curent de 100 A cu un factor de putere de 0,707; a doua absoarbe un curent de 150 A cu un factor de putere de 0,8 și a treia absoarbe o putere de 27,2 kW cu un factor de putere de 0,5.

Se cere să se determine :

(a) Componentele simetrice ale curenților din impedanțe și din linii.

(b) Intensitatea curenților din linii.

(c) Ce putere se măsoară prin metoda celor două watt-metre și ce indică fiecare wattmetru dacă bobinele de curent sunt montate în liniile A și B?

12.34. Un cuptor electric pentru scopuri ceramice este format din două grupuri de câte trei rezistențe a 45Ω fiecare legate în paralel și alimentate în V de două transformatoare monofazate, având fiecare tensiune de 220 V. Alimentarea

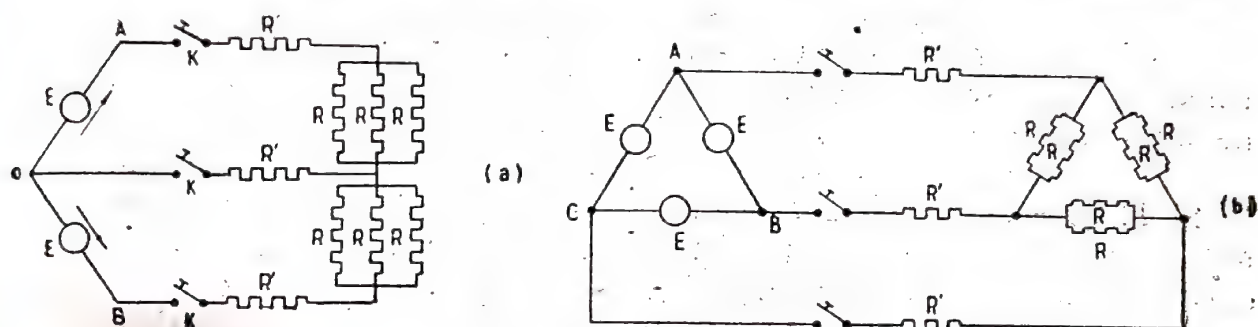


Fig. 12.34

cuptorului se face prin conductori având fiecare o rezistență de $0,5 \Omega$ (fig. 12.34 a). Un dispozitiv automat acționează asupra contactorului K astfel ca temperatura în cuptor să se mențină constantă. În timpul unei luni de lucru, utilizarea puterii utile este de 200 ore. Puterea și energia sunt măsurate la bornele contactoarelor și reprezintă lunar următoarele cote :

Cererea de putere : 5 lei/kW

Energia consumată : 0,1 lei/kWh

Contorul măsoară puterea cu o eroare mai mică de 0,1 kW pentru putere și mai mică de 10 kWh pentru energie.

Cât costă alimentarea cu electricitate a instalației?



Pentru echilibrarea rețelei, se transformă instalația precedentă, făcând să funcționeze într'un sistem trifazat (fig. 12.34 b) cu conectarea în triunghi atât pentru transformatoare, cât și pentru rezistențe. Tensiunea aplicată rezistențelor este aceeași.

Care este utilizarea lunară a puterii utile în acest caz?

Cât costă în acest caz alimentarea cu electricitate a instalației?

PARTEA IV

REGIMUL TRANZITORIU

13. STUDIUL DIRECT AL REGIMULUI TRANZITORIU

13.1. Dorim să măsurăm rezistența înfășurării de înaltă tensiune a unui transformator de 25000/400 V, 50 Hz, prin metoda voltmetrului și ampermetrului.

Cunoscând că această înfășurare are o rezistență $R = 20 \Omega$ și că reactanța sa este $X = 46,1 \Omega$, se întreabă după cât timp dela aplicarea unei tensiuni continue pot fi citite indicațiile aparatelor astfel încât valoarea instantanee a curentului măsurat să difere cu 0,1% față de valoarea teoretică de regim.

(IPB 1949)

13.2. Pentru măsurarea rezistenței înfășurării de înaltă tensiune a unui transformator se folosește metoda voltmetrului și ampermetrului.

Știind că această înfășurare are o rezistență de circa 19Ω și o reactanță de circa 42Ω la 50 Hz, se întreabă după cât timp dela aplicarea unei tensiuni V vor putea fi citite indicațiile aparatelor.

Se va admite regimul stabilit atunci când curentul va diferi cu mai puțin de 10^{-2} din valoarea lui de regim.

(IPB 1949)

13.3. Să se determine curentul de încărcare al unui cablu de înaltă frecvență de 20 km lungime, având o capacitate de $2 \mu\text{F}/\text{km}$ și o rezistență de $0,650 \Omega/\text{km}$. Tensiunea aplicată sistemului este :

$$e = 1500 \cos(\omega t + \psi) + 150 \cos(3\omega t + \psi)$$

în care $f = 1000 \text{ Hz}$.

(IPB 1949)

13.4. Se leagă un cablu, având o capacitate de $0,23 \mu\text{F}/\text{km}$ și o rezistență de $0,51 \Omega/\text{km}$, la o rețea de curent alternativ având o tensiune de 30 kV și o frecvență de 42 Hz.

Lungimea cablului fiind $l = 4$ km, se cere să se determine lovitura de curent în momentul închiderii întrerupătorului, știind că această închidere are loc în momentul în care $\psi = \frac{\pi}{6}$.

Care este raportul dintre acest curent și curentul normal de încărcare?

(IPB 1949)

13.5. Se dă un circuit format dintr'o rezistență $R = 100 \Omega$ în serie cu o inductanță $L_1 = 0,318$ H și alimentat cu tensiunea alternativă

$$e = 1000 \sin \omega t.$$

La un moment dat inductanța crește brusc la valoarea $L_2 = 0,551$ H. Frecvența tensiunii alternative fiind $f = 50$ Hz, se cere să se stabilească regimul tranzitoriu al curentului din circuit și să se traseze curba reprezentativă între limitele $t_1 = -\frac{2\pi}{\omega}$ și $t_2 = \frac{2\pi}{\omega}$ față de momentul producerii variației inductanței.

13.6. Se dă un circuit format dintr'o rezistență $R_1 = 356 \Omega$ în serie cu o inductanță $L = 0,638$ H și alimentat cu tensiunea

$$e = 3200 \cos \omega t.$$

La un moment dat, rezistența scade brusc la $R_2 = 200 \Omega$. Frecvența tensiunii alternative fiind $f = 50$ Hz, se cere să se stabilească regimul tranzitoriu al curentului și să se traseze curba reprezentativă între limitele $t_1 = -\frac{2\pi}{\omega}$ și $t_2 = \frac{2\pi}{\omega}$, față de momentul producerii variației rezistenței.

(IPB 1950)

13.7. Se cere să se stabilească regimul tranzitoriu al tensiunii la bornele condensatorului C , a cărui capacitate este de $1,06 \mu\text{F}$, condensatorul fiind legat în serie cu o rezistență $R_1 = 1732 \Omega$ și alimentat cu o tensiune alternativă a cărei valoare eficace este de 2000 V, când rezistența crește brusc la 3000Ω . Frecvența tensiunii alternative este 50 Hz. Să se traseze curba reprezentativă a tensiunii la bornele condensatorului.

(IPB 1950)

13.8. O linie electrică trifazată aeriană perfect izolată și simetrică, are următoarele caracteristici:

$$l = 50 \text{ km} \quad U = 60 \text{ kV} \quad s = 50 \text{ mm}^2$$

$$L = 0,003 \text{ H} \quad f = 50 \text{ Hz}.$$

Linia este legată la ambele capete la transformatoare cu conexiune $\Delta\Delta$ cu nulul legat la pământ, fiecare transformator având o rezistență de 12Ω și o reactanță de 42Ω .

Inchizându-se linia în gol, se cere lovitura de curenț la închidere. După cât timp curențul liber va fi de numai $1/100$ din valoarea lui inițială?

(IPB 1950)

13.9. Se dă circuitul format dintr'o rezistență $R_1 = 100 \Omega$ în serie cu o inductanță $L = 0,318 \text{ H}$ și alimentat de tensiunea alternativă $e = 1000 \sin(\omega t + \psi)$. La un moment dat R crește brusc la valoarea $R_2 = 200 \Omega$. Frecvența tensiunii alternative fiind $f = 50 \text{ Hz}$, se cere:

- 1) regimul tranzitoriu al curențului;
- 2) pentru care valoare a lui ψ tensiunea la bornele inductanței este maximă?
- 3) să se reprezinte grafic curba tensiunii la bornele inductanței, înainte și după variația sarcinii.

13.10. O rezistență R este legată în serie cu o inductanță L , circuitul fiind alimentat cu o forță electromotoare sinusoidală de forma:

$$e = E \sin(\omega t + \psi).$$

La un moment dat, se comutează brusc circuitul pe o forță electromotoare continuă E .

Se cere regimul tranzitoriu al curențului din circuit.

13.11. Aceeași chestiune ca mai sus, însă în cazul în care comutarea se face de la curenț continuu la curenț alternativ.

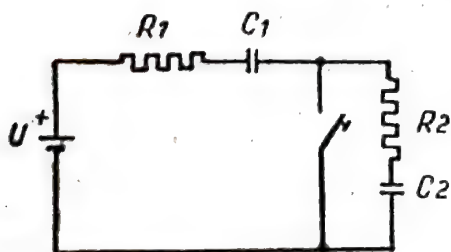


Fig. 13.13

13.12. Un circuit este format dintr'o rezistență R_1 în serie cu o inductanță L_1 , totul în paralel cu o rezistență R_2 . Acest circuit se leagă la o sursă constantă de curenț. Se cere să se determine regimul tranzitoriu de stabilire a curenților în acest circuit.

13.13. Se dă circuitul din figura 13.13. Inchizându-se întrepăcătorul, se cere să se determine regimul de încărcare al condensatorului C_1 și de descărcare al condensatorului C_2 .

Aplicație numerică. $C_1 = 50 \mu\text{F}$, $C_2 = 200 \mu\text{F}$, $R_1 = 5000 \Omega$, $R_2 = 1000 \Omega$ și $U = 3 \text{ kV}$.

(IPB 1952)

13.14. Se dă circuitul din fig. 13.14. Inchizându-se circuitul, se cere să se determine :

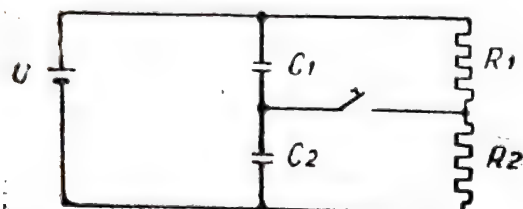


Fig. 13.14

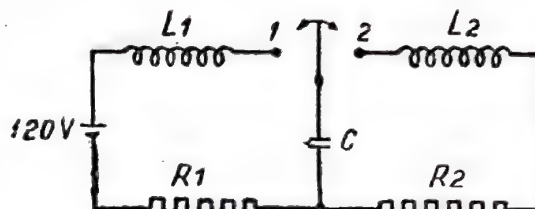


Fig. 13.15

- curentul de descărcare al condensatorilor ;
- curentul tranzitoriu din rezistențe ;
- curentul debitat de pilă ;
- tensiunea la bornele condensatorilor.

Aplicație numerică : $C_1 = 100 \mu\text{F}$; $C_2 = 200 \mu\text{F}$; $R_1 = 5000 \Omega$; $R_2 = 1000 \Omega$; $U = 3000 \text{ V}$.

(IPB 1952)

13.15. Se dă circuitul din figura 13.15 în care $L_1 = 1 \text{ mH}$; $L_2 = 10 \text{ mH}$; $R_1 = R_2 = 10 \Omega$; $C = 100 \mu\text{F}$,

Se încarcă condensatorul pe sursa constantă de 120 V . apoi se descarcă pe circuitul din dreapta. Se cere curba variației tensiunii la bornele condensatorului.

(IPB 1951)

13.16. Aceeași chestiune ca în problema precedentă, dar pentru $L_1 = 10 \text{ mH}$; $L_2 = 1 \text{ mH}$; $R_1 = 10 \Omega$; $R_2 = 100 \Omega$; $C = 100 \mu\text{F}$. Se presupune că, în momentul începerii operației, condensatorul este complet descărcat. Discuție.

(IPB 1951)

13.17. Un condensator de $100 \mu\text{F}$ este încărcat prin intermediul unei rezistențe de 9Ω cu ajutorul unei baterii de 12 V având o rezistență interioară de 1Ω .

Se descarcă apoi condensatorul pe o rezistență oarecare R_c .

Se cere să se determine randamentul acestei instalații.

Se poate mări randamentul variind forța electromotoare, rezistența sau capacitatea condensatorului ?

13.18. Se dă circuitul din figura 13.18. La un moment dat se deschide brusc întrerupătorul I .

Se cere să se determine curenții din diferitele laturi ale circuitului și tensiunea la bornele condensatorului.

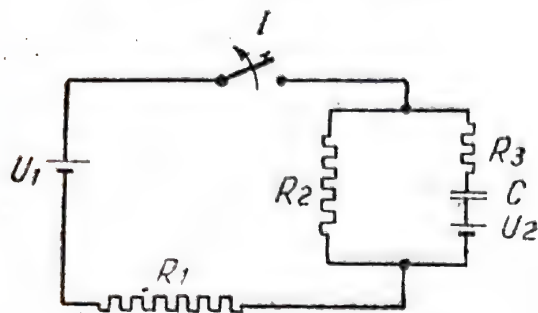


Fig. 13.18

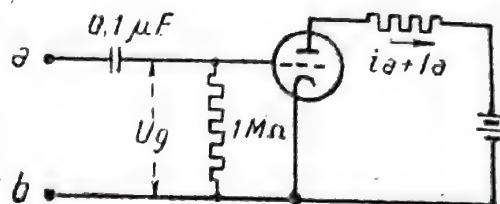


Fig. 13.19

Ce devine curenul din rezistența R_2 dacă $R_1 = 0$?

Aplicație: $R_1 = 5000 \Omega$; $R_2 = R_3 = 10000 \Omega$; $C = 50 \mu F$; $U_1 = 1500 V$; $U_2 = 5500 V$.

13.19. Componenta alternativă I_a a curentului din circuitul plăcii triodei (fig. 13.19) este direct proporțională cu tensiunea aplicată grilei.

Să se găsească forma acestui curent dacă tensiunea aplicată la bornele ab variază după legea $u = 10 \text{ mV}$ în intervalul de timp $0 < t < 0,05 \text{ s}$ și este nulă în afara acestui interval.

Ce devine curenul dacă intervalul de aplicare a tensiunii se reduce la $0,005 \text{ s}$?

13.20. La bornele unei bobine de inducție, având o rezistență de 20Ω și o inductanță de $0,02 \text{ H}$ se aplică o tensiune având forma din fig. 13.20.

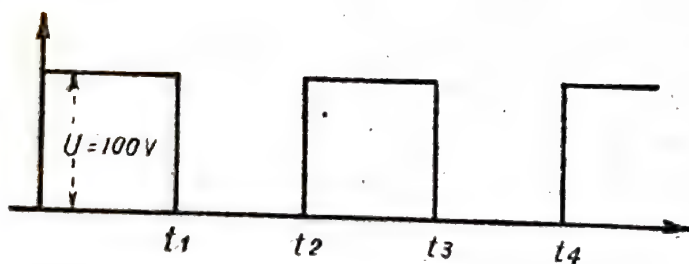


Fig. 13.20

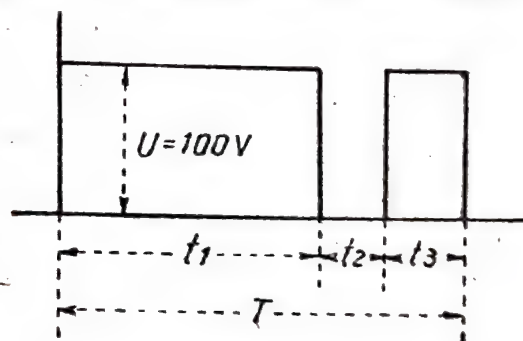


Fig. 13.21

Să se determine curenul din bobină și să se construiască forma acestui curent pentru intervalul de timp $0 < t < 5t_1$.

13.21. O bobină având o rezistență de 25Ω și o inductanță de 75 mH , este alimentată cu o tensiune corespunzătoare literei H din alfabetul Morse (fig. 13.21) în care $t_2 = t_3 = 10^{-3} \text{ s}$ și $t_1 = 3t_2$.

Se cere :

- a) să se determine legea de variație a curentului în bobină;
 b) să se construiască curba reprezentativă pentru $0 \leq t \leq T + t_2$.

13.22. Se dă circuitul din fig. 13.22 la bornele căruia se aplică tensiunea impuls egală cu $U_1 = 10 \text{ mV}$ pentru $0 < t < t_1$ și nulă în afara acestui interval.

Se cere să se determine curentul de placă al triodei, știind că acesta este proporțional cu tensiunea la grilă u_g .

Ce devine acest curent dacă durata impulsului se reduce de n ori?

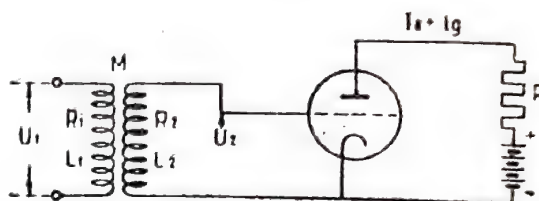


Fig. 13.22.

Aplicații : $R_1 = 10 \Omega$; $L_1 = 0,5 \text{ H}$; $M = 0,2 \text{ H}$; $L_2 = 0,42 \text{ H}$; $R_2 = 35 \Omega$; $t_1 = 0,1 \text{ s}$; $n = 10$.

Se presupune că conductanța circuitului este nulă.

13.23. Aceeași chestiune, în ipoteza că impulsul are forma unei jumătăți de sinusoidă cu amplitudinea $U_{\max} = 10 \text{ mV}$ și perioada (a) $T = 0,2 \text{ s}$; (b) $T = 0,02 \text{ s}$.

13.24. Aceeași chestiune ca mai sus, impulsul fiind de forma unui sfert de cosinusoidă, având aceleași caracteristici.

13.25. Aceiași chestiune, impulsul variind după legea :

$$\begin{aligned} \text{pentru } t < 0 & \quad u = 0 \\ \text{pentru } 0 < t < t_1 & \quad u = U_0 \frac{t}{t_1} \\ \text{pentru } t_1 < t & \quad u = U_0 \end{aligned}$$

în care $U_0 = 10 \text{ mV}$; $t_1 = 0,1 \text{ s}$ și $0,01 \text{ s}$.

13.26. Se dă un circuit format dintr-o rezistență în serie cu o capacitate și alimentat cu tensiunea alternativă sinusoidală $u = U \sqrt{2} \sin(\omega t + \psi)$.

În ce moment trebuie închis întrerupătorul pentru ca în circuit să se stabilească direct regimul permanent. Să se construiască diagrama vectorială corespunzătoare acestui moment.

Ce devine această condiție și diagrama respectivă dacă tensiunea este de forma

$$u = U \sqrt{2} \cos(\omega t + \psi).$$

13.27. Aceeași chestiune în cazul unui circuit format din o rezistență în serie cu o inductanță.

13.28. În circuitul din fig. 13.28, comutatorul K este pe poziția 1 și regimul permanent este stabilit. La un moment

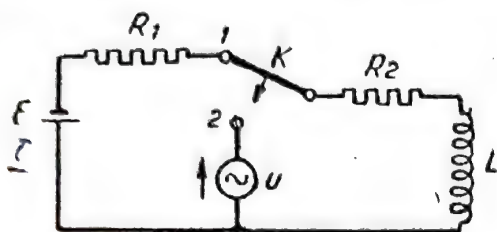


Fig. 13.28

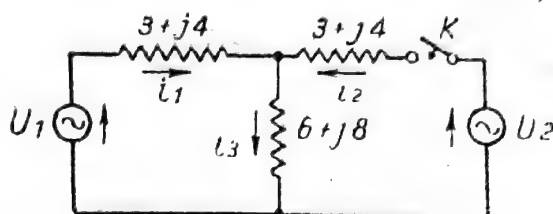


Fig. 13.29

dat, se comută, fără întrerupere, comutatorul K pe poziția 2. În acel moment valoarea tensiunii alternative este $u = \frac{U\sqrt{2}}{2}$ și $\frac{du}{dt} < 0$.

Se cere să se determine: a) curentul care se stabilește în circuit; b) pentru ce valoare a lui ψ nu apare regim tranzitoriu.

Aplicație: $E = 200 \text{ V}$; $u = 141 \sin(314t + \psi) \text{ V}$; $R_1 = R_2 = 10 \Omega$; $L_2 = 0,0318 \text{ H}$.

13.29. Închizându-se întrerupătorul K (fig. 13.29), se cere să se determine curenții din diferitele ramuri, știind că $\bar{U}_1 = \bar{U}_2 = \frac{375}{\sqrt{2}} \angle 90^\circ \text{ V}$.

13.30. Un circuit format dintr-o rezistență R în paralel cu o inductanță L este legat în serie cu o capacitate C pe o sursă constantă U .

Se cere să se determine curenții din cele două ramuri și tensiunea la bornele condensatorului.

Aplicație: $C = 1 \mu\text{F}$, $R = 100 \Omega$, $L = 1 \text{ H}$, $U = 186 \text{ V}$.

13.31. Aceeași chestiune pentru cazul când capacitatea și inductanța se permută una în locul celeilalte.

13.32. Aceeași chestiune pentru cazul când capacitatea și rezistența se permută una în locul celeilalte.

13.33. Un releu, având o rezistență de $8,4 \Omega$ și o inductanță de $0,72 \text{ H}$ este legat la o baterie de acumulatori de 10 V prin conductori având o rezistență de $31,6 \Omega$. Armătura releului este atrasă atunci când curentul atinge valoarea de $0,15 \text{ A}$ și nu este eliberată decât atunci când valoarea lui scade la $0,05 \text{ A}$.

Care este viteza limită cu care trebuie acționat un comutator de scurt circuitare a circuitului pentru ca armătura să înceapă să vibreze?

13.34. O forță electromotoare de E volți este aplicată unei bobine având o rezistență de $R \Omega$ și o inductanță de L H.

Ce cantitate de energie s'a acumulat în câmpul magnetic în momentul în care s'a aplicat f.e.m. bobinei? Care este energia totală înmagazinată în câmpul magnetic?

13.35. Două rezistențe inductive sunt legate în serie și alimentate cu tensiunea alternativă $u = U \sqrt{2} \sin(\omega t + \psi)$. În momentul în care curentul trece prin maxim, se shuntează una din rezistențe. Se cere să se determine curenții din cele două rezistențe și din circuitul de scurt-circuitare.

Aplicație numerică: $R_1 = R_2 = 10 \Omega$, $L_1 = L_2 = 64 \text{ mH}$ $U = 220 \text{ V}$, $f = 50 \text{ Hz}$.

13.36. Un electromagnet, având caracteristicile $R_2 = 5 \Omega$ și $L_2 = 0,6 \text{ H}$, este alimentat de la o sursă de energie electrică constantă de 100 V printr'o linie având caracteristicile $R_1 = 5 \Omega$ și $L_1 = 0,4 \text{ H}$. La un moment dat se produce un scurt-circuit la bornele electromagnetului.

Se cere să se determine valoarea curentului de scurt-circuit la $0,06 \text{ s}$ după producerea scurt circuitului.

13.37. Un cablu de curent continuu monofilar, pentru alimentarea firului de cale a unei rețele de tramvae, poate fi reprezentat printr'un cuadripol în T simetric la care impedanțele serie sunt egale și egale cu jumătate din rezistența cablului ($2R$), iar impedanța transversală este formată din capacitatea cablului (C) în paralel cu rezistența sa de izolație (R_0). Deconectând de la rețea un asemenea cablu în gol, se cere să se determine:

(a) Timpul după care curentul capacitiv de încărcare a cablului a ajuns la 1% din valoarea sa inițială.

(b) Cantitatea de căldură ce se produce în izolația cablului din cauza rezistenței corespunzătoare.

Aplicație numerică: Tensiunea de alimentare a cablului $U = 760 \text{ V}$, $C = 1,5 \mu\text{F}$, $2R = 4 \Omega$, $R_0 = 3 \cdot 10^7 \Omega$

13.38. În circuitul din figura 13.38. întrerupătorul k rămâne închis timpul necesar ca în circuit să se stabilească regimul permanent, după care el se deschide.

Se cere să se determine valoarea inițială a tensiunii la bornele sale în momentul deschiderii.

13.39. În circuitul din figura 13.39. regimul permanent este stabilit pentru cazul când întrerupătorul k este deschis. La timpul $t = 0$ se închide acest întrerupător.

Se cere :

(a) să se determine valoarea inițială și polaritatea mărimilor u_{C1} , u_{C2} și i_L .

(b) Să se scrie ecuațiile integro-diferențiale de funcționare ale circuitului pentru cazul când întrerupătorul k este închis.

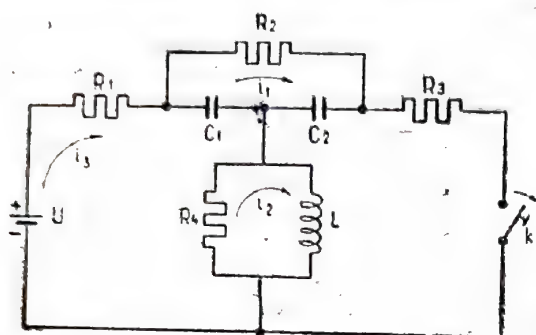


Fig. 13.38.

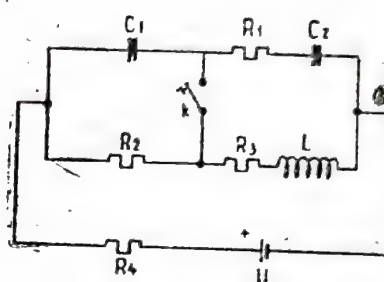


Fig. 13.39.

13.40. Pentru studierea fenomenelor tranzitorii se efectuează un montaj ca acela din figura 13.40. Eclatorul cu sfere G funcționează în momentul când tensiunea la bornele sale atinge o anumită valoare γ , creșterea tensiunii făcându-se lent. În acest moment se produce o descărcare, ca și cum eclatorul a fost descărcat. Tensiunea la bornele rezistenței R_2 se

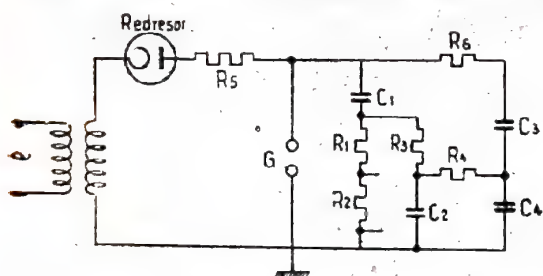


Fig. 13.40.

aplică la bornele unui oscilograf, iar tensiunea de la bornele condensatorului C_2 se folosește pentru producerea fenomenului tranzitoriu în rețeaua studiată.

Se cere :

(a) să se stabilească condițiile inițiale de funcționare ale sistemului.

(b) Să se scrie ecuațiile integro-diferențiale ale circuitului.

13.41. Este posibil să se aplice unui circuit cu R , L , C , o tensiune sinusoidală astfel încât să apară direct regimul permanent fără să mai apară regimul tranzitoriu? Se vor examina cazurile (a) cu condensatorul descărcat la momentul inițial; (b) cu condensatorul încărcat.

13.42. Pentru a absorbi scântea se ce produce la deschiderea unui circuit inductiv, se montează la bornele întrerupătorului un condensator. Dacă se deschide întrerupătorul K

după ce regimul permanent se stabilise în circuit, se cere să se determine :

- (a) tensiunea la bornele întrerupătorului ;
- (b) care este tensiunea maximă la bornele condensatorului și cât timp durează ?

13.43. Se dă circuitul din figura 13.43. Se închide întrerupătorul k obținându-se regimul permanent ; se deschide apoi întrerupătorul k . Se cere să se determine :

(a) Expresia curenților după închiderea întrerupătorului, presupunând că, în momentul inițial toți curenții sunt nuli.

(b) Expresia curentului tranzitoriu din circuitul $abca$. Care este sensul acestui curent ?

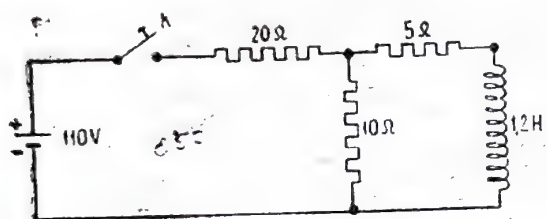


Fig. 13.43.

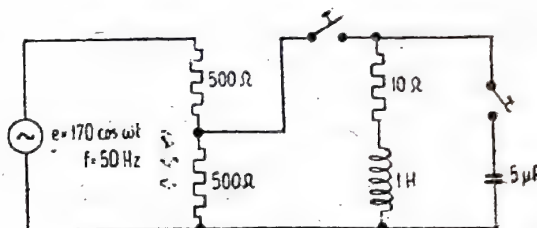


Fig. 13.44.

13.44. In circuitul din figura 13.44, la momentul inițial, condensatorul C este descărcat.

(a) Se cere să se determine curentul din inductanță la închiderea întrerupătorului circuitului din mijloc, dacă această închidere se face în momentul când forța electromotoare trece prin zero descrescând.

(b) După un timp suficient de lung dela închiderea acestui întrerupător, astfel încât să se poată presupune că regimul permanent s'a stabilit, se închide întrerupătorul circuitului din dreapta, în momentul când forța electromotoare are o valoare maximă pozitivă. Se cere să se determine și în acest caz curentul din inductanță.

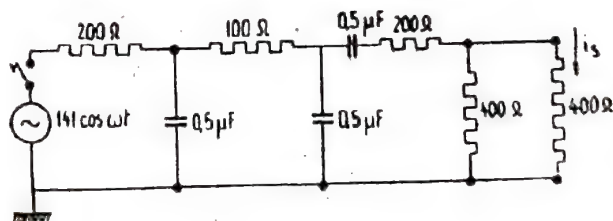


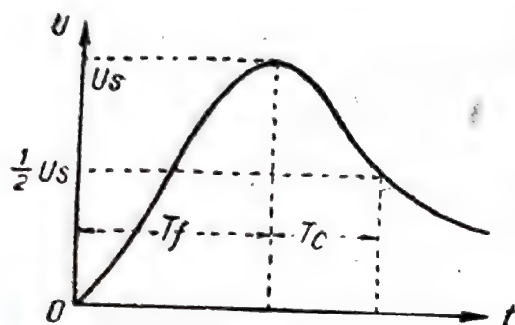
Fig. 13.45.

13.45. Să se determine expresia curentului tranzitoriu i_s în cazul când întrerupătorul se închide la timpul $t = 0$ (fig. 13.45) știind că $\omega = 10\,000$ rad/s.

14. STUDIUL REGIMULUI TRANZITORIU CU AJUTORUL CANTITĂȚILOR COMPLEXE ȘI AL CALCULULUI OPERAȚIONAL

14.1. Un condensator cu pierderi, de capacitate $C = 1 \mu\text{F}$ și $\text{tg } \delta = 0,3925$ la frecvența industrială de 50 Hz, este încărcat la o tensiune continuă U și apoi scurtcircuitat pe o inductanță $L = 4 \text{ H}$. Se cere să se determine regimul liber de descărcare al condensatorului.

(IPB 1951)



U_s = tensiunea de creastă
 T_f = durata frunței unde
 T_c = durata cozii unde

Fig. 14.2 a

14.2. Pentru producerea unde de șoc (fig. 14.2, a) se utilizează un generator de șoc a cărui schemă este dată în fig. 14.2, b.

Dispozitivul funcționează în modul următor: se realizează fruntea unde de șoc cu ajutorul tensiunii alternative care alimentează rezistența R și condensatorul C . În momentul când tensiunea u la bornele condensatorului C atinge valoarea tensiunii de creastă U_s , se produce o descărcare electrică la eclator, a cărui distanță între borne este reglată în consecință. În același moment, un releu deconectează alimentarea astfel că, din acest moment, condensatorul C se descarcă prin rezistența ρ și inductanța L , realizându-se astfel coada unde.

Materialul de încercat X se așează chiar la bornele condensatorului C . Prin urmare, el va trebui să suporte chiar tensiunea condensatorului.

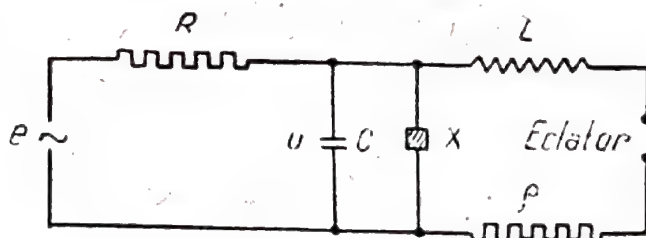


Fig. 14.2 b

Se dă R, C, L, T_f, T_c și se cere să se determine U_s și ρ .

Aplicație: $f = 50 \text{ Hz}$; $R = 0,1 \Omega$; $C = 0,1 \mu\text{F}$; $L = 0,1 \text{ H}$; $T_f = 1 \mu\text{s}$; $T_c = 50 \mu\text{s}$; $E = 500 \text{ kV}$.

14.3. Un transformator trifazat, de 110/35 kV și 1000 kVA, are următoarele caracteristici deduse din încercări:

$U_0 = 36 \text{ kV}$	$\epsilon_K = 17 \%$
$I_0 = 3\% I_n$	$P_K = 39,3 \text{ kW}$
$P_0 = 3,1 \text{ kW}$	$f = 50 \text{ Hz}$

Transformatorul funcționează la plină sarcină cu un factor de putere egal cu 0,7 ind., sarcina fiind presupusă perfect simetrică și echilibrată.

La un moment dat, dintr'o cauză oarecare, sarcina scade la jumătate, iar factorul de putere crește la 0,8 ind.

Să se determine regimul tranzitoriu al curenților din transformator.

14.4. Un circuit este format din două inductanțe, L_1 și L_2 , legate în serie. La bornele inductanței L_2 se cuplează un condensator de capacitate C având o sarcină Q . Se cere regimul de curenți ce se stabilește în circuit.

14.5. În cazul circuitului din problema precedentă se presupune că condensatorul este imperfect și se cuplează după un timp t dela încărcare. Se cere regimul de curenți și în acest caz.

14.6. Se dau două circuite cuplate printr'o inductanță M . Circuitul primar este format dintr'o rezistență R_1 și bobina de cuplaj are inductanța proprie L_1 . Circuitul secundar, având inductanța proprie a bobinei de cuplaj L_2 , este legat pe o rezistență R_2 . La un moment dat la bornele primarului se cuplează un condensator încărcat de capacitate C și având sarcina Q .

Se cere să se determine regimul de curenți ce se stabilește în aceste circuite.

14.7. Un condensator imperfect de $100 \mu\text{F}$, având o conductanță de $400 \mu\text{S}$, este legat în serie cu o inductanță de 100 H și 600Ω pe o sursă de curent continuu de 1000 V .

Să se determine regimul tranzitoriu de stabilire al curentului.

(IPB 1952)

14.8. Să se determine curentul de scurgere la pământ prin dispozitivul de protecție al unui alternator, reprezentat prin schema din fig. 14.8.

Aplicație: $R_1 = 100 \Omega$; $R_2 = 2000 \Omega$; $R_3 = 110 \Omega$; $L = 3 \text{ H}$; $C = 1 \mu\text{F}$; $U = 40 \text{ V}$. (IPB 1952)

14.9. După cât timp dela închiderea întrerupătorului K se stabilește curentul în circuitul plăcii triodei (fig. 14.9)

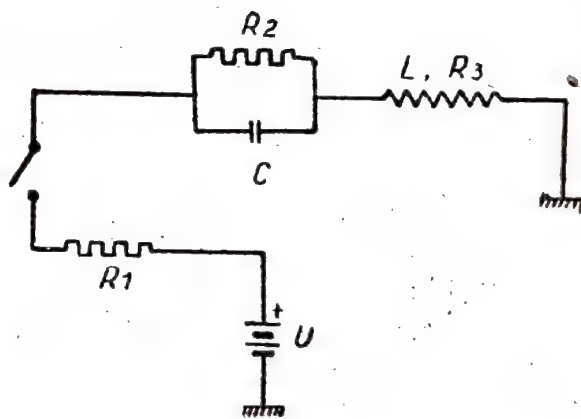


Fig. 14.8

știind că aceasta are loc atunci când tensiunea aplicată grilei este egală cu -5 V ?

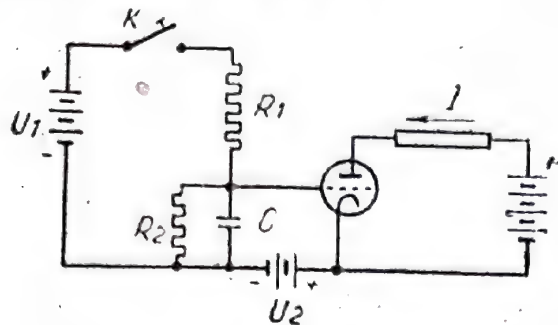


Fig. 14.9

Aplicație: $U_1 = 100\text{ V}$; $U_2 = 55\text{ V}$; $R_1 = 10^4\Omega$; $R_2 = 10^5\Omega$; $C = 0,1\mu\text{F}$.

14.10. Unui circuit format dintr'o inductanță L în serie cu o rezistență R i se aplică un impuls electric $B_0\text{ Vs}$.

Se cere să se determine forma curentului în funcție de timp.

14.11. Aceeași chestiune dar pentru un circuit format dintr'o capacitate C în serie cu o rezistență R .

14.12. Un condensator imperfect, având capacitatea C_1 este legat în serie cu un condensator perfect C_2 ; acestui circuit i se aplică o tensiune constantă U . Se cere să se determine tensiunea la bornele acestor condensatori și să se construiască curbele reprezentative pentru cazul $C_1 = C_2$ și $RC_1 = 10^{-3}\text{ s}$.

14.13. O inductanță perfectă L este shuntată cu o rezistență R iar circuitul astfel obținut este legat în serie cu o rezistență inductivă de R ohmi și L henry. Aplicând circuitului tensiunea constantă U , se cere să se determine regimul tranzitoriu al curentilor în diversele elemente ale circuitului.

14.14. Un cuadripol în T având impedanțele serie $R_1 = 4\Omega$ și $R_3 = 8\Omega$ și impedanța derivație $X_2 = \omega L_2 = 0,1\Omega$, are la bornele sale de ieșire legată impedanța $X_3 = \omega L_3 = 0,2\omega\Omega$, ω fiind o pulsație oarecare. Se aplică la bornele de intrare tensiunea constantă $U = 120\text{ V}$. Se cere să se determine:

(a) regimul tranzitoriu al curentilor.

(b) timpul după care curentul în impedanța X_3 este maxim și valoarea acestui maxim.

(c) Energia disipată sub formă de căldură în impedanța R_3 .

14.15. Se cere să se determine curenții și tensiunile la bornele condensatorilor circuitului din fig. 14.15 după deschiderea întrerupătorului.

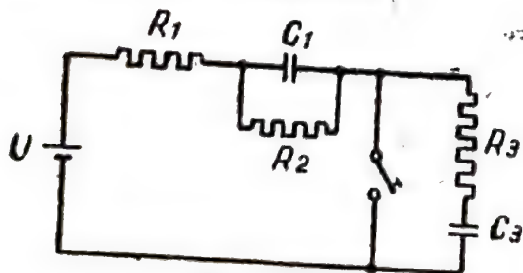


Fig. 14.15

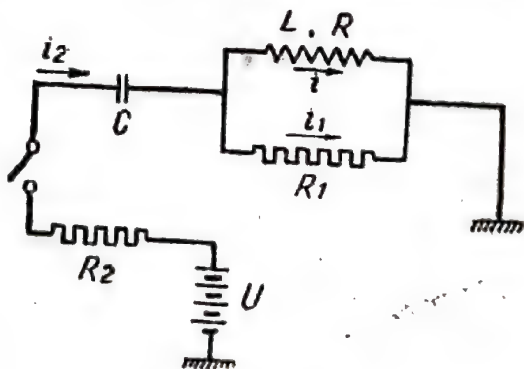


Fig. 14.16

Aplicație: $U = 120 \text{ V}$; $R_1 = R_2 = 10 \Omega$; $R_3 = 30 \Omega$; $C_1 = 1000 \mu\text{F}$; $C_2 = 2000 \mu\text{F}$.

14.16. Să se determine curenții din circuitul dat în fig. 14.16 în momentul închiderii întrerupătorului.

Aplicație: $U = 80 \text{ V}$; $R = 100 \Omega$; $C = 2 \mu\text{F}$; $L = 3 \text{ H}$; $R_1 = 250 \Omega$; $R_2 = 800 \Omega$.

14.17. Unui circuit format dintr'un condensator C șuntat cu o rezistență R_2 și legat în serie cu rezistența R_1 i se aplică tensiunea alternativă

$$u = U \sqrt{2} \sin(\omega t + \psi).$$

Se cere să se determine curenții din circuit și tensiunea la bornele condensatorului.

14.18. Aceeași chestiune pentru un circuit ca precedentul în care capacitatea este înlocuită cu o inductanță L .

Aplicație: $R_1 = 100 \Omega$; $R_2 = 250 \Omega$; $L = 1 \text{ H}$; $U = 120 \text{ V}$; $f = 50 \text{ Hz}$

Pentru ce valoare a lui ψ se stabilește dintr'odată regimul permanent?

14.19. Unui circuit format dintr'o capacitate în paralel cu o inductanță și legat în serie cu o rezistență, i se aplică tensiunea alternativă $u = U \sqrt{2} \sin \omega t$.

Se cere să se determine curentul total debitat de sursă și tensiunea la bornele condensatorului.

Aplicație: $U \sqrt{2} = 500 \text{ V}$; $R = 50 \Omega$; $L = 0,3 \text{ H}$; $C = 100 \mu\text{F}$; $f = 50 \text{ Hz}$.

14.20. Două circuite cuplate magnetic au respectiv rezistențe R_1 și R_2 , inductanțele L_1 și L_2 și inductanța mutuală M . Circuitul primar este alimentat de o sursă de tensiune constantă E . Circuitul secundar este închis pe o rezistență, a cărei valoare este cuprinsă în rezistența R_2 . Se cere să se determine expresia curenților în cele două circuite la închiderea circuitului primar, în ipoteza unui cuplaj magnetic perfect, fără dispersiuni ($L_1 L_2 - M^2 = 0$). Se presupune că în momentul inițial curenții din circuite sunt nuli. Să se explice rezultatul.

14.21. Un transformator fără fier are caracteristicile electrice $R_1 = 20 \Omega$, $R_2 = 10 \Omega$, $L_1 = 0,2 \text{ H}$, $L_2 = 0,1 \text{ H}$. Înfășurarea secundară este închisă pe o rezistență a cărei valoare este cuprinsă în rezistența înfășurării secundare. Se aplică transformatorului o tensiune constantă $U = 100 \text{ V}$. Dacă coeficientul de cuplaj al înfășurărilor transformatorului este

$K = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$, se cere să se determine:

(a) Expresia curenților în cele două înfășurări în cazul unui cuplaj perfect fără dispersiuni ($K = 1$) și în cazul când se ține seama de dispersiuni ($K = 0,8$).

(b) Energia disipată în circuitul secundar, în ambele cazuri.

14.22. Impedanța unui dipol este formată din o induc-tanță perfectă L shuntată cu o rezistență R_1 în serie cu un condensator imperfect C având conductanța G_2 . Dipolul este legat în scurtcircuit la extremitatea sa. La bornele dipolului se aplică tensiunea $u = U (1 - e^{-\alpha t})$

Se cere să se determine curentul de încărcare al conden-satorului presupunând că acesta a fost complet descărcat în momentul inițial.

Aplicație numerică: $L = 0.2 \text{ H}$, $R_1 = 100 \Omega$, $C = 50 \mu\text{F}$, $G = 5 \cdot 10^{-3} \text{ S}$, $U = 100 \text{ V}$, $1/\alpha = 5 \text{ s}$.

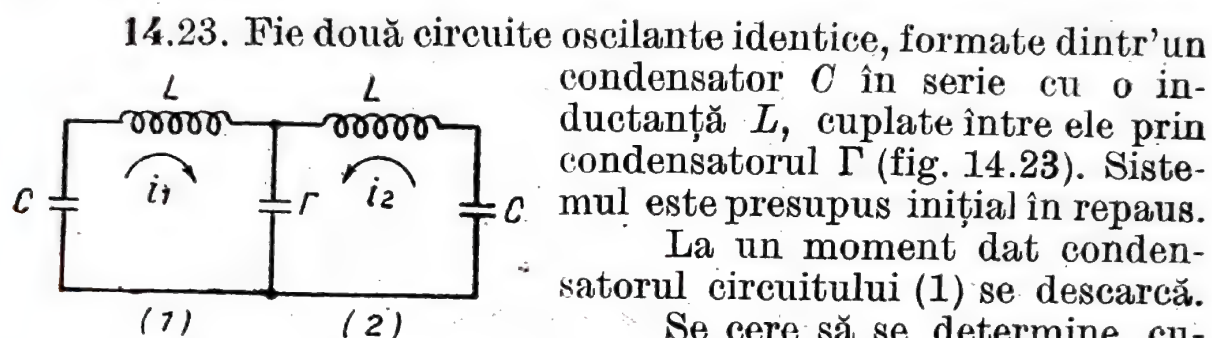


Fig. 14.23

14.24. O bobină (r, L) este conectată la o baterie de acumulatori prin intermediul întrerupătorului k (fig. 14.24). Pentru ca tensiunea U_k la contactele întrerupătorului k , la deschiderea acestuia, să nu depășească tensiunea U_b a ba-teriei de acumulatori, contactele k ale întrerupătorului sunt șuntate prin circuitul de amortizare (R, C).

Să se determine condițiile pe care trebuie să le îndepli-nească parametrii r, R, L și C

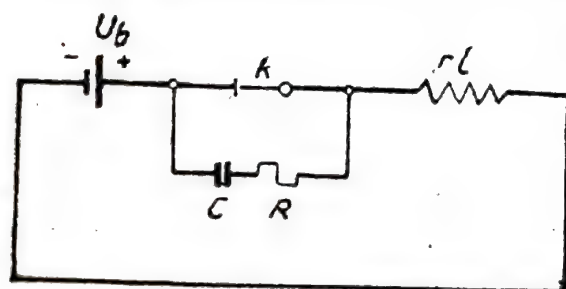


Fig. 14.24

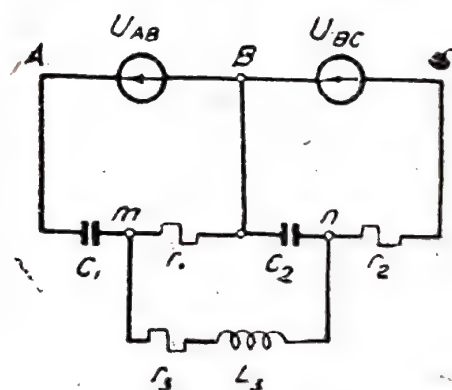


Fig. 14.25

pentru a fi satisfăcută condiția $U_k = U_b$.

14.25. Intr'o rețea trifazată ($A B C$) este conectat un filtru de tensiune de succesiune inversă (fig. 14.25). Tensiunile aplicate filtrului, U_{AB} și U_{BC} , variază în timp și se presupune

că, la un anumit timp, considerat momentul inițial ($t = 0$), ele urmează o anumită lege.

Între punctele m și n de ieșire ale filtrului se conectează un releu.

Se cere să se scrie expresia generală operațională a tensiunii la bornele releului și a curentului ce-l străbate.

14.26. Releul din problema precedentă fiind deconectat ($r_s = \infty$), se cere să se determine tensiunea la bornele m și n ale filtrului în cazul unui scurtcircuit trifazat franc la bornele ABC de intrare ale filtrului.

Să se determine valorile acestei tensiuni pentru $t = 0$ s; $t = 0,01$ s; $t = 0,02$ s din momentul producerii scurtcircuitului, știind că tensiunea rețelei este de 58 V, 50 Hz.

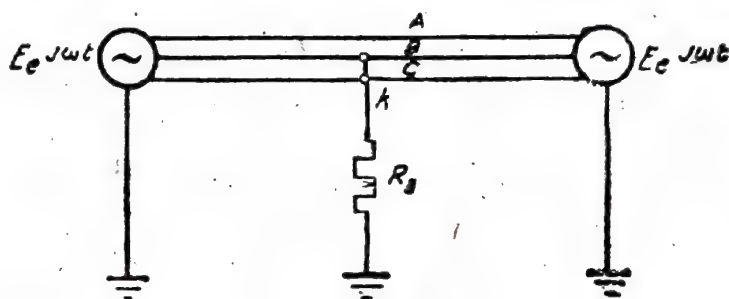


Fig. 14.27

Elementele filtrului satisfac condițiile

$$\frac{1}{\omega C_1} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{\sqrt{3} \omega C_2}$$

14.27. Fiind dată o linie trifazată (fig. 14.27), se cere să se studieze fenomenul tranzitoriu în cazul unui scurtcircuit bifazat, cu punere la pământ. În calcule se va considera sursa infinită.

14.28. Într-o rețea trifazată, alimentată la borne cu un sistem simetric de tensiuni, având valorile eficace $U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = U$ și un defazaj constant ψ , se cuplează un motor asincron, simetric, având înfășurarea legată în stea.

Dacă rezistența și inductanța fiecărei faze a motorului sunt egale cu R și L , se cere să se determine expresia curenților i_a , i_b , i_c .

14.29. La aceeași rețea simetrică se leagă receptorul nesimetric format dintr-o rezistență, o reactanță inductivă și o reactanță capacitivă legate în stea.

Știind că $L\omega = \frac{1}{C\omega} = \frac{R}{\sqrt{3}}$, se cere să se determine curenții absorbiți de sarcină.

14.30. Să se scrie imaginea funcției de tensiune din fig. 14.30. În particular se va examina cazul când la timpuri egale se produc salturi egale.

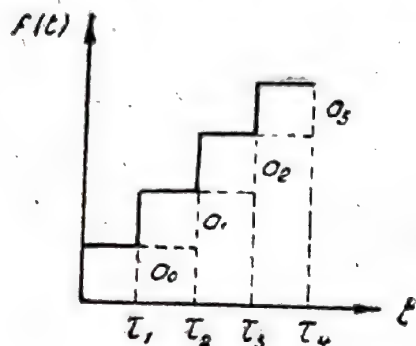


Fig. 14.30

14.31. Să se exprime o tensiune trapezoidală fără și cu ajutorul funcției impuls.

14.32. Se dă un galvanometru cu cadru mobil, având un moment de inerție K , prevăzut cu un resort antagonist având coeficientul de elasticitate B , sistemul fiind cu frecări mecanice caracterizate prin coeficientul A . Cadrul mobil are o rezistență R și o inductanță L ; el se mișcă între polii unui magnet permanent producând un câmp de inducție magnetică B_0 constant. Acest galvanometru este făcut balistic prin legarea la borne a unui condensator de capacitate C .

Se cere să se determine funcționarea acestui galvanometru.

Se presupune că $\Phi_0 = C^t$ pentru toate regimurile de funcționare.

14.33. Două galvanometre, cu cadru mobil, identice, sunt legate între ele, bornă cu bornă. Primul galvanometru este deviat de la poziția lui de echilibru cu un unghi α_0 și apoi este lăsat să oscileze liber. Presupunând că ambele galvanometre erau în repaus la momentul inițial, se cere să se determine:

- Mișcarea celor două cadre mobile.
- Intensitatea curentului din galvanometre.
- Ce se întâmplă dacă în momentul inițial cadrele ambelor galvanometre sunt deviate cu același unghi α_0 , în același sens sau în sensuri contrarii?

Se va neglija inductanța proprie a circuitului.

14.34. O bară grea AB , de lungime l și masă m este așezată perpendicular pe două șine de lungime infinită și supusă unei mișcări uniforme spre dreapta (fig. 14.34) într'un câmp de inducție magnetică uniform perpendicular pe planul figurii. Cele două șine sunt legate la un capăt printr-o rezistență inductivă în paralel cu

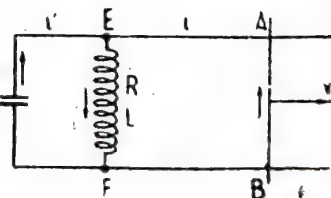


Fig. 14.34

un condensator; toate celelalte rezistențe ale circuitului se presupun neglijabile. Lăsând bara liberă se cere să se determine.

(a) mișcarea barei

(b) curenții în diferitele părți ale circuitului.

Se va examina cazul particular în care, energiile inițiale conținute în condensator, în inductanță și în bară sunt egale.

14.35. Două mașini de curent continuu, cu excitație constantă, sunt legate în opoziție (fig. 14.35). Aceste mașini au amândouă aceeași rezistență interioară r însă momentele de inerție ale indusurilor lor sunt diferite, J_1 și J_2 . Excitația acestor mașini fiind constantă, forța electromotoare a lor este proporțională cu viteza unghiulară respectivă, coeficientul de proporționalitate fiind același pentru ambele mașini. La un moment dat, mașinile având aceeași viteză ω_0 se leagă la bornele acestor mașini o rezistență exterioară R .

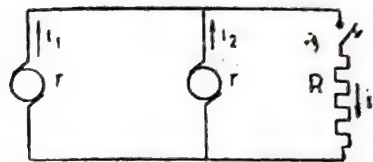


Fig. 14.35

Neglijând frecările mecanice și fenomenele de inducție, se cere să se determine:

(a) Variația vitezei celor două mașini în funcție de timp.

(b) Expresia curenților din cele două mașini și din rezistența exterioară.

Aplicație numerică: $J_1 = 30 \text{ Ws}^2$, $J_2 = 25 \text{ Ws}^2$, $r = 0,12 \Omega$, $R = 10 \Omega$, $n_0 = 600 \text{ rot/mn}$, $U = 240 \text{ V}$.

14.36. Un motor de curent continuu, cu excitația constantă este alimentat de la o baterie de acumulatori având tensiunea la borne egală cu U . Dacă R este rezistența totală a circuitului și se neglijează toate pierderile mecanice, se cere să se determine:

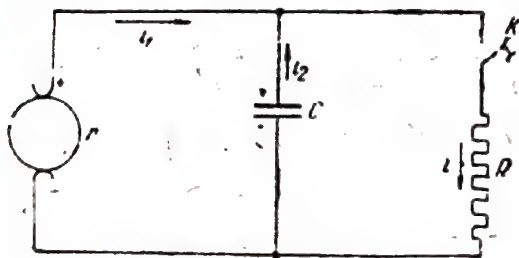


Fig. 14.37

(a) legea de mișcare a mașinei,
(b) intensitatea curentului,
(c) cantitatea de electricitate totală pusă în joc în sistem.

Pentru aplicație numerică se vor folosi datele numerice din problema precedentă.

14.37. O mașină de curent continuu, la care se neglijează toate pierderile mecanice, se rotește cu o viteză ω_0 și menține la bornele sale o diferență de potențial $k\omega_0$. Rezistența interioară a mașinii este r . La bornele mașinii este conectat un condensator de capacitate C (fig. 14.37).

La un moment dat se cuplează la bornele sistemului o rezistență R .

Se cere să se determine

(a) Curenții i_1 debitat de mașină, i_2 în condensator și i din rezistența R .

(b) Legea de descreștere a vitezei mașinii.

(c) Bilanțul energetic al sistemului.

Aplicație numerică: $n_0 = 900$ rot/mn, $U_0 = 220$ V, $r = 0,1 \Omega$, $C = 5 \mu\text{F}$, $R = 10 \Omega$, $J = 20 \text{ Ws}^3$.

14.38. Aceiași chestiune ca și în cazul precedent cu deosebirea că rezistența R este legată în serie cu un condensator de capacitate $C_1 = 10 \mu\text{F}$.

14.39. Un motor de curent continuu, de 24 kW și 240 V, funcționează cu excitație constantă și este legat la rețea fără reostat de pornire.

Viteza nominală a motorului este de 600 rot/mn; indusul are o rezistență de $0,12 \Omega$ și o inductanță de $1 \cdot 10^{-3} \text{ H}$; momentul de inerție al părților în mișcare este de 20 Ws^3 ; reacțiunea indusului se neglijează.

Presupunând că se pornește motorul în gol și că se neglijează toate pierderile, se cere:

a) să se determine curentul de pornire și să se construiască curba reprezentativă;

b) care este expresia acestui curent dacă inductanța mașinii este de $0,05 \text{ H}$?

14.40. Motorul de acționare al unei mașini de extracție este alimentat de la un generator propriu și are excitația constantă. Cuplul static dat de sarcină este constant și egal cu 270 kNm . La un moment dat este necesar a se reduce viteza de regim permanent la jumătate. În acest scop se reduce tensiunea aplicată motorului de la valoarea U_n la valoarea $\frac{U_n}{2}$.

Admițând că cuplurile corespunzătoare pierderilor mecanice și în fier sunt constante și cuprinse în cuplul static dat, se cere să se determine regimul transitoriu al vitezei motorului și al curentului absorbit de acesta.

Datele mașinii sunt: tensiunea nominală 600 V; rezistența indusului $8 \cdot 10^{-3} \Omega$; inductanța indusului $1,13 \cdot 10^{-3} \text{ H}$; momentul de inerție redus al maselor în mișcare (de rotație și translație) 2 MWs^3 . Viteza de regim permanent 44 rot/mn. Căderea de tensiune în indus 3%.

14.41. La bornele unei linii lungi, în scurt circuit la cealaltă extremitate, se leagă, la timpul $t = 0$ un condensator încărcat de capacitate C_k .

Se cere să se determine tensiunea și curentul la capătul de alimentare al liniei.

Linia se presupune fără pierderi.

14.42. O linie lungă, de înaltă tensiune, care a funcționat în gol cu tensiunea U , este scurtcircuitată pentru a se putea lucra la schimbarea unor izolatori.

Se cere să se determine regimul de descărcare al liniei. Linia se presupune fără pierderi.

15. STUDIUL SISTEMELOR NELINEARE

15.1. Un tub electronic (diodă) are caracteristica $i = Au^{3/2}$.

Se cere

(a) Rezistența statică, în funcție de curent sau de tensiune;

(b) Rezistența dinamică, în funcție de curent sau de tensiune.

(c) Dioda fiind montată în circuit în serie cu o rezistență R , să se determine relația între intensitatea curentului din circuit și tensiunea constantă U_0 de alimentare a circuitului.

15.2. O bobină cu miez de fier având $N = 500$ spire și o rezistență a bobinajului $R = 50 \Omega$, se leagă la o baterie de acumulatori de 100 V. Curba de magnetizare poate fi reprezentată prin relația

$$\Phi = \alpha \ln \left(1 + \frac{i}{\beta} \right)$$

în care $\alpha = 9 \cdot 10^{-3}$ Wb și $\beta = 0,1$ A.

Se cere să se determine legea de stabilire a curentului.

15.3. În laturile ab și cd ale unei punți (fig. 15.3) sunt montate două elemente nelineare având caracteristica volt-ampere

$$u = \alpha i^\beta = 100 i^{0.5}$$

În laturile ac și bd sunt montate rezistențele constante $R = 1000 \Omega$, iar în diagonala bc este montată rezistența $R_0 = 250 \Omega$.

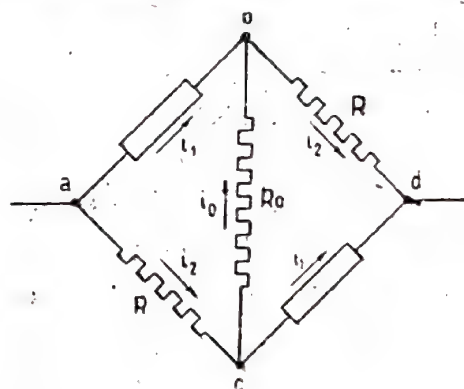


Fig. 15.3

Se cere :

(a) tensiunea u_o cu care trebuie alimentată diagonală ad pentru ca curentul în rezistența R_o să fie nul.

(b) Tensiunea u_o cu care trebuie să fie alimentată diagonală ad pentru ca montajul să poată fi folosit ca stabilizator al curentului din rezistența R_o (aceasta înseamnă că, pentru variații mici ale tensiunii u_o , curentul din rezistența R_o rămâne practic constant).

15.4. O diodă, a cărei caracteristică volt-ampere este

u	0	10	20	30	40	50	60	65	70	75	80
i	0	0,9	2,15	3,75	5,65	7,80	10,20	11,50	12,90	14,25	15,68
	82,5	85	87,5	90	92	94	96	98	100		V
	16,35	17,08	17,80	18,50	19,10	19,70	20,30	20,94	21,60		mA

este legată în serie cu un condensator având capacitatea C . Circuitul fiind alimentat cu o tensiune constantă $E = 100$ V, se cere să se determine curba de variație a curentului la închiderea întrerupătorului (fig. 15.4).

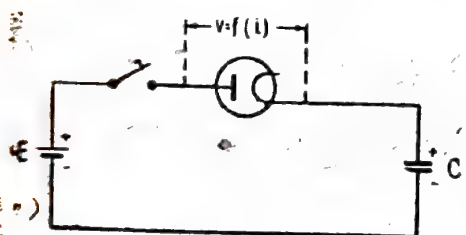


Fig. 15.4

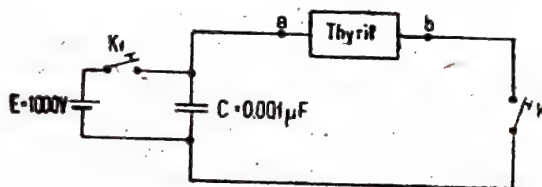


Fig. 15.6

15.5. Aceiași chestiune pentru cazul când dioda este legată în serie cu o inductanță.

15.6. Pentru studierea proprietăților thyritei se realizează un circuit format dintr-un condensator în serie cu materialul de încercat (fig. 15.6). Condensatorul C este încărcat de o sursă exterioară cu o tensiune de 1 000 V, care este apoi îndepărtată. Caracteristica thyritei este dată de relația :

$$v_{ab} = 580 i^{0.28} \text{ V,}$$

în care i este dat în amperi.

Se cere să se determine :

(a) curentul tranzitoriu din circuit ce se stabilește din momentul închiderii întrerupătorului K .

(b) timpul după care acest curent ajunge la $1/10$ din valoarea inițială;

(c) să se compare cu caracteristica obținută în cazul când rezistența de thyrit este înlocuită cu o rezistență lineară de 145Ω .

15.7. Un generator de curent continuu cu excitația în derivație (fig. 15.7a), are circuitul inductor shuntat cu o rezistență constantă din thyrit, a cărei caracteristică volt-amper este dată în figura 15.7b. Deschizându-se întrerupătorul K ,

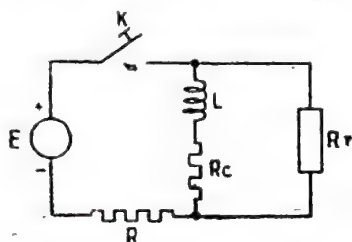


Fig. 15.7a

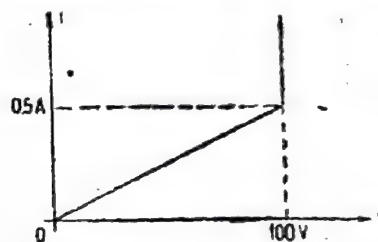


Fig. 15.7b

circuitul de excitație se descarcă în rezistența nelineară din thyrit R_T .

Presupunând că întrerupătorul K se deschide la momentul $t = 0$ și că nu se produce arc la bornele sale, se cere :

- (a) Expresia curentului prin rezistența R_T în funcție de timp.
- (b) Energia disipată în R_T .

Aplicație numerică: $E = 230 \text{ V}$, $R = 100 \Omega$, $R_0 = 60 \Omega$, $L = 120 \text{ H}$.

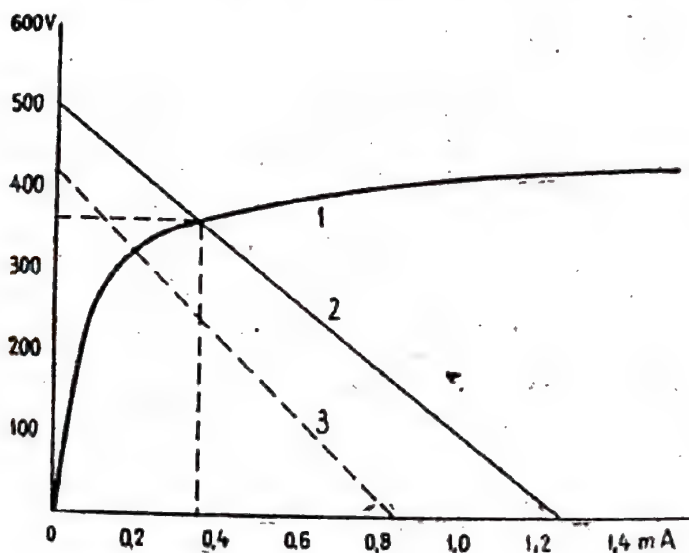


Fig. 15.8

15.8. Caracteristica volt-amper a unui tub tiratron este dată în figura 15.8. În serie cu acest element nelinear se montează o rezistență constantă $R = 0,4 \text{ M}\Omega$. Circuitul este montat la o sursă constantă $U_0 = 500 \text{ V}$.

Să se determine intensitatea curentului din circuit și tensiunea la bornele celor două elemente.

Ce rezistență trebuie montată în circuit pentru ca intensitatea maximă a curentului să fie $i = 0,4 \text{ mA}$?

15.9. Elementul neliniar din problema precedentă este montat în paralel cu o rezistență de $0,5 \text{ M}\Omega$. Dacă curentul total absorbit de montaj este de $0,84 \text{ mA}$, se cere să se determine tensiunea la bornele sale.

15.10. Circuitul magnetic al unui transformator de 100 kVA are o lungime de 240 cm și secțiunea de 1800 cm^2 . Înfășurarea de înaltă tensiune are 1522 spire și funcționează la tensiunea de 60 kV , 50 Hz .

Se cere să se determine curentul de magnetizare a fierului în înfășurarea de înaltă tensiune la legarea bruscă a transformatorului la rețea în momentul când tensiunea are valoarea sa egală cu jumătate din valoarea maximă negativă și crește în sens negativ, tensiunea fiind sinusoidală.

Se presupune că secundarul transformatorului este deschis, iar pierderile magnetice prin scăpări de flux și pierderile ohmice în înfășurarea de înaltă tensiune sunt neglijabile. Caracteristica magnetică a fierului este dată în tabloul de mai jos.

$B \text{ Wb/m}^2$	0	0,10	0,25	0,50	0,60	0,75	1,00	1,25	1,40
$H \text{ mOe}$	1620	1730	1790	2000	2240	3000	4600	11100	20800

$B \text{ Wb/m}^2$	1,40	1,25	1,00	0,90	0,75	0,60	0,50	0,25	0,10	0
$H \text{ mOe}$	20800	11000	4400	3200	1850	1000	500	1020	-1550	-1620

prima dintre aceste linii referindu-se la ramura ascendentă a curbei de magnetizare, iar cea de a doua la ramura descendentă. Curba de magnetizare este simetrică față de axa abscizelor.

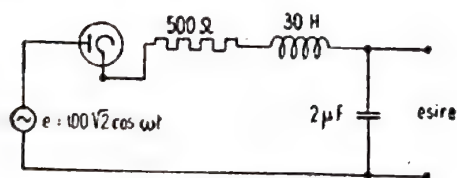


Fig. 15.11

este simetrică față de axa abscizelor.

15.11. Pentru redresarea unei tensiuni alternative de 100 V și 50 Hz se folosește un montaj cu o diodă și un filtru (fig. 15.11).

Presupunând că circuitul funcționează în gol la esire și că tensiunea este aplicată brusc în momentul când valoarea sa este maximă iar polaritatea astfel încât dioda să conducă curentul, se cere să se determine forma tensiunii la bornele de esire ale montajului pentru primele 2 perioade ale tensiunii

de alimentare. Se presupune că condensatorul este inițial descărcat.

Caracteristica diodei este aceea corespunzătoare problemei 15.4.

15.12. Circuitul din figura 15.12 este alimentat cu un curent constant de 0,2 A de generatorul de curent I . Redresorul cu cuproxid, a cărui caracteristică este

$$i = 10^{-4} u^{3/2} \text{ A},$$

în care u este exprimat în volți, este shuntat cu o rezistență ohmică lineară R de 1 000 Ω .

Se cere să se determine :

(a) Intensitatea curenților care străbat redresorul și rezistea.

(b) Dacă rezistența R este înlocuită cu un condensator de 1,0 μF , se cere să se determine tensiunea la bornele redresorului după 10^{-3} s de la închiderea întrerupătorului K .

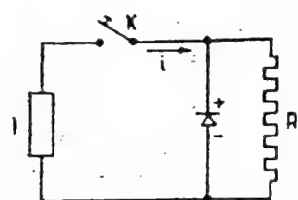


Fig. 15.12.

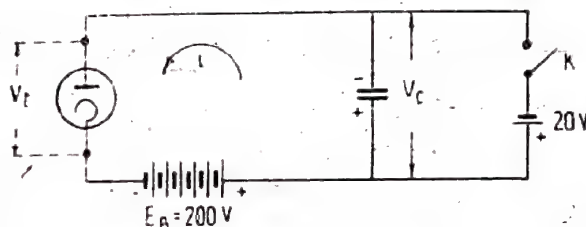


Fig. 15.13.

15.13. Condensatorul C este încărcat prin rezistența nelineară R (un tub electronic) în timp ce întrerupătorul K (o lampă cu neon) este deschis (fig. 15.13). În momentul când tensiunea la bornele condensatorului a atins tensiunea de 120 V întrerupătorul K este închis brusc și condensatorul se descarcă până la tensiunea de 20 V într'un timp de $1,0 \times 10^{-5}$ s. În acest moment întrerupătorul K se deschide și operația începe din nou.

Cunoscând caracteristica tubului electronic și știind că valoarea capacității C este de $5 \cdot 10^{-9}$ F, se cere să se determine frecvența de oscilație a montajului.

Caracteristica tubului electronic este

V_L	200	190	180	170	160	150	140	130	120	110
i	18,8	17,1	15,4	13,8	12,2	10,7	9,3	7,9	6,6	5,3
	100	90	80	70	60	50	40	V		
	1,2	3,2	2,2	1,4	0,8	0,4	0,05	mA		

Nota. Acest montaj se folosește fie ca generator de oscilație fie ca circuit de baleiaj la un oscilagraf catodic. Bateria de 20 V din schemă indică tensiunea reziduală a condensatorului.

15.14. In circuitul din figura 15.14, L reprezintă induc-
tanța bobinei unui releu, a cărei rezistență poate fi neglijată.
In momentul când curentul din bobinajul releului a atins va-
loarea de 20 mA, armătura releului este atrasă; când curentul
a scăzut la 10 mA, armătura este readusă în poziție inițială de ele-
mentul mecanic al releului.



Fig. 15.14.

Dacă se neglijează timpul în care se deplasează armătura, se cere să se determine frecvența la care lucrează releul știind că rezistența neliniară, legată în serie cu bobina releului, este alternativ conectată, prin intermediul întrerupătorului K , la o sursă constantă de energie electrică de 100 V și apoi scurtcircuitată, fără a se întrerupe circuitul.

Caracteristica volt-ampere a circuitului poate fi expri-
mată prin relația

$$i = 22 \times 10^{-6} i^{1.5} \text{ A}$$

15.15. Un circuit electric este constituit dintr-o rezis-
tență, a cărei valoare variază invers proporțional cu rădăcina
pătrată a curentului, în serie cu o inductanță constantă. Aces-
tui circuit i se aplică o tensiune perfect sinusoidală.

Se cere să se stabilească regimul de funcționare a circui-
tului, presupunându-se că în momentul inițial nu există nici un
curent în circuit.

15.16. Se cere să se determine variația tensiunii la bor-
nele întrerupătorului K din problema 13.43, presupunând că
rezistența arcului variază liniar cu timpul.

15.17. In circuitul din figura 15.17 cele două diode
redresoare sunt identice și au aceeași caracteristică volt-ampere
cu dioda considerată în problema 15.4. Se cere:

(a) Intensitatea curenților i_1 , i_2 , i_3 după închiderea între-
rupătorului K . Se presupune că înainte de acest moment nu a
existat niciun curent în circuit.

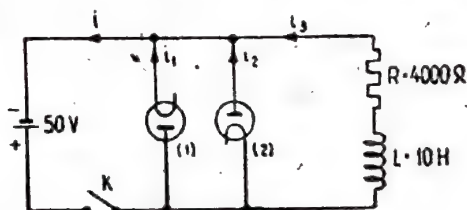


Fig. 15.17.

(b) După ce s'a stabilit regimul permanent în circuit, în urma închiderii întrerupătorului K , acesta se deschide brusc. Să se determine curentul tranzitoriu din inductanța L . După cât timp valoarea curentului i_3 este egală cu jumătate din valoarea pe care a avut-o înainte de deschiderea întrerupătorului K ?

15.18. Pentru redresarea ambelor alternanțe ale unui
curent alternativ cu ajutorul diodelor se utilizează circuitul

dat în fig. 15.18. Diodele au caracteristicile identice cu ale diodei din problema 15.4. Se cere să se determine :

(a) Curentul i_L din inductanță, în funcție de timp, după închiderea întrerupătorului K până în momentul când intră în funcție a doua diodă.

(b) Prima diodă este gata să funcționeze în momentul în care a doua diodă încetează de a mai funcționa ?

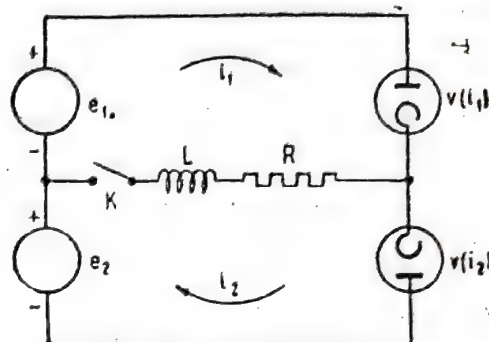


Fig. 15.18.

15.19. Deschiderea circuitelor inductive în curent continuu pune adesea probleme dificile în ceea ce privește stingerea arcului ce ia naștere între contactele întrerupătorului. În studiile ce se fac în problemele asupra întrerupătoarelor corespunzătoare, se face adesea ipoteza că contactele se desfac instantaneu la deschiderea lor maximă. Aceasta conduce la a admite că arcul are o lungime constantă și deci să fie considerat ca o rezistență neliniară simplă în loc a fi considerat ca o rezistență neliniară variabilă în timp. Neglijându-se alte efecte ale arcului, ca spre exemplu schimbul de căldură, caracteristica volt-amper a unui arc de întrerupere în aer a unui întrerupător este dată în următorul tablou

U	230	175	146	113	94,8	81,6
I	0	0,25	0,50	1,00	1,50	2,0
	72,4	65,5	58,6	52,9	47,1	41,4
	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
						V
						A

Un asemenea întrerupător este folosit pentru întreruperea circuitului inductor al unui generator, la care tensiunea de alimentare este de 115 V curent continuu, și având $R = 50 \Omega$ și $L = 26,6 \text{ H}$.

Se cere să se determine în aceste condiții :

(a) Timpul necesar pentru a se deschide circuitul.

(b) Energia disipată în aer.

(c) Tensiunea la bornele rezistenței inductive a inductorului (R și L în serie) în timpul cât durează arcul.

(d) Există vreo condiție care trebuie impusă lui R pentru ca întrerupătorul să poată întrerupe circuitul ?

15.20. Pentru a ușura întreruperea circuitelor inductive, ca acelea din cazul problemei precedente, întrerupătorul este astfel construit că el introduce o rezistență ohmică în paralel

cu circuitul, imediat înainte de a se produce întreruperea. Pentru cazul unui circuit inductor, această rezistență se numește rezistența de descărcare a câmpului.

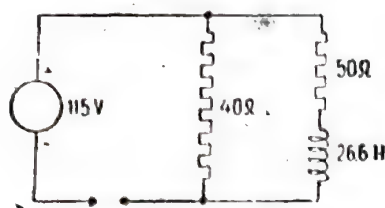


Fig. 15.20

Dacă, în cazul problemei 15.19 se așează în paralel cu circuitul inductor o rezistență ohmică de 40Ω , imediat înaintea deschiderii întrerupătorului (fig. 15.20), se cere să se determine și în acest caz

- (a) Timpul necesar întreruperii circuitului.
- (b) Energia disipată în arc.
- (c) Tensiunea la bornele rezistenței inductive a circuitului în timpul cât durează arcul.

15.21. Fiind dat un generator de curent continuu cu excitație serie și cunoscând caracteristicile circuitului exterior (rezistența și inductanța) se cer condițiile de amorsare ale acestui generator.

15.22. Un generator cu excitație în derivație debitează pe un circuit exterior de rezistență R . Dacă ρ , r sunt respectiv rezistențele indusului și inductorului, L inductanța acestuia și n viteza de rotație, se cere să se determine condițiile de amorsare ale generatorului.

15.23. Ecuația caracteristică a unui sistem de reglaj automat este

$$(1 + p T_1) (1 + p T_2) (1 + p T_3) + K_1 K_2 K_3 = 0$$

în care $T_1 = T_2 = 0,05$ s și $T_3 = 0,5$ s sunt constantele de timp ale elementelor de reglaj, iar $(K_1 K_2 K_3)$ reprezintă factorul total de amplificare al sistemului.

Se cere să se determine valoarea factorului de amplificare pentru ca sistemul să fie la limita de stabilitate.

15.24. Pentru producerea oscilațiilor auto-întreținute cu ajutorul unei triode se efectuează un montaj analog cu acel dat în figura 15.24.

Caracteristica volt-ampere a triodei poate fi exprimată prin relația

$$\rho i = u + K v$$

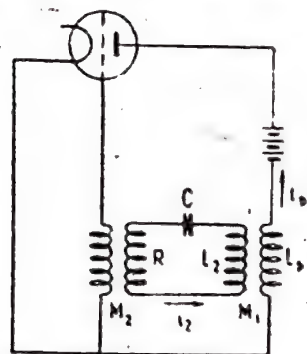


Fig. 15.42

în care i este curentul de placă, u tensiunea anodică, v potențialul grilei, ρ rezistența internă a tubului și K o constantă numită coeficientul de amplificare în volți.

Se cere să se determine valoarea inductanței mutuale M_2 pentru ca circuitul să producă oscilații auto-întreținute.

PARTEA V

UTILIZAREA CALCULULUI MATRICIAL ÎN ELECTRO-TEHNICĂ

16. CALCULUL MATRICIAL GENERAL

16.1. Se dau matricele

$$\|e\| = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \|i\| = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \|A\| = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & -2 \\ 3 & 8 & 9 & -5 \\ 1 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Să se calculeze : a) $\|e\| + \|i\|$; b) $\|e\| \cdot \|i\|$; c) $\|e_t\| \cdot \|i\|$; d) $\|e\| \cdot \|i\|_t$; e) $\|e\| \cdot \|A\|$; f) $\|e\| \cdot \|A\| \cdot \|i\|$; g) $\|e\|_t \cdot \|A\|$.

16.2. Se dă matricea

$$\|C\| = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

Să se calculeze a) $\|C\|^{-1}$; b) $\|C\|^{-1} \cdot \|C\|$.

16.3. Se dă sistemul de ecuații matriciale :

$$\begin{aligned} \|e_1\| &= \|Z_1\| \cdot \|i_1\| + \|Z_2\| \cdot \|i_2\| + \|Z_3\| \cdot \|i_3\| \\ \|e_2\| &= \|Z_4\| \cdot \|i_1\| + \|Z_5\| \cdot \|i_2\| + \|Z_6\| \cdot \|i_3\| \\ \|e_3\| &= \|Z_7\| \cdot \|i_1\| + \|Z_8\| \cdot \|i_2\| + \|Z_9\| \cdot \|i_3\| \end{aligned}$$

Să se elimine $\|i_3\|$ din ultima ecuație, pentru a se obține un sistem de două ecuații.

16.4. Se dau matricele :

$$\|A\| = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad \|B\| = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Să se calculeze a) $\|Z_1\| \cdot \|Z_2\|$; b) $\|Z_2\| \cdot \|Z_1\|$;
c) $\|Z_1\|_t \cdot \|Z_2\|$; d) $\|Z_1\| \cdot \|Z_2\|_t$; în care :

$$\|Z_1\| = \begin{bmatrix} \|A\| & & \|B\| \\ & \|B\|_t & \\ \|B\| & & \|A\|_t \end{bmatrix} \quad \|Z_2\| = \begin{bmatrix} \|A\|_t & \\ & \|B\| \\ \|B\| & \|A\| \end{bmatrix}$$

16.5. Se dă ecuația matricială :

$$\begin{bmatrix} e \\ \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ F & G & H & J \\ K & L & M & N \\ P & Q & R & S \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_d \end{bmatrix}$$

Se cere să se rezolve această ecuație eliminându-se una câte una necunoscutele.

16.6. Se dă sistemul de ecuații :

$$\begin{aligned} x + y + z + u + v &= 3 \\ x + 2y + 2z + 3u + 4v &= 9 \\ 2x + y - 2z + 2u - 3v &= 16 \\ 3x + 2y + 3z + 4u + v &= 2 \\ -x + y - 4z + 4u + 2v &= -12 \end{aligned}$$

Să se determine numai necunoscutele x și y .

16.7. Aceeași chestiune pentru sistemul :

$$\begin{aligned} 2 &= 3x + 4y - 2z + 6u - v \\ 0 &= 2y + 7u \\ -3 &= x - y + z + v \\ 0 &= x + z + 3u \\ 1 &= 3y - z + 2v \end{aligned}$$

16.8. Să se diferențieze matricele în raport cu variabila independentă :

a)

1	0	0
0	$\cos \theta$	$-\sin \theta$
0	$\sin \theta$	$\cos \theta$

b)

1	$\cos \omega t$	1
$\sin \omega t$	1	$\sin \omega t$
1	$\cos \omega t$	1

16.9. Să se deriveze matricea :

$$\| e \| = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c \end{matrix} \\ \begin{matrix} \cos x_m & 2 & \sin x_k \end{matrix} \end{matrix}$$

în raport cu matricea :

$$\| x \| = \begin{matrix} m \\ n \\ k \end{matrix} \begin{matrix} x_m \\ x_n \\ x_k \end{matrix}$$

16.10. Să se integreze matricele :

a)
$$\begin{bmatrix} 2 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

b)
$$\begin{bmatrix} & \cos \omega t \\ 1 & \sin \omega t \end{bmatrix}$$

16.11. Să se integreze matricea :

$$\| A \| = \begin{array}{c} a \qquad b \qquad c \\ \begin{bmatrix} \cos x_a & 3 & \sin x_c \end{bmatrix} \end{array}$$

în raport cu matricea :

$$\| dx \| = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \begin{bmatrix} dx_a \\ dx_b \\ dx_c \end{bmatrix}$$

16.12. Aceeași chestiune pentru matricea :

$$\| B \| = \begin{array}{c} a \qquad b \qquad c \\ m \begin{bmatrix} \cos \omega x_a & & \cos \omega x_c \end{bmatrix} \\ n \begin{bmatrix} 1 & \sin \omega x_b & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

16.13. Să se scrie conjugatele matricelor :

a) $\| e \| = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 - je_3 \end{bmatrix}$; b) $\| e \| = \begin{bmatrix} \varepsilon j\theta & \\ & \varepsilon - j\theta \end{bmatrix}$

c) $\| Z \| = \begin{bmatrix} p - jp\theta & Z\varepsilon^{ja} \\ Z & p + jp\theta \end{bmatrix}$

16.14. Se dă matricea :

$$\|C\| = \begin{matrix} & \begin{matrix} h & d & i \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

în care $a = 1 \angle 120^\circ$. Să se calculeze : a) $\|C\|^{-1}$; b) $\|C_t\|^{-1}$; c) $\|C\|^*$; d) $\|C_t\|^*$; e) $\|C^*\|^{-1}$; f) $\|C_t^*\|^{-1}$.

16.15. Să se deducă printr'un calcul direct, regula de stabilire a inversei unei matrice date.

17. STUDIUL REȚELOR ELECTRICE

17.1. Fiind dată rețeaua din fig. 17.1, se cere să se calculeze $\|C\|$, $\|e'\|$ și $\|Z'\|$ ale acestei rețele.

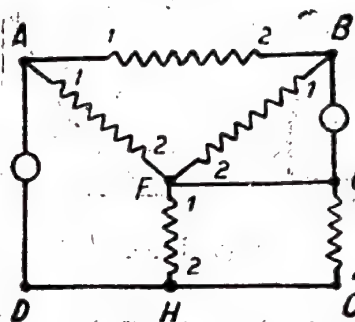


Fig. 17.1

17.2. Aceeași chestiune pentru rețeaua din fig. 17.2.

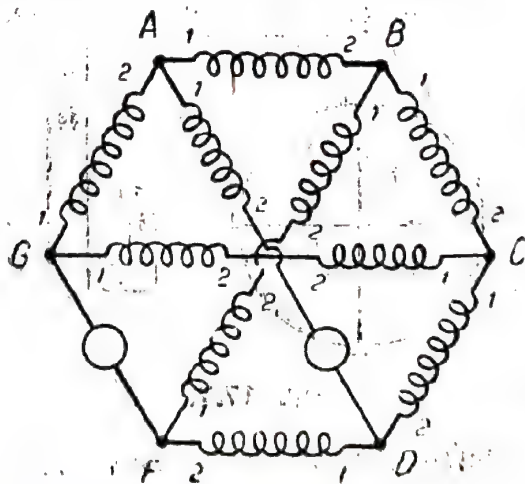


Fig. 17.2

17.3. Se cere să se determine ecuația de legătură dintre curenți a circuitului din figura 17.3.

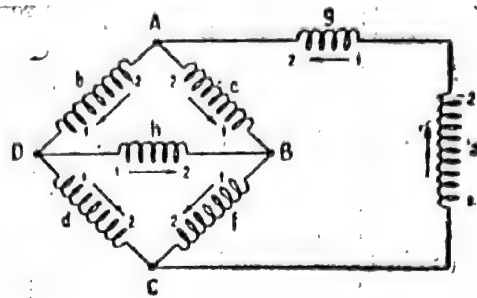


Fig. 17.3.

17.4. Să se scrie ecuația de legătură a curenților unui transformator cu cinci înfășurări și să i se determine matricea $\|C\|$.

17.5. Să se găsească matricele $\|C_1\|$, $\|C_2\|$ și $\|C\|$ ale unui transformator trifazat simetric cu conexiunea stea-zig-zag.

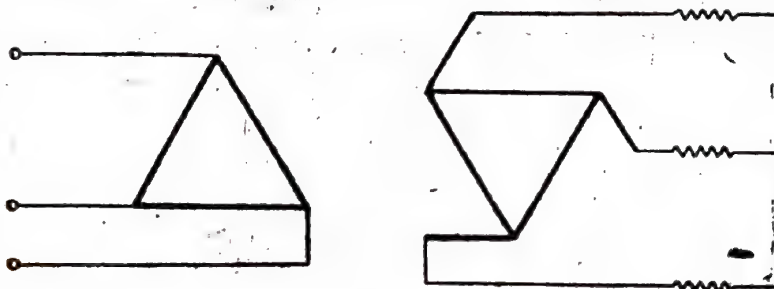


Fig. 17.6.

17.6. Să se stabilească matricea de conexiune pentru transformatorul având conexiunea dată în figura 17.6.

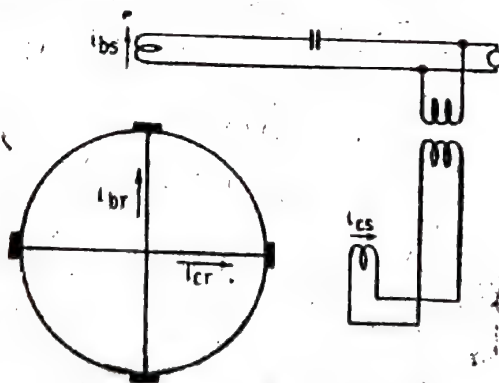


Fig. 17.7.

17.7. Să se stabilească matricea de conexiune a unui motor legat la o rețea electrică (fig. 17.7).

17.8. Se dă rețeaua în formă de punte (fig. 17.8) în care

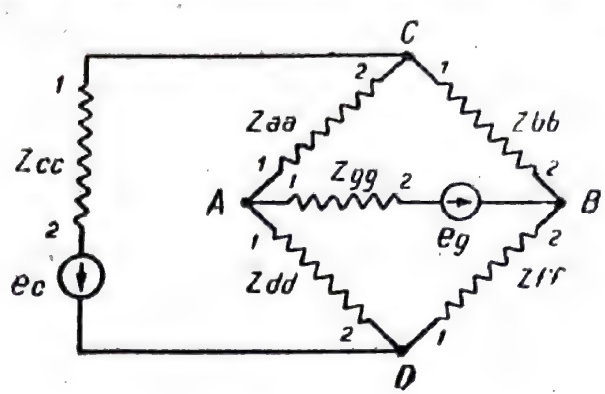


Fig. 17.8

avem inducție mutuală între $Z_{aa} - Z_{bb}$ și $Z_{dd} - Z_{ff}$.

Să se determine curenții în fiecare ramură și diferența de potențial la bornele fiecărui element.

Să se deducă apoi condiția de echilibru a punții Wheatstone.

17.9. Matricea de impedanță a mașinii din fig. 17.9 fiind

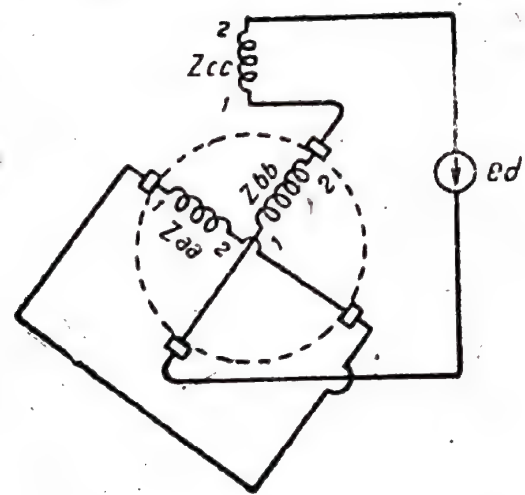


Fig. 17.9

$$\| Z \| = \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & R_a + pL_a & M_1 p \theta & pM_2 + M_3 p \theta \\ \hline b & -M_3 p \theta & R_b + pL_b & pM_4 + M_5 p \theta \\ \hline c & pM_6 & pM_7 & R_c + pL_c \end{array}$$

se cere : 1^o) să se determine matricele $\| C \|$ și $\| Z' \|$.
 2^o) să se scrie cele două ecuații diferențiale de funcționare ale mașinii.

17.10. Se dă un cub cu muchiile formate din rezistențe egale cu $1\ \Omega$ fiecare. Se cere să se determine :

- 1^o Matricele $\|C\|$ și $\|Z'\|$.
- 2^o Impedanța echivalentă între două vârfuri oarecare ale cubului.

17.11. Să se determine matricea de conexiune care trans-

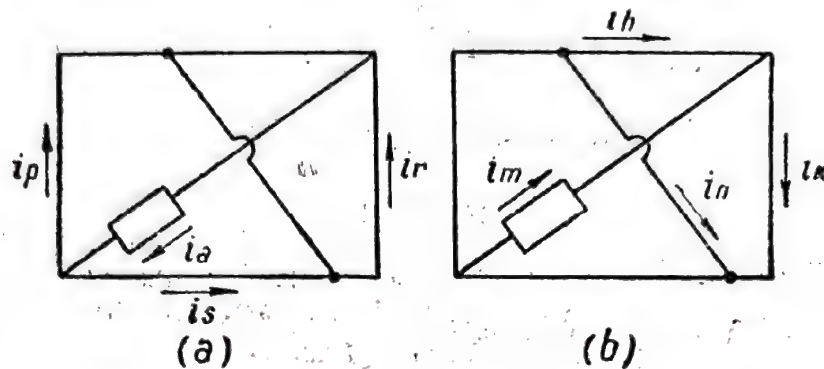


Fig. 17.11

formă rețeaua (a) în rețeaua (b) (fig. 17.11).

17.12. Să se determine matricea de conexiune care transformă curenții reali din laturile rețelei (a) în curenții ciclici din laturile rețelei (b) (fig. 17.12).

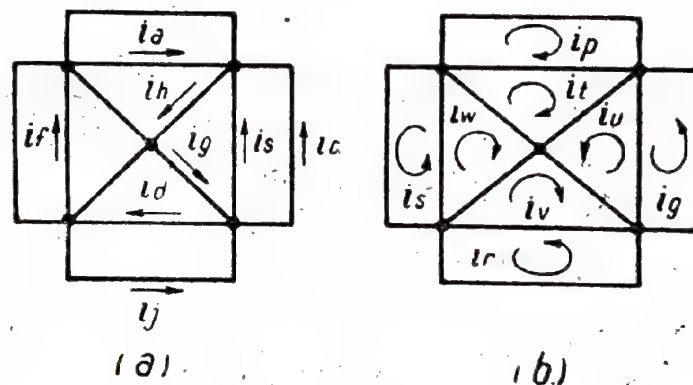


Fig. 17.12

17.13. Să se determine matricea de conexiune a rețelei

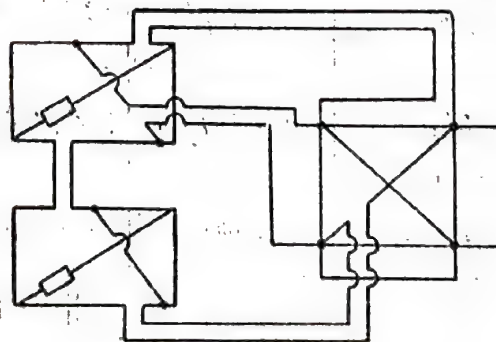


Fig. 17.13

interconectate formată din rețelele din figurile 17.11, *a* și *b*.
și 17.12; *a*. (fig. 17.13).

17.14. Se dau următoarele mașini : *a*) un motor de repulsie având schema din fig. 17.14, *a*, și matricele

$$\| Z_1 \| = \begin{array}{c} s \\ r \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline R_s + pL_s & M \cos \alpha p \\ \hline M (\cos \alpha p - \sin \alpha p \theta_1) & R_r + pL_r \\ \hline \end{array} ; \| e_1 \| = \begin{array}{c} s \\ r \end{array} \begin{array}{|c|} \hline e_g \cdot 1 \\ \hline \end{array}$$

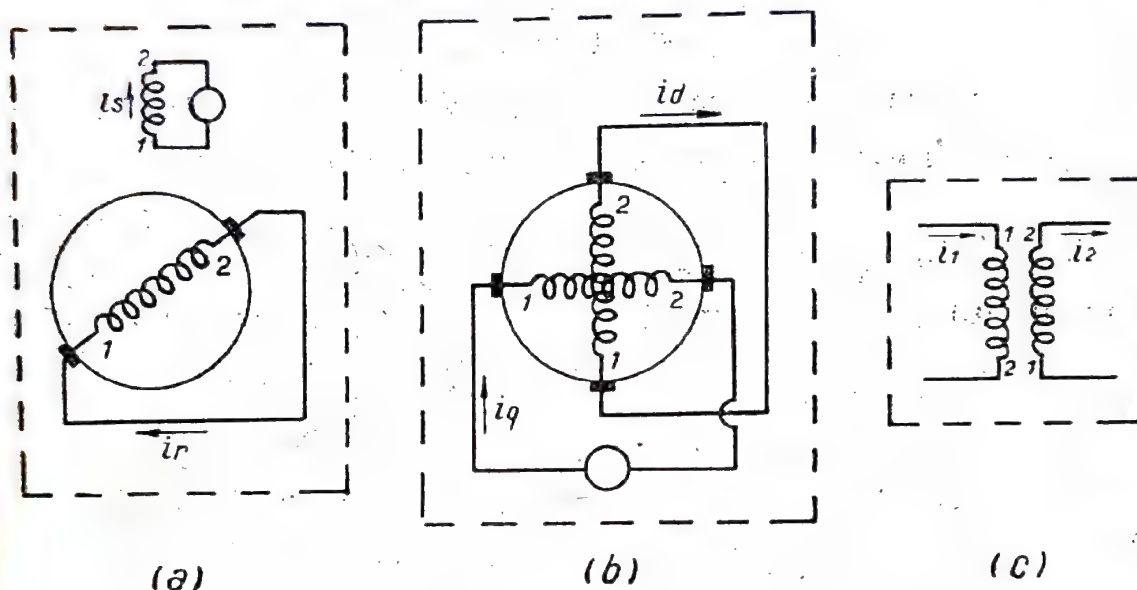


Fig. 17.14

b) un generator de curent alternativ, având schema din fig. 17.14, *b* și matricele

$$\| Z_2 \| = \begin{array}{c} d \\ q \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline R + pL & Lp\theta \\ \hline -Lp\theta & R + pL \\ \hline \end{array} ; \| e_2 \| = \begin{array}{c} d \\ q \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline e_q \cdot 1 \\ \hline \end{array}$$

c) un transformator, având schema din fig. 16.9, *c* și matricele

$$\| Z_3 \| = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline R_1 + pL_1 & pM_{12} \\ \hline pM_{12} & R_2 + pL_2 \\ \hline \end{array} ; \| e_3 \| = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array}$$

Se cere să se determine matricele de impedanță și tensiune ale complexului de mașini având schema dată în fig.

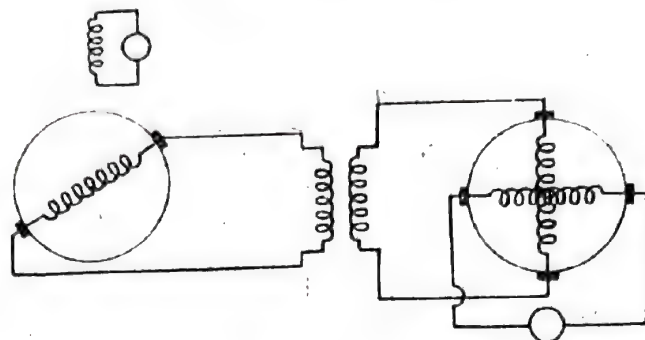


Fig. 17.14 d

17.14, d. In aceste expresii, p reprezintă simbolul de derivare $\frac{d}{dt}$, 1 este funcția unitate și $p\theta$ viteza mașinii.

(IPB 1951)

17.15. Circuitul echivalent al unei triode poate fi reprezentat printr'un cuadripol simplu, de ex. un transformator fără fier

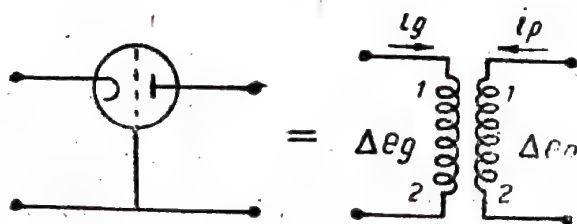


Fig. 17.15 a

(fig. 17.15, a). Dacă matricea de impedanță a unei asemenea triode este

$$\|Z\| = \frac{1}{1 - \mu_g \mu_p} \begin{array}{c|c} g & p \\ \hline r_g & -\mu_g r_p \\ \hline -\mu_p r_g & r_p \end{array}$$

se cere să se determine matricea $\|Z'\|$ a montajului din fig. 17.15, b.

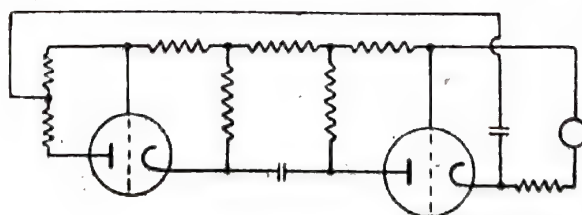


Fig. 17.15 b

17.16. Se dă rețeaua din fig. 17.16,

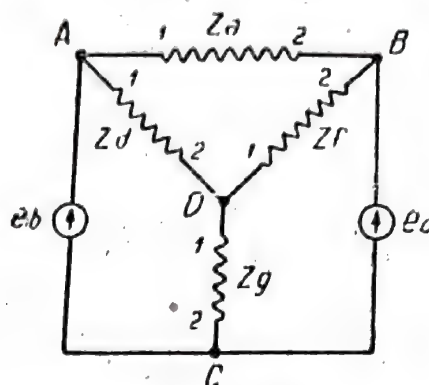


Fig. 17.16

în care $Z_a = 1 \Omega$, $Z_b = 1,5 \Omega$, $Z_f = Z_g = 2 \Omega$, $e_b = 200 \text{ V}$, $e_c = 100 \text{ V}$.

Se cere să se determine, cu ajutorul calculului matricial, curenții din diversele ramuri și puterea absorbită de rețea. Cum se împarte această putere între cele două mașini? Să se explice rezultatul.

(IPB 1951)

17.17. Fie rețeaua din fig. 17.17, în care: $Z_a = 2 \Omega$, $Z_b = 3 \Omega$, $Z_c = 1 \Omega$, $Z_d = 2 \Omega$, $Z_f = 8 \Omega$, $\bar{e}_d = 400 + j200 \text{ V}$, $\bar{e}_f = 200 - j200 \text{ V}$.

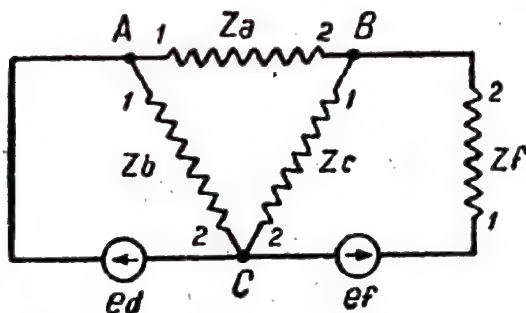


Fig. 17.17

Se cere să se determine:

- curenții din diversele ramuri;
- puterea absorbită de rețea; să se explice rezultatul;
- diferența de potențial la bornele fiecărui element.

(IPB 1952)

17.18. Aceeași chestiune dar pentru rețeaua la care:

$Z_a = 1 \Omega$, $Z_b = 2 \Omega$; $Z_c = 5 \Omega$, $Z_d = 6 \Omega$, $Z_f = 2 \Omega$,
 $\bar{e}_d = 220 - j220 \text{ V}$, $\bar{e}_f = 220 + j110 \text{ V}$.

(IPB 1952)

17.19. Fie rețeaua dată în fig. 17.19 în care
 $\bar{Z}_a = 3 + j4 \Omega$; $\bar{Z}_b = 2 + j2 \Omega$; $\bar{Z}_c = 1 - j3 \Omega$; $\bar{Z}_f = 0 + j5 \Omega$;
 $\bar{e}_d = 100 + j0 \text{ V}$; $\bar{e}_f = 100 + j100 \text{ V}$.

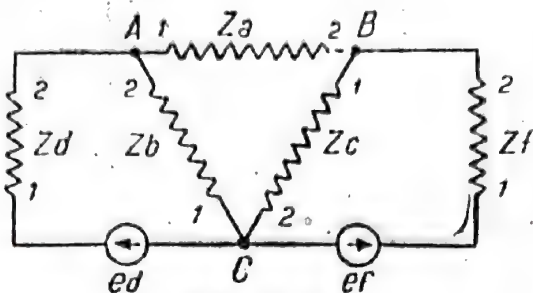


Fig. 17.19

Se cere să se determine :

- ecuația de funcționare a rețelei în regim permanent;
- curenții din diversele ramuri;
- puterea absorbită în rețea.

17.20. Aceeași chestiune pentru rețeaua din fig. 17.20 în care $\bar{Z}_a = 2 + j3 \Omega$; $\bar{Z}_b = 5 + j3 \Omega$; $\bar{Z}_c = 1 - j2 \Omega$, $\bar{Z}_d = 3 \Omega$, $\bar{Z}_f = j5 \Omega$, $e_g = 100 \text{ V}$ și $e_c = 220 \text{ V}$.

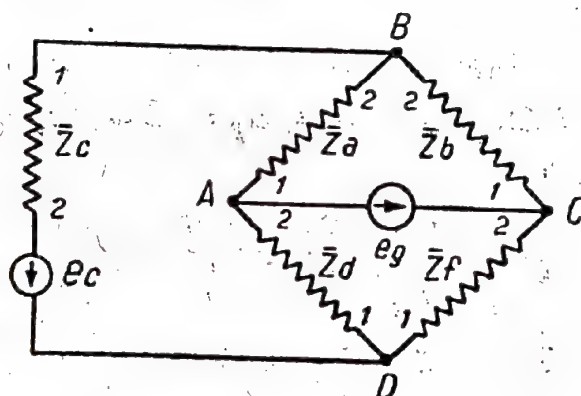


Fig. 17.20

17.21. Se interconectează rețelele din problemele precedente, obținându-se rețeaua din fig. 17.21.

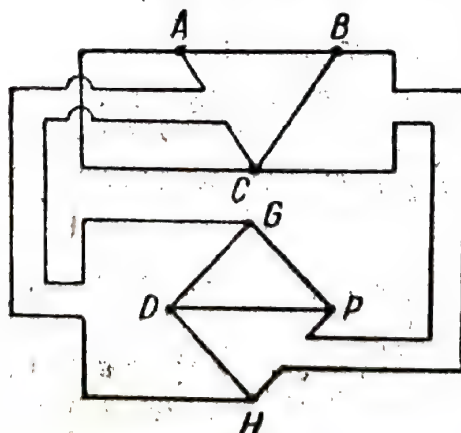


Fig. 17.21

Se cere să se determine ecuația de funcționare a noii rețele în regim permanent.

17.22. Un alternator, perfect simetric, funcționează în scurtcircuit între două faze și la pământ fără arc. Alternatorul are neutrul legat la pământ printr-o impedanță Z_g .

Cunoscându-se impedanțele sincronă, asincronă și de nul ale alternatorului, se cere să se determine curenții debitați de alternator și tensiunile pe fază în timpul funcționării pe defect.

Aplicație: $\epsilon_s = 10\%$; $\epsilon_a = 15\%$; $\epsilon_0 = 5\%$; $U = 6 \text{ kV}$; $S = 16 \text{ MVA}$; $Z_0 = j 15 \Omega$.

17.23. Un alternator simetric, având tensiunea între faze de 10 kV , tensiunile de scurtcircuit $\epsilon_s = 5\%$, $\epsilon_a = 8\%$, $\epsilon_0 = 3\%$ și puterea $S = 10 \text{ MVA}$, alimentează o sarcină nesimetrică legată în stea, având impedanțele $Z_{aa} = j 0,5 \Omega$, $Z_{bb} = j 1 \Omega$, $Z_{cc} = j 2 \Omega$. La un moment dat se produce un scurtcircuit între fazele 2 și 3 ale sistemului.

Se cere să se determine curenții în circuit și forțele electromotoare ale sistemului.

17.24. Un alternator trifazat, simetric, având impedanțele \bar{Z}_s , \bar{Z}_a , \bar{Z}_0 , are neutrul pus la pământ prin impedanța \bar{Z}_g și alimentează o sarcină trifazată, izolată de pământ. Sarcina are impedanțele \bar{Z}_d și \bar{Z}_t . La un moment dat apare între fazele 2 și 3 și la pământ un scurtcircuit fără arc electric.

Se cere să se determine curenții și tensiunile la alternator și sarcină ce apar în timpul scurtcircuitului.

Aplicație numerică: $S = 1$, $e = 1$, $\epsilon_s = 12\%$, $\epsilon_a = 15\%$, $\epsilon_0 = 5\%$, $\bar{Z}_0 = j 20$, $\bar{Z}_d = j 35$, $\bar{Z}_t = j 12$.

17.25. Un alternator simetric având impedanțele \bar{Z}_s , \bar{Z}_a , \bar{Z}_0 , alimentează o sarcină echilibrată în triunghi, impedanța fiecărei faze fiind \bar{Z} . Dacă la un moment dat se produce un defect între două faze printr-o impedanță \bar{Z}_A , se cere să se determine curenții în fiecare element și tensiunile la bornele respective în timpul defectului.

17.26. Cunoscându-se matricele cuadripolilor serie și paralel, să se determine matricele cuadripolului din fig. 17.26.

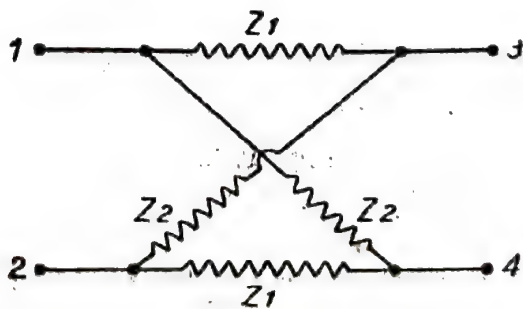


Fig. 17.26

- 17.27. Să se determine matricele unui transformator.
 17.28. Aceiași chestiune pentru două transformatoare legate în cascadă.
 17.29. Să se rezolve problema 5.35 cu ajutorul calcului matricial.
 17.30. Idem problema 5.36.
 17.31. Idem problema 5.37.
 17.32. Un cuadripol simetric în T , shuntat cu o rezistență (fig. 17.32) are o impedanță de undă constantă și egală cu Z . Să se determine matricele acestui cuadripol.

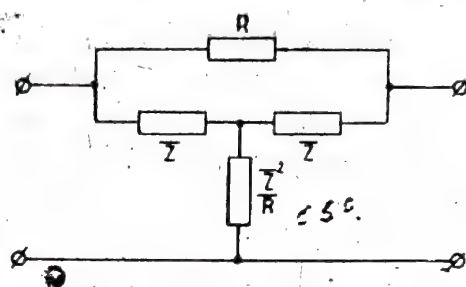


Fig. 17.32

- 17.33. Se dă rețeaua din figura 17.33. care poate fi considerată ca un cuadripol având bornele A și C de eșire și bornele E și F de intrare. Dacă prin bornele de intrare circulă curentul $I_2 = 5$ A și prin bornele de eșire circulă curentul $I_7 = 10$ A, se cere să se determine tensiunea la bornele de intrare și de eșire ale cuadripolului.

Se presupune că toate impedanțele circuitului sunt egale între ele și egale cu 1Ω .

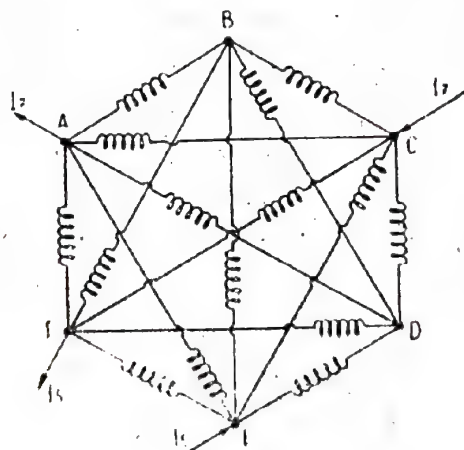


Fig. 17.33

- 17.34. Fiind dată o punte Wheatstone, se cere să se deducă cu ajutorul regulilor de calcul matricial, metoda de calcul a punții cu ajutorul circuitelor independente.

17.35. Se aplică buclei (1) a circuitului oscilant din fig. 17.35 o forță electromotoare unitate $e(t)$, caracterizată prin

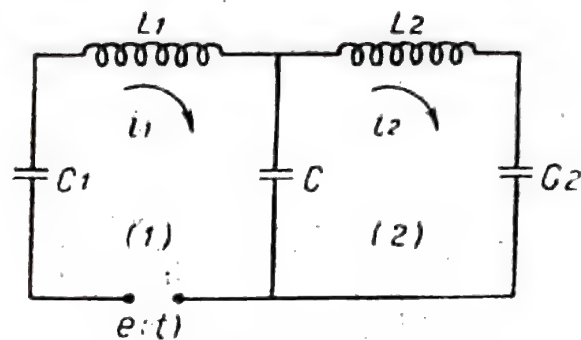


Fig. 17.35

următoarea lege

$$\begin{aligned} \text{pentru } t < 0, \quad e(t) &= 0 \\ \text{pentru } t > 0, \quad e(t) &= E_0. \end{aligned}$$

Să se determine curenții în cele două bucle știind că, la $t = 0$, atât curenții cât și sarcinile condensatorilor sunt nule.

RĂSPUNSURI ȘI INDICAȚII

PARTEA I

1. 1.1. Intr'un sistem de axe de coordonate ortogonal, pe abscisă se figurează partea reală a numărului complex, iar pe ordonată se figurează partea complexă a acestuia. Se ia aceeași scară pentru ambele mărimi și se ține seama de semnul lor. Se găsește un vector în primul cadran, având modulul :

$$|V| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

și care face cu axa absciselor unghiul φ dat de relația :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{4}{3} = 1,33 \dots \quad \dots \varphi = 53^\circ 08'$$

1.2. În cadranul 2, cu $|V| = 6,33$ și $\varphi = 108^\circ 26'$.

1.3. Cadranul 3 cu $|V| = 4,123$ și $\varphi = 194^\circ = -166^\circ$.

1.4. Cadranul 4 cu $|V| = 2\sqrt{2}$ și $\varphi = 315^\circ = -45^\circ$.

1.5. Se ia ca origine de fază o axă orizontală. Direcția vectorului căutat se determină construindu-se unghiul $\pi/5 = 36^\circ$ în sensul trigonometric (antiorar); pe această direcție se ia, la scara aleasă, lungimea 4 reprezentând modulul vectorului. Se obține un vector în cadranul I.

1.6. $0,2 \text{ rad.} = 11^\circ 46'$. Se ia modulul în direcția opusă; se obține un vector în cadranul III.

1.7. $14 \text{ rad} = 800^\circ = 720^\circ + 80^\circ$; se obține un vector în primul cadran.

1.8. $-1 \text{ rad} = -57^\circ 18'$; se obține un vector în cadranul IV.

1.9. Se procedează ca și în cazurile precedente (problema 1.5). Cadranul I.

1.10. Cadranul II.

1.11. Cadranul III.

1.12. Cadranul IV.

1.13. Cadranul III.

1.14. Cadranul IV.

1.15. Cadranul II.

1.16. Se aplică relațiile :

$$|V| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{și} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}.$$

Se găsește ușor : $5 \angle 53^\circ 08'$; $6,325 \angle 108^\circ 26'$; $4,123 \angle 194^\circ$ sau $4,123 \angle -166^\circ$;

$$2\sqrt{2} \angle 315^\circ = 2\sqrt{2} \angle -45^\circ.$$

1.17. Pentru determinarea lui V se procedează ca în exercițiul precedent. Unghiul se exprimă de obicei în radiani; această valoare se găsește din tabele sau se calculează cu expresia:

$$\varphi \text{ rad} = \frac{\varphi^0}{180^0} \pi$$

Se găsește:

$$5 e^{j53^008'} = 5 e^{j0,93}; 6,325 e^{j108^020'} = 6,325 e^{j1,88}; 4,123 e^{j194^0} = 4,123 e^{j3,39} = \\ = 4,123 e^{-j166^0} = 4,123 e^{-j2,897}; 2\sqrt{2} e^{j5,5} = 2\sqrt{2} e^{-j0,786}$$

1.18. Din relația:

$$V e^{j\varphi} = V (\cos \varphi + j \sin \varphi)$$

se deduce $a = V \cos \varphi$ și $b = V \sin \varphi$. Se găsește: $3,24 + j 2,35$; $-2,94 - j 0,596$; $0,27 + j 1,98$; $2,70 - j 4,12$.

1.19. Din identitatea:

$$V e^{j\varphi} = V \angle \varphi$$

se găsește ușor:

$$4 \angle \pi/5; -3 \angle 11^015' = 3 \angle 191^015'; 2 \angle 80^0 = 2 \angle 80; 5 \angle -57^019'$$

1.20. Pe baza relației:

$$V \angle \varphi = V (\cos \varphi + j \sin \varphi)$$

se vor deduce ca mai sus a și b . Se găsește: $2,12 + j 2,12$; $-4,59 + j 6,15$; $-4,40 - j 2,39$; $0,7 - j 0,7$; $-1,41 - j 1,41$; $1,50 - j 2,60$; $-4,33 + j 2,50$.

1.21. Se transformă unghiurile în radiani și se găsește:

$$3 e^{j0,784}; 8 e^{j2,182}; 5 e^{j3,64}; 1 e^{j5,50}; -2 e^{j0,784} = 2 e^{j3,926}; \\ 3 e^{-j1,047} = 3 e^{j5,24}; -5 e^{-j0,524} = -5 e^{j5,75} = 5 e^{j8,892} = 5 e^{j2,608}$$

Notă: Pentru a se schimba semnul modulului, se scade sau se adaugă argumentului un unghi de 180^0 sau π radiani. Pentru a se schimba semnul argumentului, se scade sau se adaugă un unghi de 360^0 sau 2π radiani. (Vezi exercițiile precedente).

$$1.22. \text{ Se scrie } \cos 2j = \frac{e^{2j^2} + e^{-2j^2}}{2} = \text{ch} 2 = 3,762 + j0.$$

$$1.23. 0 + j 10,02.$$

$$1.24. 0,543 + j0.$$

$$1.25. 0 + j 0,909.$$

$$1.26. 3,762 \angle 0; 10,02 \angle 90^0; 1,543 \angle 0; 0,909 \angle 90^0.$$

1.27. Se dezvoltă sinusul și ținând seama că $\cos jx = \text{ch } x$ și $\sin jx = j \text{sh } x$, se găsește $1,29 - j 0,64 = 1,44 \angle -26^020'$.

$$1.28. 2,03 + j 3,05 = 3,66 \angle 56^030'.$$

1.29. Se dezvoltă sinusul hiperbolic și se ține seama că $\text{ch } jx = \cos x$ și $\text{sh } jx = j \sin x$; se găsește $4,21 - j 9,16 = 10,08 \angle 294^040'$.

$$1.30. 20,68 - j74,23 = 61,95 \angle 285^{\circ}36'.$$

1.31. Se scrie $\sqrt[3]{j} = a + jb$, se ridică la cub și se identifică. Punând condiția că a și b să fie reali, se găsește cele trei rădăcini ale unității imaginare: $0 - j; \frac{1}{2} (\pm \sqrt{3} + j)$.

1.32. Se calculează în prealabil $\sqrt[3]{j}$ ca mai sus, Se găsește apoi $y = e^{\pm \frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\cos \frac{1}{\sqrt{2}} \pm j \sin \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$.

1.33. Punând $\ln j = a + jb$, rezultă $j = e^{a+jb}$ de unde, aplicând relația lui Euler, se găsește $a = 0$ și $b = (4k + 1) \frac{\pi}{2}$. Deci $\ln j = j(4k + 1) \frac{\pi}{2}$.

$$1.34. \bar{V} = 60 \angle \pm 30^{\circ} = 51,96 \pm j30.$$

$$1.35. \bar{V} = \pm 25 + j43,3.$$

1.36. Argumentul vectorului \bar{V}_1 este $\varphi_1 = 156^{\circ}48'$.

Rezultă $\bar{V} = 10 \angle 156^{\circ}48' \pm 45^{\circ}$ de unde $\bar{V}' = -3,71 + j9,23$ și $\bar{V}'' = -9,23 - j3,71$.

1.37. Modulul vectorului \bar{V} fiind 18,03 și argumentul vectorului \bar{V}_2 fiind $243^{\circ}30'$, vectorii căutați sunt $\bar{V}' = 18,03 \angle 243^{\circ}30' \pm 30^{\circ}$ de unde $\bar{V}'_a = -15,04 - j9,95$ și $\bar{V}'_b = 5,30 - j17,99$.

1.38. Se scriu vectorii dați sub forma $\bar{V}_1 = 11,18 \angle 153^{\circ}26'$ și $\bar{V}_2 = 11,18 \angle 126^{\circ}34'$. Se ține seamă de rotirea axelor cu unghiul $153^{\circ}26'$ scăzând acest unghi din argumentele vectorilor dați. Se obține:

$\bar{V}'_1 = 11,18 \angle 0$ și $\bar{V}'_2 = 11,18 \angle -126^{\circ}52' = 11,18 \angle 233^{\circ}08'$ sau $\bar{V}'_1 = 11,18 + j0$ și $\bar{V}'_2 = -6,71 - j9,94$.

1.39. Vectorul dat se poate scrie $\bar{V} = 11,18 \angle 63^{\circ}26'$ și expresiile căutate sunt $\bar{V}_{1,2} = 11,18 \angle 63^{\circ}26' \pm 120^{\circ}$ sau $\bar{V}'_1 = -11,16 - j0,67$ și $\bar{V}'_2 = 6,16 - j9,33$.

Observație: Se pot obține expresiile vectorilor roțiți înmulțind vectorul dat cu $a = -0,5 + j0,866$ și $a^2 = -0,5 - j0,866$.

$$1.40. 163^{\circ}44'.$$

1.41. Se scriu vectorii dați sub forma simbolică, fiecare în raport cu sistemul său de referință. Se găsește $\bar{V} = 5 \angle 143^{\circ}08'$ și $\bar{V}_1 = 2,24 \angle 116^{\circ}34'$. Deci argumentul vectorului \bar{V} față de sistemul principal de referință este $116^{\circ}34' + 143^{\circ}08' = 259^{\circ}42'$. Rezultă $\bar{V}' = 5 \angle 259^{\circ}42' = -0,9 - j4,92$.

1.42. Dacă φ_1 și φ_2 sunt argumentele celor doi vectori, $\bar{V} = |\bar{V}_2| \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \angle \varphi_1$. Se găsește $\bar{V} = 4,47 \angle 296^{\circ}34' = 2 - j4$.

1.43. Se găsește $\bar{V} = |\bar{V}_2| \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \angle \varphi_1 - 90^{\circ}$ sau numeric, $\bar{V} = 8,94 \angle 206^{\circ}34' = -8 - j4$.

2. 2.1. $-1 + j3$. Grafic, vectorii se adună după regula paralelogramului.

$$2.2. -2 - j3.$$

2.3. Se scrie al doilea vector sub forma $a + jb$, apoi se adună. Operația se face mai repede grafic. Se obține rezultatul $0,83 + j3,17$.

2.4. Ambii vectori se exprimă sub formă algebrică, sau se rezolvă grafic. Se obține rezultatul $4,59 + j 1,89$.

2.5. $-2 + j5$.

2.6. $1 + j5$.

2.7. Se trece la forma algebrică, sau se rezolvă grafic. Se obține $0 + j 5,2$.

2.8. Idem $0 + j 1,73$.

2.9. Se scrie al doilea termen sub forma algebrică, sau se rezolvă grafic. Se obține $0,91 + j 0,94$.

2.10. Idem. Se obține $-1,5 - j 0,868$.

Observație. Vectorii rezultați pot fi puși sub orice formă, alegerea formei depinzând de operațiile ulterioare cu acest vector. Astfel, în cazul acesta putem scrie vectorul în felul următor: $-1,5 - j 0,866 = -\sqrt{3} \angle 30^\circ = \sqrt{3} \angle 210^\circ = \sqrt{3} e^{j 210^\circ} = -\sqrt{3} e^{j \frac{\pi}{6}}$.

2.11. Se obține $-12 + j5$. Grafic fig. 2.11.

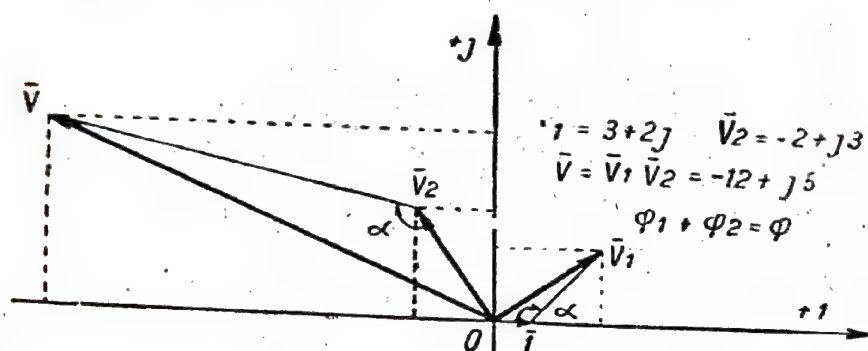


Fig. 2.11.

2.12. $14 + j2$.

2.13. Se aduce primul vector la forma algebrică sau al doilea la forma exponențială. De preferat a doua metodă. Avem: $2 + j2 = 2\sqrt{2} e^{j \frac{\pi}{4}}$ și deci $4\sqrt{2} e^{j \frac{7\pi}{4}}$.

2.14. Se procedează ca mai sus: $-3 + j3 = 3\sqrt{2} \angle 135^\circ$ și deci $15\sqrt{2} \angle 120^\circ$.

2.15. $\sqrt{3} \angle 30^\circ$.

2.16. $-4 - j8$. Grafic fig. 2.16.

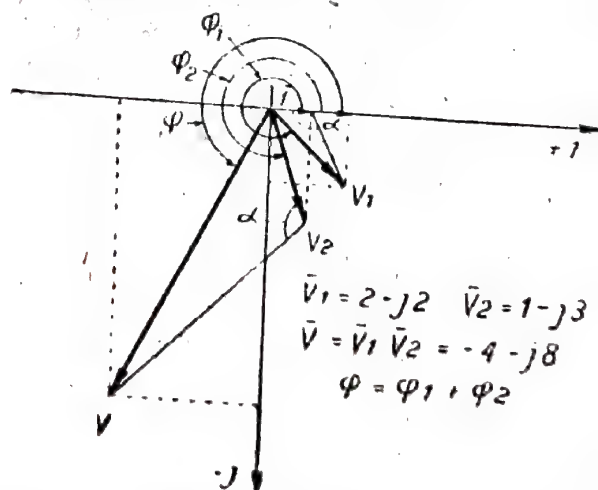


Fig. 2.16.

2.17. $0,118 - j 1,53$.

2.18. $-2 - j$. Grafic fig. 2.18.

2.19. Se aduce primul vector la forma algebrică sau al doilea la forma exponențială. De preferat a doua metodă. Avem :

$$0,75 + j 0,433 = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{j \frac{\pi}{6}} \text{ și deci rezultatul este } \frac{4}{\sqrt{3}} e^{j \frac{\pi}{6}}.$$

2.20. Se procedează ca în exercițiul precedent. Avem :

$$1,91 + j 0,60 = 2 \angle 17^{\circ}30' \text{ și deci rezultatul este } \sqrt{2} \angle 12^{\circ}15'.$$

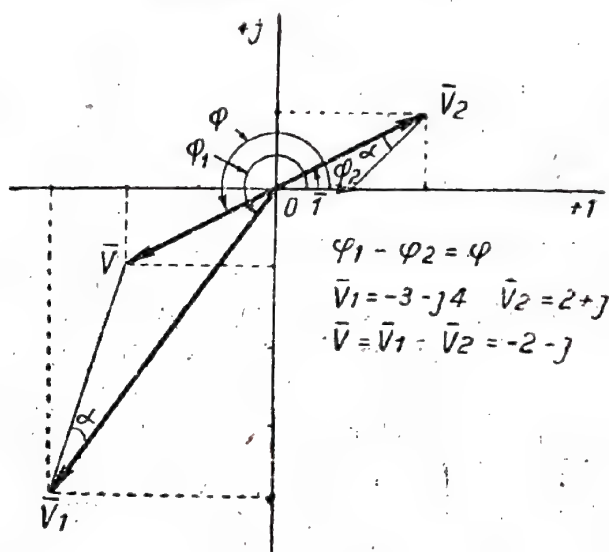


Fig. 2.18.

2.21. Avem $j\sqrt{3} = \sqrt{3} \angle 90^{\circ}$ și deci $\sqrt{3} \angle 30^{\circ}$.

2.22. $2,5 \angle 85^{\circ}$.

2.23. $0 - j8$. Calculul se poate face și grafic fără nici o dificultate.

2.24. $3 \angle 44^{\circ}30'$.

2.25. Se scrie $\sqrt{-12 + j16} = a + jb$, se ridică la patrat și se identifică; se obține $-12 = a^2 - b^2$ și $16 = 2ab$. Se deduce ecuația bipătrată $a^4 + 12a^2 - 64 = 0$, de unde $a^2 = -6 \pm 10$. Cum a și b sunt mărimi reale, se alege numai rădăcina $a = 4$, de unde $a = \pm 2$ și $b = \pm 4$. Rezultă rădăcina căutată $\pm (2 + j4)$.

2.26. $\pm (0,245 - j 2,04)$.

2.27. Sub această formă operația este simplă: se extrage rădăcina pătrată din modul (care trebuie să fie pozitiv) și se divide argumentul prin 2; se obține $\pm \sqrt{5} \angle 31^{\circ}30'$.

Observație: Sub această formă se poate extrage rădăcina de orice ordin.

2.28. A simplifica expresia dată înseamnă a o pune sub forma $a + jb$. Se înmulțesc ambii termeni ai fracției cu conjugatul numitorului. Făcându-se toate calculele, se găsește: $-0,48 + j 1,36$.

2.29. $-(1,42 + j 1,505)$.

2.30. $2,662 - j 0,214$.

2.31. $8\sqrt{3} \angle 58^{\circ}$.

2.32. Se scriu mărimile complexe date sub formele $a + jb$, respectiv $A \angle \alpha$ pentru a face cu ușurință calculele. Se găsește (a) $-1,9 + j9,9$; (b) $-1,29 - j1,54$; (c) $5,58 + j8,54$; (d) $-8,48 + j9,67$; (e) $24 \angle -80^\circ$; (f) $40,81 \angle 194^\circ$; (g) $224 \angle 119^\circ 36'$; (h) $0,834 \angle -76^\circ$; (i) $0,445 \angle 221^\circ 54'$; (j) $-0,117 - j0,009$; (k) $1,6 \angle 182^\circ 30'$; (l) $24 \cos 80^\circ = 4,18$; (m) $-13,25$; (n) $3 e^{-j1,5}$; (p) $j16$.

(1) $x = 0,45 \angle 41^\circ 54'$; (2) $x_1 = -6,432 + j13,728$; $x_2 = 6,768 - j13,432$.

2.33. $1570 [\cos(\omega t + 75^\circ) + j \sin(\omega t + 75^\circ)]$.

2.34. Cum $\omega = 2\pi f = 263,76$ rezultă:

$$6330 [\cos(3\omega t + 108^\circ) - j \sin(3\omega t + 108^\circ)].$$

$$2.35. j U \frac{d\alpha}{dt} \angle \alpha = U \frac{d\alpha}{dt} \angle \alpha + \frac{\pi}{2}.$$

$$2.36. 14 \angle 130^\circ \angle 3\omega t + 120^\circ$$

$$2.37. 10 \angle 500^\circ \angle \omega t + 45^\circ$$

$$2.38. j \cdot 2\omega \cdot 120 e^{j(2\omega t - 45^\circ)} = 75360 e^{j(2\omega t + 45^\circ)}$$

$$2.39. j \cdot \omega \cdot 5 e^{j(\omega t + 30^\circ)} = 1884 e^{j(\omega t + 120^\circ)}$$

$$2.40. 0,0318 [\cos(\omega t - 80^\circ) + j \sin(\omega t - 80^\circ)]$$

$$2.41. 0,0152 [\cos(5\omega t - 120^\circ) + j \sin(5\omega t - 120^\circ)]$$

$$2.42. -j \frac{I}{\left(\frac{d\beta}{dt}\right)} \angle \beta = \frac{I}{\left(\frac{d\beta}{dt}\right)} \angle \beta - \frac{\pi}{2}$$

$$2.43. 0,114 \angle \omega t - 105^\circ$$

$$2.44. 0,0764 \angle 5\omega t - 70^\circ$$

$$2.45. 0,15 e^{-j(3\omega t - 30^\circ)}$$

$$2.46. 0,455 e^{j(\omega t - 120^\circ)}$$

$$2.47. \bar{V}_3 = -13 - j10.$$

2.48. Cei doi vectori sunt $\bar{V}_1 = 10 \angle -53^\circ 08'$ și $\bar{V}_2 = 20 \angle 170^\circ 33'$. Se găsește $\bar{V} = 13,63 + j4,72$.

2.49. Scriind $\bar{V}_1 \cdot \bar{V} = \bar{V}_2$, se găsește $\bar{V} = 0,6 - j0,8$.

2.50. Se scriu cei doi vectori sub forma $\bar{V} = V \angle \varphi$. Unghiul dintre ei fiind $\varphi_1 - \varphi_2$, unghiul pozitiv de rotire este $360^\circ - (\varphi_1 - \varphi_2) = 206^\circ 34'$.

2.51. Se scrie $\bar{V}_2 = V(\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2)$ și $\bar{V}_3 = V(\cos \varphi_3 + j \sin \varphi_3)$. Problema are trei necunoscute iar din relația $\bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \bar{V}_3 = 0$ se deduc numai două ecuații deci problema este nedeterminată. Din ecuațiile ce pot fi scrise se deduce $\tan \frac{\varphi_2 + \varphi_3}{2} = \frac{-3}{4}$ și $\sin \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{2} = \pm \frac{5}{V}$. Din a doua relație rezultă că, pentru ca problema să aibă un sens trebuie ca $V \geq 5$. Pentru $V = 5$ se găsește $\bar{V}_2 = 5 \angle -36^\circ 50' = 4,00 - j3,00$ și $\bar{V}_3 = 5 \angle -36^\circ 50' = 4,00 - j3,00$.

2.52. Scriind vectorul dat sub forma $\bar{Z} = Z \angle k \cdot 360^\circ + \varphi$, rezultă $\sqrt[m]{\bar{Z}} = \sqrt[m]{Z} \angle k \frac{360}{m} + \frac{\varphi}{m}$ și cele m rădăcini se obțin făcând pe $k = 0, 1, \dots, (m-1)$.

Aceste rădăcini sunt toate egale între ele ca modul, două rădăcini succesive făcând între ele unghiul $\frac{360^\circ}{m}$. Ele sunt deci razele unui poligon regulat cu m laturi. Prima rădăcină este în urma vectorului dat, cu unghiul $\frac{m-1}{m} \varphi$.

3. 3.1. Expresia $x = X \sqrt{2} \cos(\omega t \pm \xi)$ se poate scrie sub formă complexă în una din formele echivalente: $\bar{X} = X(\cos \xi \pm j \sin \xi) = X \angle \pm \xi = X e^{\pm j\xi}$.

Pentru cazul de față se obține: $I = 4,33 - j 2,50 = 5 \angle -30^\circ = 5 e^{-j\frac{\pi}{6}}$.

3.2. Expresia dată se scrie $u = 170 \cos(\omega t + 115^\circ)$ și se obține $\bar{U} = 50,71 - j 108,75 = 120 \angle 295^\circ = 120 e^{j5,15}$ V.

3.3. $\bar{Z} = 12,3 + j 8,6 = 15 \angle 35^\circ = 15 e^{j35^\circ} \Omega$.

3.4. $\bar{I} = -12,99 - j 7,50 = 15 \angle 210^\circ = 15 e^{j3,65}$ A.

3.5. $\bar{U} = 212,51 + j 56,94 = 220 \angle 15^\circ = 220 e^{j\frac{\pi}{12}}$ V.

3.6. $\bar{Z} = 173,2 - j 100 = 200 \angle -30^\circ = 200 e^{-j\frac{\pi}{6}} \Omega$.

3.7. Valoarea instantanee a expresiei $\bar{Y} = A \pm j B$ este $y = |\bar{Y}| \sqrt{2} \cos(\omega t \pm \varphi)$ în care $\tan \varphi = \frac{\pm B}{A}$. Pentru acest exercițiu se obține $i = 7,05 \cos(\omega t - 36^\circ 50')$ A.

3.8. $i = 35,4 \cos(\omega t + 73^\circ 42')$ A.

3.9. $u = 141 \cos(\omega t + 53^\circ 08')$ V.

3.10. $u = 282 \cos(\omega t - 36^\circ 52')$ V.

3.11. $i = 14,1 \cos(\omega t - 25^\circ)$ A.

3.12. $u = 312 \cos(\omega t + 15^\circ)$ V.

3.13. $i = 8,5 \cos(\omega t + 10^\circ)$ A.

3.14. $u = 170 \cos(\omega t - 15^\circ)$ V.

3.15. $\bar{Z} = 2 - j 1 \Omega$, $R = 2 \Omega$, $X = -1 \Omega$ (capacitivă), $\varphi = -26^\circ 34' = -33^\circ 26'$.

3.16. $\bar{Z} = 104 + j 42,4 \Omega$, $R = 104 \Omega$, $X = 42,4 \Omega$ (inductivă), $\varphi = 22^\circ 10'$.

3.17. $\bar{Z} = 900 + j 1800 \Omega$, $R = 900 \Omega$, $X = 1800 \Omega$ (inductivă), $\varphi = 63^\circ 30'$.

3.18. $\bar{Z} = 9,88 + j 1,13 \Omega$, $R = 9,88 \Omega$, $X = 1,13 \Omega$ (inductivă) $\varphi = 8^\circ 13'$.

3.19. $\bar{Y}_1 = 0,10$ S, $\bar{Y}_2 = j 0,0286$ S, $\bar{Y}_3 = -j 0,04$ S, $\bar{Y} = 0,1 - j 0,0114$ S, $\bar{Z} = 1/\bar{Y} = 9,88 + j 1,13 \Omega$.

3.20. $8,25 - j 3,36$ m S, $g = 8,25 \times 10^{-3}$ S, $b = -3,36 \times 10^{-3}$ S.

3.21. Se transfigurează mai întâi două triunghiuri, s. ex. ABF și DCF , apoi încă unul din triunghiurile astfel obținute. Rezultă $\bar{Z}_{AC} = 0,514 + j 0,775 \Omega$.

3.22. Scriind expresia puterii și curentului absorbite de circuit se găsesc două ecuații din care se deduc valorile rezistenței și reactanței impedanței necunoscute \bar{Z}_2 . Se găsește astfel $\bar{Z}_2 = 108,2 + j 135,83 \Omega$. Legând condensatorul la bornele inductanței, impedanța totală devine $\bar{Z}_{total} = 19 - j 68,3 \Omega$; factorul de putere este $\cos \varphi' = 0,267$ capacitiv, puterea absorbită este $\varphi' = 21$ kW.

3.23. $R = 0,480 \Omega$, $X = 0,404 \Omega$ (inductivă).

3.24. a) $\bar{I} = 1,213 \angle -60^\circ 11'$ din $u = 220 \sqrt{2} \cos \omega t$, și $i = 1,213 \sqrt{2} \cos (\omega t - 60^\circ 11')$ se deduce $u_1 = 252$ V, $i_1 = +1,561$ A, $u_2 = 0$ V, $i_2 = +1,484$ A, $u_3 = -310,2$ V, $i_3 = -0,851$ A, $u_4 = 0$ V, $i_4 = -1,484$ A. b) $\bar{I} = 1,263 \angle +72^\circ 34'$, tensiunea are aceleași valori ca și în cazul precedent, $i_1 = -0,567$ A, $i_2 = -1,717$ A, $i_3 = -0,534$ A, $i_4 = +1,717$ A; c) $\bar{I} = 1,570 \angle 0^\circ 49'$, $i_1 = +1,772$ A, $i_2 = -0,032$ A, $i_3 = -2,213$ A, $i_4 = +0,032$ A; d) $\bar{I} = 1,02 \angle 11^\circ 30'$, $i_1 = +0,971$ A, $i_2 = -0,287$ A, $i_3 = -1,409$ A, $i_4 = +0,287$ A.

3.25. Se notează $\bar{Z}_1 = R$, $\bar{Z}_2 = -j \frac{1}{C\omega}$, $\bar{Z}_3 = j L\omega$. Se găsește $Z_{TOTAL} = R - j \frac{L/C}{L\omega - 1/C\omega}$. Pentru ca $\bar{I} = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}_{TOTAL}} = 0$ trebuie ca $\bar{Z}_{TOTAL} = \infty$ de unde rezultă: $L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$ (condiția de rezonanță pentru frecvența f).

3.26. Punând $\bar{Z}_1 = j \omega L$, $\bar{Z}_2 = -\frac{j}{C\omega}$, \bar{U} tensiunea aplicată la bornele AD, \bar{I}_1 curentul în latura AB (și prin simetrie și în CD), \bar{I}_2 curentul în latura AC (și prin simetrie și în BD), \bar{I} curentul în BC; aplicând legile lui Kirchhoff se obține $\bar{I}_1 - \bar{I}_2 = \bar{I}$; $\bar{Z}_1 \bar{I}_1 + \bar{Z}_2 \bar{I}_2 = \bar{U}$; $\bar{Z}_1 \bar{I}_1 - \bar{Z}_2 \bar{I}_2 = -R\bar{I}$. Eliminând pe \bar{I}_1 și \bar{I}_2 din aceste ecuații, se găsește:

$$2\bar{I} \bar{Z}_1 \bar{Z}_2 = (\bar{Z}_2 - \bar{Z}_1) \bar{U} - R(\bar{Z}_2 + \bar{Z}_1)\bar{I}.$$

Pentru ca \bar{I} să fie independent de R , trebuie ca $\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 = 0$ sau $L\omega = \frac{1}{C\omega}$ deci condiția de rezonanță. În acest caz $\bar{I} = -j C\omega U$.

3.27. Curentul căutat are forma $\bar{I} = \frac{\bar{U}}{R + j(L\omega - 1/C\omega)}$. Se ia ca variabilă independentă $\lambda = L\omega - \frac{1}{C\omega}$ și expresia locului devine $\bar{I} = \frac{\bar{U}}{R + j\lambda}$.

Aceasta reprezintă un cerc ce trece prin origine și are centrul pe axa reală. Curba de rezonanță se construiește ușor; ea este simetrică față de axa corespunzătoare punctului de rezonanță $\lambda = 0$, ($f = 795 \cdot 10^3$ Hz) și admite ca asimptotă axa frecvențelor. Valoarea curentului la rezonanță este $I = 0,5$ A.

3.28. Se aplică a doua lege a lui Kirchhoff celor două circuite obținându-se două ecuații din care se elimină \bar{I}_1 . Se obține o ecuație de forma:

$$\bar{U} = \bar{A} + \frac{\bar{B}}{\omega^2} + j \left(\frac{\bar{D}}{\omega} + \bar{F}\omega \right)$$

în care :

$$\begin{aligned}\bar{A} &= -\frac{L_1 R_2 + L_2 R_1}{M} \bar{I}_2 & \bar{B} &= \frac{R_1}{C_2 M} \bar{I}_2 \\ \bar{D} &= \frac{R_1 R_2 C_2 + L_1}{C_2 M_2} \bar{I}_2 & \bar{F} &= -\frac{L_1 L_2 - M^2}{M} \bar{I}_2\end{aligned}$$

Punând $1/\omega^2 = \lambda$ și $\bar{B} + j\bar{D} = \bar{G}$ se obține :

$$\bar{U} = \bar{A} + \bar{G}\lambda + \frac{j\bar{F}}{\lambda}$$

care reprezintă o cubică circulară. Trasarea ei se face ușor, construind cercul $\frac{j\bar{F}}{\lambda}$, care are centrul pe axa complexă și trecând prin origine și dreapta $\bar{G}\lambda$, care trece deasemenea prin origine. Punctele curbei se obțin ducând din punctele cercului vectori echipolenți cu $\bar{G}\lambda$. Se deplasează apoi originea cu mărimea $-\bar{A}$ (pe axa reală). Pentru cazul particular al problemei se găsește : pentru $f = 10^2$ Hz, $\bar{U} = (66,2 + j 644,6) \times 10^{-5}$ V ; $f = 10^3$, $\bar{U} = (-60,3 + j 430)10^{-5}$ V ; $f = 10^4$ Hz $\bar{U} = (-61,6 + j 3,7 \cdot 10^3) 10^{-5}$ V.

3.29. Fie $Z_1 = \frac{U}{I_1} \angle \varphi_1$, impedanța motorului, $\bar{Z}_2 = -\frac{j}{C\omega}$ impedanța

condensatorului pus la bornele motorului și $\bar{Z} = \frac{U}{I} \angle \varphi_2$ impedanța rezultantă.

Din relația $\bar{Z} = \frac{\bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2}$ se deduce $\bar{Z}_2 = \frac{-j}{C\omega} = \frac{\bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}}{\bar{Z}_1 - \bar{Z}}$. De unde

$$C = \frac{jP}{\eta U^2 \omega} \left[\sec \varphi_1 \angle -\varphi_1 - \sec \varphi_2 \angle -\varphi_2 \right] = \frac{P}{\eta U_2 \omega} (\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_2).$$

Numeric se găsește $C = 3,16 \mu\text{F}$.

3.30. Punând

$$\bar{Z}_{AB} = R_1 - \frac{j}{C_1 \omega}, \quad \bar{Z}_{BC} = P, \quad \bar{Z}_{AD} = -\frac{j}{C_2 \omega}, \quad \bar{Z}_{DC} = \frac{Q}{1 + j\omega C_2 Q},$$

înlocuind în ecuația punții și făcând calculele se găsește :

$$QR_1 - j\frac{Q}{C_1 \omega} = -j\frac{P}{C_2 \omega} + \frac{C_3}{C_2} QP$$

de unde prin identificare se găsește $R_1 = \frac{C_3}{C_2} P$ și $C_1 = \frac{Q}{P} C_2$. Factorul de

putere se calculează din relația $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{R_1 C_1 \omega}$. Unghiul de pierdere este dat

de relația $\operatorname{tg} \delta = \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} = R_1 C_1 \omega$. Tensiunea la bornele condensatorului variabil

este: $\bar{U}_{DC} = \bar{Z}_{DC} \bar{I}_2 = \bar{U} \frac{\bar{Z}_{DC}}{\bar{Z}_{ADC}}$ deoarece $\bar{I}_2 = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}_{ADC}}$. Se găsește $\bar{U}_{DC} = \frac{QC_2 \omega}{\omega(C_2 + C_3)Q - j} \bar{U}$. Numeric se găsește $R = 6360 \Omega$, $C_1 = 0,1952 \mu F$, $\cos \varphi = 0,35$, $\tan \delta = 0,384$, $\bar{U}_{DC} = 225 \angle 68^\circ 12' V$.

3.31. Se pune $\bar{Z}_{AB} = P$, $\bar{Z}_{BC} = r - \frac{j}{C\omega}$, $\bar{Z}_{CD} = Q$, $\bar{Z}_{DA} = R + jL\omega$.

Puntea fiind de tipul Wheatstone, pentru echilibrare trebuie ca $\bar{Z}_{AB}/\bar{Z}_{DA} = \bar{Z}_{BC}/\bar{Z}_{CD}$. Înlocuind cu valorile de mai sus, făcând calculele, identificând și scoțând valorile lui L și R căutate, se găsește $R = \frac{PQC^2\omega^2}{1 + r^2C^2\omega^2} \Omega$ și $L = \frac{PQC}{1 + r^2C^2\omega^2} H$. Numeric se găsește $R = 374 \Omega$ și $L = 0,166 H$.

3.32. Aplicând circuitului legea lui Ohm se găsește, pentru raportul căderilor de tensiune egal cu m și factorul de putere egal cu k : $\bar{U}_a = m(1 + jn) \frac{I_a}{I_c} U_c$, în

care $n = \tan \varphi = \frac{\sqrt{1 - k^2}}{k}$; $\bar{U}_{a1} = \frac{m}{m+1} (1 + jn) \frac{I_a}{I_c} U_c$; $\bar{U}_{a2} = \frac{m^2}{m+1} \times (1 + jn) \frac{I_a}{I_c} U_c$. Numeric se găsește: $\bar{U}_a = 110(1 + j\sqrt{3})$; $\bar{U}_{a1} = \frac{110}{3}(1 + j\sqrt{3})$; $\bar{U}_{a2} = \frac{220}{3}(1 + j\sqrt{3})$.

3.33. Se scrie ecuațiile de tensiune ale circuitelor primar și secundar între care se elimină curentul \bar{I}_2 . Calculându-se raportul \bar{U}_1/\bar{I}_1 , se găsește $\bar{Z}_A = 255 + j1510 \Omega$.

3.34. $\bar{Z}_{11} = 8,5 - j174 \Omega$; $\bar{Z}_{22} = 120,5 - j320 = 342 \angle -69^\circ 24' \Omega$; pentru determinarea impedanței mutuale \bar{Z}_{12} se observă că aceasta cuprinde impedanța comună ramurii bc o parte din impedanța datorită inductanței mutuale M . Curentul \bar{I}_1 produce o cădere de tensiune $-j \frac{I_1}{C_3\omega}$ în sensul curentului \bar{I}_1 ,

care este o cădere de tensiune $+j \frac{I_1}{C_3\omega}$ în sensul curentului \bar{I}_2 . Rezultă că impedan-

ța mutuală datorită ramurii bc în \bar{Z}_{22} este $j \frac{1}{C_3\omega}$. Un curent pozitiv \bar{I}_1 produce în

inductanța M o cădere de tensiune pozitivă în sensul curentului \bar{I}_2 din cauza sensului de înfășurare al bobinei. Rezultă $\bar{Z}_{12} = j \left(\frac{1}{C_3\omega} + \omega M \right) = j503 \Omega$;

$\bar{Z}_s = 120 + j141 = 185 \angle 49^\circ 42' \Omega$; impedanța aparentă la bornele sursei este $Z_{1a} = Z_{11} - \frac{\bar{Z}_{12}^2}{\bar{Z}_{22}} = 271 + j522 = 589 \angle 62^\circ 36' \Omega$; $\bar{I}_1 = 0,0170 \angle -62^\circ 36' A$;

aplicând a doua lege a lui Kirchhoff circuitului 2, rezultă $\frac{\bar{I}_1}{\bar{I}_2} = -\frac{\bar{Z}_{22}}{\bar{Z}_{12}} =$

$= 0,649 \angle 20^\circ 36'$, de unde $I_2 = 0,0251 \angle -83^\circ 12' \text{ A}$; $P_1 = I_1^2 \Re(\bar{Z}_{1a}) = 0,0784 \text{ W}$; $P_2 = I_2^2 R_s = 0,0756 \text{ W}$; pierderile $p_1 = I_1^2 R_{11} = 24,6 \cdot 10^{-4} \text{ W}$; $p_2 = I_2^2 R_3 = 3,2 \cdot 10^{-4} \text{ W}$, pierderile totale $= 27,8 \cdot 10^{-4}$, puterea dată $783,8 \cdot 10^{-4} \text{ W}$; $\eta = 96,5\%$.

3.35. Scriind relațiile dintre diversele mărimi din circuit se găsește : $L_1 = 0,188 \text{ H}$, $E = 1220 \text{ V}$, $\cos \varphi = 0,9$, $\varphi = 25^\circ 50'$.

3.36. La $\cos \varphi_2 = 1 \therefore P_2 = 100 \text{ kW}$ și $\cos \varphi = 0,645$ (a) $P_2 = 100 \text{ kW}$, $Q_2 = 0$. (b) $\bar{S} = 225 - j 216 \text{ kVA}$.

3.37. Operația compensării factorului de putere se traduce prin relația

$$\bar{I}' \angle \varphi_1' = \bar{I} \angle \varphi + \bar{J} \angle \Psi'$$

în care \bar{I}' și φ' sunt curenții și defazajul rezultat, \bar{I} și φ , curenții și defazajul dat, \bar{J} și Ψ' curenții și defazajul absorbit de receptorul compensator.

În aceste condiții se găsește : (a) $I_s = 835 \text{ A}$, $\bar{I}_0 = 510 \text{ A}$; (c) luând $\bar{E} = E \angle 0$, rezultă $\bar{I} = 690 \text{ A}$; (d) Puterea totală absorbită $\bar{S} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2 = 2077 + j 0 \text{ kVA}$.

3.38. Luând pe E ca origine de fază, $P_{25} = \Re \left(\bar{E} \frac{\bar{E}^*}{R - jX} \right) = \frac{RE^2}{R^2 + X^2}$;

apoi $P_{60} = \frac{E^2}{R}$ și $I_{60} = \frac{E}{R}$ căci la $f = 60 \text{ Hz}$ sistemul este în rezonanță. Se obțin astfel 3 ecuații care dau cele trei necunoscute. Se găsește.

$\frac{P_{60}}{I_{60}^2} = E = 110 \text{ V}$; $R = \frac{P_{60}}{I_{60}^2} = 3,14 \Omega$; $X_{25} = \frac{P_{60}}{I_{60}^2} \sqrt{\frac{P_{60} - P_{25}}{P_{25}}} = 10,5 \Omega$ la $f = 25 \text{ Hz}$. Din valoarea lui X_{25} și condiția de rezonanță rezultă $C = 50 \mu\text{F}$ și $L = 0,14 \text{ H}$. Aceste mărimi trebuind să fie pozitive, trebuie ca $X_{25} = \frac{1}{C\omega} - L\omega$.

3.39. (a) Punând $\frac{u_1}{U_1 \sqrt{2}} = X$ și $\frac{u_2}{U_2 \sqrt{2}} = Y$ scriind funcțiile inverse se

obțin relațiile $\omega t - \psi = \arccos X$ și $2\omega t = \arccos Y$, de unde prin eliminarea lui ωt rezultă ecuația $\arccos Y - 2 \arccos X = 2\psi$ sau $\cos(\alpha - 2\beta) = \cos 2\psi$. În care s'a pus $X = \cos \beta$ și $Y = \cos \alpha$. Dezvoltând cosinusul și ținând seama de valorile lui α și β se obține în definitiv curba căutată

$4X^4 - 4X^2Y \cos 2\psi + Y^2 - 4X^2 - 2Y \cos 2\psi + \cos^2 2\psi = 0$ sau explicitată în raport cu Y , mai ușor de reprezentat, $Y = (2X^2 - 1) \cos 2\psi \pm \pm 2X \sqrt{1 - X^2} \sin 2\psi$.

(b) În cazurile particulare date se obțin curbele : $Y = 2X^2 - 1$; $Y = \pm 2X \sqrt{1 - X^2}$; $Y = -(2X^2 - 1)$.

Notă. Se obține ușor forma curbelor prin o sumare grafică a curbelor celor două tensiuni.

3.40. Se găsește impedanța echivalentă între B_1 și $G_1 - R_3$ și $X_3 - R_2$, Y_1 și X_2 , Z_3 care sunt montate în paralel. Impedanța obținută în serie cu X_4 este impedanța echivalentă pe care debitează sursa. Se aplică legea lui Ohm. Se face apoi distribuția de curenți. Se obține : $I = 5,3 \text{ A}$; $U_{ab} = 88,6 \text{ V}$.

3.41. Pentru ca condiția dată să fie satisfăcută, trebuie ca $Y_1 = C\omega$ (pentru cazul întrerupătorului deschis) să fie egal cu

$$Y_2 = \sqrt{\left(\frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} - \omega C \right)^2 + \frac{R^2}{(R^2 + \omega^2 L^2)^2}} \text{ (pentru cazul întrerupătorului)}$$

închis). Egalând cele două expresii obținem :

$$\omega^2 = \frac{1}{2LC} \text{ sau } L = \frac{1}{2C\omega^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{C\omega} \cdot \frac{1}{\omega}.$$

Ținând seama că în problemă se dau tensiunea aplicată și valoarea eficace a curentului rezultă :

$$L = \frac{1}{2} \cdot \frac{U}{I} \cdot \frac{1}{\omega} = \frac{1}{2} \cdot \frac{380}{1} \cdot \frac{1}{314} = 0,605 \text{ H.}$$

3.42. Când întrerupătorul este închis $I = I_2 = I_C = 4,4 \text{ A}$. Când întrerupătorul este deschis $I = I_L = I_C = 8,8 \text{ A}$; $I_2 = 0$.

3.43. În cazul rezonanței curenților A_3 indică valoarea eficace a unui curent activ; A_1 a unui curent a cărui componentă activă este egală cu I_3 iar componenta reactivă este egală cu I_2

$$I_{1a}^2 + I_{1r}^2 = 6^2; I_{1a} = I_3 = 3,6; I_2 = I_{1r} = 4,8 \text{ A.}$$

3.44. Se aplică legile lui Kirchhoff scrise în cantități complexe. Ampermetrul va arăta valoarea eficace a curentului $I_4 \therefore I_4 = 4,12 \text{ A}$.

3.45. Se scriu cele două ecuații de funcționare ale circuitului între care se elimină \bar{I}_2 , deducându-se apoi

$$\bar{Z} = \frac{\bar{U}}{\bar{I}} = R_1 + \frac{R_2 \omega^2 M^2}{R_2^2 + (X_L - X_C)^2} + j \left[(X_L - X_C) - \frac{(X_L - X_C) \omega^2 M^2}{R_2^2 + (X_L - X_C)^2} \right].$$

(a) Pentru ca \bar{Z} să fie o rezistență pură trebuie ca coeficientul lui j să fie nul, ceea ce se întâmplă dacă $X_L - X_C = 0$, adică este îndeplinită condiția de rezonanță, sau dacă

$$1 - \frac{\omega^2 M^2}{R_2^2 + (X_L - X_C)^2} = 0$$

de unde rezultă

$$M = \frac{R_2^2 + (X_L - X_C)^2}{\omega}.$$

Numeric se găsește $M = 8,77 \text{ H}$.

(b) Punând aceeași condiție, se găsește

$$C = \frac{1}{\left[X_L - \frac{\omega^2 M_1^2 \pm \sqrt{\omega^4 M_1^4 - 4(X_L - X_C)^2 R_1^2}}{2(X_L - X_C)} \right] \omega}$$

în care $M_1 = 2M$. Numeric rezultă $C_1 = 1061 \mu\text{F}$ și $C_2 = 875 \mu\text{F}$.

4. 4.1. $-0,236 + j0,059$. Grafic inversul vectorului se construiește cu ajutorul polarei vârfului vectorului conjugat, față de cercul unitar.

4.2. $0,25 + j 0,25$. Grafic fig. 4.2.

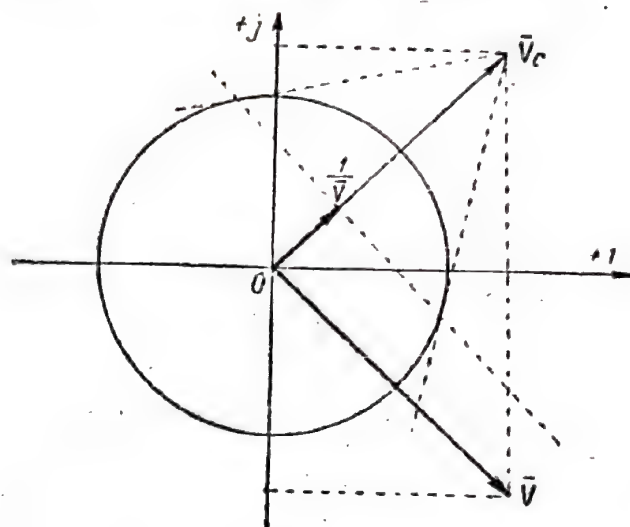


Fig. 4.2.

4.3. $0,25 e^{-j \frac{\pi}{3}}$.

4.4. $0,2 \angle -30^\circ$.

4.4. $10 \angle 25^\circ$.

4.6. $\bar{V}_i = \frac{(1+j1)^2}{3+j4} = 0,32 + j 0,24$. Grafic, inversarea se realizează cons-

truind inversul vectorului dat cu ajutorul polarei față de cercul de rază \bar{V} dar fără a lua conjugatul vectorului dat și luând apoi simetricul vectorului astfel obținut față de \bar{V}_0 (fig. 4.7) sau urmând indicația din breviar (par. 4.3).

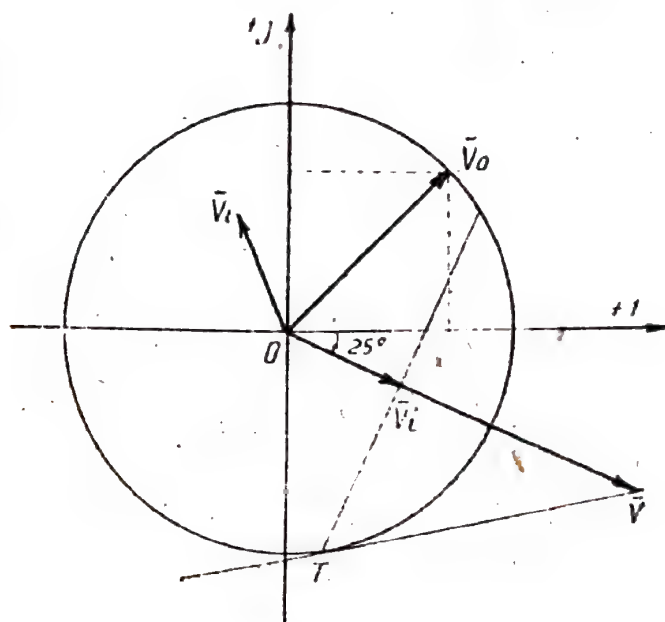


Fig. 4.7

4.7. Pentru calculul analitic se aduc vectorii la aceeași formă, de preferință la forma simbolică (6). Pentru calcul grafic vectorii pot fi exprimați sub orice formă. Se obține $1,16 \angle 115^\circ$. Grafic fig. 4.7.

4.8. $1,33 \mid 10^\circ$.

4.9. $V_i = 0,2 \mid -53^\circ 10'$

4.10. $V_i = 0,2 \mid -53^\circ 10'$

4.11. $V_i = 0,2 \mid 126^\circ 50'$

4.12. $V_i = 0,2 \mid 126^\circ 50'$

4.13. Locul este un segment de dreaptă, paralel cu axa complexă ce trece prin vârful vectorului $a = 0,5$; vârful vectorului corespunzător cazului $b = 0$ coincide cu acest punct.

4.14. Locul este un segment de dreaptă, paralel cu axa reală, pornind din vârful vectorului $j2$, care corespunde valorii $a = 0$.

4.15. Locul este un cerc cu centrul pe axa reală și tangent în origină la axa complexă. Centrul acestui cerc se găsește în punctul unde cercul unitar taie axa reală. La gradare se va ține seama că, pentru construirea locului se ia conjugata drepte delat numitor.

4.16. Locul este un semicerc cu centrul pe axa complexă, tangent în origină la axa reală. Construcția lui este la fel cu cea anterioară. Se va avea grijă să se ia cercul unitar cu o rază mai mare decât b pentru ca aceasta să poată fi polara celei de a doua extremități a diametrului principal. Altfel locul este un cerc cu diametrul prea mic și nu poate fi folosit.

4.17. Locul geometric este o dreaptă paralelă cu axa complexă și trece prin vârful vectorului $(a + jb)$ care este punctul de zero al locului.

4.18. Locul geometric este o dreaptă paralelă cu axa reală și trece prin vârful vectorului $(a + jc)$, punctul de zero al locului.

4.19. Locul este un cerc cu centrul pe axa complexă, care trece prin origină. La gradare se va ține seama că zero al locului corespunde simetricului vârfului vectorului $(a + jc)$ față de axa reală.

4.20. Ecuația dată se poate scrie $\bar{U}_0 = (46 + j34,5) \frac{1}{j5 - v}$. Se construiește vectorul $(46 + j34,5)$ și locul $\frac{1}{j5 - v}$ care este un cerc cu centrul pe axa complexă, în regiunea negativă și tangent în origine la axa reală. Locul astfel obținut se înmulțește cu vectorul $(46 + j34,5)$, ceea ce revine la a dilata diametrul cercului cu modulul vectorului $\sqrt{46^2 + 34,5^2} = 57,5$ și a-l roti în sensul trigonometric cu unghiul $\text{arc tg } \frac{34,5}{46} = 36^\circ 52'$. Această ultimă operație poate fi făcută și rotind axele de coordonate cu același unghi în sens contrar.

4.21. Pentru $\lambda = 0$ se obține $\bar{I}_0 = 0,107 - j0,038$; pentru $\lambda = \infty$ se obține $\bar{I}_\infty = 0,154 - j0,23$; pentru $\lambda = 1$ se obține $\bar{I}_1 = 0,122 - j0,024$. Se duce cercul ce trece prin vârfurile acestor trei vectori. Acest cerc e locul căutat. Pentru gradarea locului se duce o perpendiculară pe diametrul care trece prin vârful vectorului \bar{I}_∞ . Dreptele $\bar{I}_0 \bar{I}_\infty$ și $\bar{I}_1 \bar{I}_\infty$ determină, pe această dreaptă, unitatea scării.

4.22. Locul se construiește ușor din aproape în aproape. Se construiește dreapta $(4x + j1)$, care este o paralelă la axa reală și se inversează în raport cu cercul de rază 3 ($k^2 = 9$). Locul obținut este un cerc cu centrul pe axa com

plexă și tangent în origine la axa reală. Cercul este în regiunea negativă. Se scade acest cerc din vectorul $(2 + j3)$ ceea ce revine la a muta originea în vârful acestui vector și a schimba sensul axelor. Se inversează acum cercul față de noua origine, cu puterea de inversiune $(5 + j3)^2$. Pentru aceasta, se face inversiunea *geometrică* a cercului, luându-se ca cerc unitar cercul de rază $|5 + j3| = \sqrt{5^2 + 3^2}$ și apoi se simetrizează cercul obținut față de vectorul $(5 + j3)$ construit în noul sistem de axe. Pentru gradarea locului se va avea grijă să se fixeze pe cercurile succesive cele trei puncte caracteristice 0, 1 și ∞ . La cercul final se duce o dreaptă perpendiculară pe diametrul ce trece prin punctul ∞ . Dreptele $\infty 0$ și $\infty 1$, vor determina pe această dreaptă segmentul unitate, cu ajutorul căruia se gradează această dreaptă. Se unesc apoi diviziunile obținute cu punctul ∞ , determinându-se astfel diviziunile pe cerc (fig. 4.22).

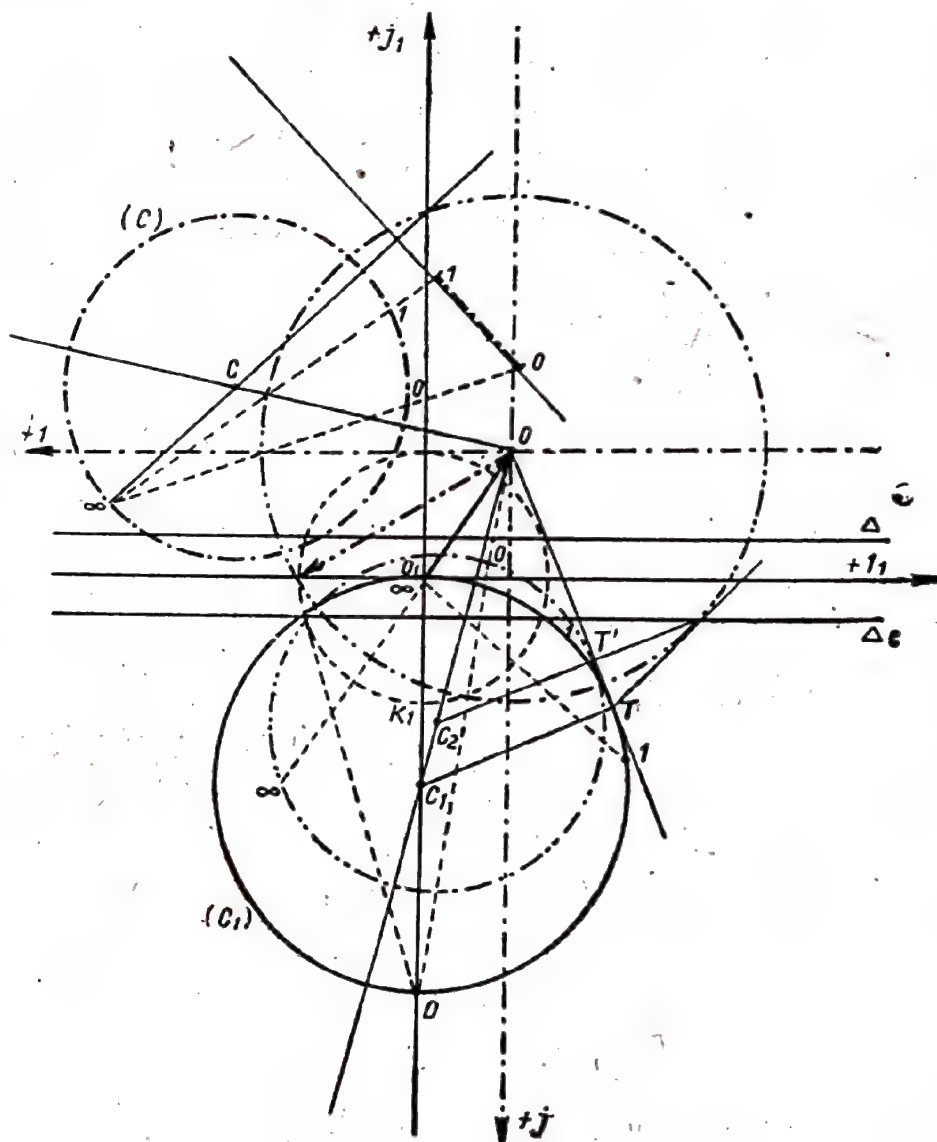


Fig. 4.22.

4.23. Problema este analoagă cu problema 4.20 și se rezolvă analog.

4.24. Se construiesc cei patru vectori dați. Pentru $\lambda = 0$ se obține

$$\bar{T}_0 = \frac{\bar{A}}{\bar{C}} = \frac{-5 + j2}{-2 - j4}, \text{ care se construiește, câtul dintre cei doi vectori.}$$

determinându-se grafic. Se găsește $\bar{I}_0 = 0,1 - j 1,2$. Pentru $\lambda = 1$ se obține $\bar{I}_1 = \frac{(-5 + j2) + (3 + j3)}{(-2 - j4) + (5 - j1)}$. Se efectuează grafic sumele dela numărător și numitor, apoi câtul dintre rezultate. Se găsește $\bar{I}_1 = -0,91 + j 0,147$. Pentru $\lambda = \infty$ se obține $\bar{I}_\infty = \frac{3 + j3}{5 - j1}$, care se efectuează grafic, obținându-se $\bar{I}_\infty = 0,46 + j0,69$. Restul ca în problema 4.21.

3.25. Prin transfigurări succesive și reduceri de impedanțe, circuitul dat se reduce la un cuadripol în T având la bornele de ieșire legată rezistența variabilă R . Expresia curentului absorbit este

$$\bar{I} = \frac{j 3600 - 243 R}{(1500 - j 2400) + (162 - j 45) R}$$

care reprezintă un cerc și a cărui construcție se face prin metodele obișnuite. Locul este valabil numai pentru $R \geq 0$. Pentru $R = 0$, sistemul funcționează în scurtcircuit și $\bar{I}_{sc} = 1,268 \angle 148^\circ$ A; pentru $R = 8$, circuitul funcționează în gol și $\bar{I}_0 = 1,447 \angle 195^\circ 30'$ A.

3.26. Reducând impedanțele se găsește

$$\bar{I} = 100 \frac{1,25 - j(X_L - 5)}{5 X_L - j 6,25}$$

care reprezintă un cerc. Locul lui I se poate construi grafic de unde se pot deduce imediat valorile căutate. Analitic se calculează $\frac{d|\bar{I}|}{dX_L}$ care dă valorile lui

X_L pentru care \bar{I} este maxim și minim. Se găsește: $\bar{I}_{rez} = 4,7 + j 1,175$ A pentru $X_L = 5\Omega$; cele două valori care anulează derivata sunt $X_L = 2,52 \pm 2,81$, din care numai $X_L = 5,33$ satisface condițiilor și care dă valoarea minimă a curentului $\bar{I}_{min} = 4,65 - j 0,11$ A. Valoarea maximă se obține pentru $X_L = 0$ și este $\bar{I}_{max} = j 20$ A.

3.27. Expresia curentului este

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}_1 + \frac{1}{j\omega C + \frac{I}{Z_2}}} = \frac{(1 + j C \omega \bar{Z}_2) \bar{E}}{\bar{Z}_1 (1 + j C \omega \bar{Z}_2) + \bar{Z}_2}$$

a cărui loc geometric este un cerc. Din construcția grafică se deduc elementele căutate. Analitic se procedează ca în cazul precedent.

3.29. Luând tensiunea aplicată mașinilor ca origine de fază, între curentul total și curenții absorbiți de cele două mașini se poate scrie relația (prima lege a lui Kirchhoff)

$$I' \angle \psi' = I \angle \varphi + J \angle \psi$$

I fiind ciurentul absorbit de motorul asincron, φ decalajul corespunzător, J curentul absorbit de motorul sincron, ψ decalajul corespunzător, I' curentul total

absorbit de grupul de mașini și ψ' decalajul global al sistemului. Puterea aparentă absorbită de sistem este dată de relația

$$\overline{S} = \overline{U} \cdot \overline{I}^* = UI' \angle -\psi' = UI \angle -\varphi + UJ \angle -\psi = \overline{F} + \overline{R} \angle -\psi$$

care este ecuația unui cerc, ce se trasează ușor. (a) Vectorul puterii aparente maxime se obține ducând cu centrul în origine un cerc tangent exterior cercului loc: vectorul căutat are vârful în punctul de contact. (b) puterea maximă corespunde tangentei la cercul loc paralelă cu axa complexă: vectorul căutat are vârful în punctul de contact al acestei tangente. (c) Din relația dintre curenți, de mai sus, se deduce:

$$\operatorname{tg} \psi' = \frac{I \sin \varphi + J \sin \psi}{I \cos \varphi + J \cos \psi}$$

pentru factorul de putere unitate, $\psi' = 0$ și deci $\operatorname{tg} \psi' = 0$. Rezultă $I \sin \varphi + J \sin \psi = 0$ de unde $\psi = -\arcsin \frac{I}{J} \sin \varphi = -\arcsin \frac{P \operatorname{tg} \varphi}{S_s} = -36^\circ 50'$,

care se determină pe cerc găsiindu-se astfel vectorul căutat. (d) Se procedează ca în cazul precedent luând $\cos \psi = 0,9$, de unde se deduce $\operatorname{tg} \psi$ și se rezolvă apoi ecuația trigonometrică în ψ , găsiindu-se astfel punctul pe cerc corespunzător.

3.29. Luând tensiunea \overline{E} ca origină de fază, se obține

$$(a) \overline{I}_{ac} = \frac{\overline{E}}{M + j\omega L_s + \lambda R_s} \text{ și } \overline{U}_{ac} = \frac{(j\omega L_s + \lambda R_s) \overline{E}}{M + j\omega L_s + \lambda R_s};$$

locul geometric al tensiunii \overline{U}_{ac} este un cerc ce nu trece prin origină. Din cerc este valabilă numai porțiunea pentru $\lambda = 0$.

$$(b) \overline{I}_{ad} = \frac{\overline{E}}{R_x + j\omega L_x + \mu N} \text{ și } \overline{U}_{ad} = \frac{(R_x + j\omega L_x) \overline{E}}{R_x + j\omega L_x + \mu N};$$

un cerc ce trece prin origină. Din cerc este valabilă numai porțiunea pentru $\mu \geq 0$.

(c) Puntea este în echilibru pentru $\overline{U}_{cd} = \overline{U}_{ac} - \overline{U}_{ad} = 0$ de unde rezultă relația

$$(j\omega L_s + \lambda R_s)(R_x + j\omega L_x + \mu N) - (R_x + j\omega L_x)(M + j\omega L_s + \lambda R_s) = 0$$

și, prin separarea părților reale și complexe se obține

$$L_x = \frac{\mu N}{M} L_s \text{ și } R_x = \frac{\mu N}{M} \lambda R_s.$$

Rezultă că echilibrarea se va face mai întâi în curent alternativ, acționând asupra lui N (variabil), găsiindu-se L_x ; apoi în curent continuu, acționând asupra lui R_s (variabil). Nu se poate face o mai bună alegere.

4.30. Sistemul fiind simetric, se studiază numai pe o fază; în acest caz $U_0 = 3470$ V. Impedanța totală a circuitului fiind

$$\overline{Z} = \frac{(r_1 + jx_1)(g_2 + jb_2) + 1}{g_2 + jb_2}$$

curentul din circuit (debitat de sursă) și tensiunea la barele de alimentare a fabricii sunt:

$$\overline{I} = \frac{\overline{U}_0}{\overline{Z}} = \frac{(g_2 + jb_2) \overline{U}_0}{(r_1 + jx_1)(g_2 + jb_2) + 1}; \quad \overline{U}_2 = \overline{Z}_2 \overline{I} = \frac{\overline{U}_0}{(r_1 + jx_1)(g_2 + jb_2) + 1}$$

Locul geometric al curentului și tensiunii sunt cercuri, din care, cel al tensiunii trece prin origină.

Puterea activă dată circuitului este

$$P_2 = \Re(\bar{U}_2 \cdot \bar{I}^*) = \frac{g_2 U_0^2}{(r_1 g_2 - x_1 b_2 + 1)^2 + (x_1 g_2 + r_1 b_2)^2};$$

a cărei maxim se găsește pentru valoarea lui g_2 dată de ecuația $\frac{dP_2}{dg_2} = 0$, gă-

sindu-se $g_2 = \frac{x_1 b_2 - 1}{\pm \sqrt{r_1^2 + x_1^2}}$, semnul luându-se astfel ca $g_2 > 0$. Numeric se

găsește $g_2 = 0,139$ S, rezultând $P_{2max} = 991$ kW/faza sau total $P_{2tot} = 3 P_2 = 2973$ kW. În acest caz $\bar{U}_2 = 2,046 - j 1,650 = 2,6 \angle -38^\circ 50'$ kV și $\bar{I} = \bar{Y}_2 \bar{U}_1 = 382,2 \angle -19^\circ = 366,89 - j 127,05$ A. Puterea totală dată sistemului, pe fază, este

$$P_1 = 991 + \frac{366,89^2 \cdot 2}{1000} = 1260 \text{ kW}$$

și randamentul global $\eta = 78,65\%$.

Factorul de putere este dat de relația

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{x_1 + x_2}{r_1 + r_2} = \frac{x_1 (g_2^2 + b_2^2) + b_2}{r_1 (g_2^2 + b_2^2) + g_2}$$

Se găsește $\cos \varphi = 0,509$.

Randamentul global al instalației este

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{3 r_2 I^2}{3 (r_1 + r_2) I^2} = \frac{1}{1 + \frac{r_1}{r_2}};$$

el este maxim pentru r_1/r_2 minim, celace se obține dacă $\frac{d}{dg_2} \left(\frac{r_1}{r_2} \right) = 0$. Se găsește

$g_2 = b_2$ și $\eta_{max} = \frac{1}{1 + 2r_1 b_2}$. Numeric, $\eta_{max} = 83,3\%$ pentru care $P_2 = 1250$ kW și $\cos \varphi = 0,82$.

La mersul în gol $g_2 = 0$ și $\bar{I}_0 = 30,3 + j 227 = 229 \angle 82^\circ 25'$ A, $\bar{U}_2 = 4,54 - j 0,606 = 4,58 \angle -7^\circ 35'$ kV. La mersul în scurt circuit $\bar{Y}_2 = g_2 + j b_2 = \infty$

și $\bar{I}_{sc} = \frac{U_0}{r_1 + j x_1} = 239,0 - j 597,5 = 636 \angle -68^\circ 10'$ A, $\bar{U}_2 = 0$.

Toată discuția se poate face cu ajutorul locurilor geometrice, găsindu-se ușor și $\cos \varphi_{max}$, cu P și η corespunzătoare.

4.31. Punând X_c reactanța capacitivă, puntea fiind în gol, curenții din cele două ramuri sunt egali și egali cu $\bar{E}/(R + jX_c)$. Căderea de tensiune pe latura BC este $\bar{U}_{BC} = -jX_c \bar{E}/(R + jX_c)$; căderea de tensiune pe latura BD este $\bar{U}_{BD} = R \bar{E}/(R + jX_c)$; rezultă $\bar{E}_2 = \bar{U}_{BD} - \bar{U}_{BC} = \bar{E} (R + jX_c)/(R + jX_c)$. Modulul acestei tensiuni este egal cu 1, ceea ce verifică ipoteza că $E_2 = \bar{E}_1 = \text{const}$. Defazajul față de originea considerată este dat de relația $\operatorname{tg} \varphi = \frac{2RX_c}{R^2 - X_c^2}$. Dacă se variază fie R fie C , locul lui $\operatorname{tg} \varphi$ este o cubică unicursală

trecând prin origine și asimptotă la axa reală. Variația defazajului este astfel continuă. Problema poate fi rezolvată și cu ajutorul teoriei cuadripolului, prima ecuație (17) a cuadripolului în condițiile problemei fiind $\bar{U}_1 = \bar{A} \bar{U}_2$, de unde $\bar{U}_2 = \bar{A}^{-1} \bar{U}_1$. Coeficientul \bar{A} este dat de relația (18). Calculând se găsește aceeași relație ca mai sus. Este ușor de văzut că φ poate varia continuu între $\pm 90^\circ$.

4.32. Expresia tensiunii E_2 se stabilește ușor și este $\bar{E}_2 = (R + jX_L) \bar{E}_1 / R + j(X_L - X_O)$ și locul său este un arc de cerc ($\lambda \geq 0$). (a) Pentru ca \bar{E}_2 să fie constant în modul este necesar ca $2LC\omega^2 = 1$, relație ce se scrie egalând numărătorul și numitorul modulului lui \bar{E}_2 . (b) Defazajul este dat de relația $\tan \varphi = \lambda R X_O / [\lambda^2 R^2 + X_L(X_L - X_O)]$. φ poate varia între 0, pentru $\lambda = 0$ și 90° pentru $\lambda = \infty$. În acest montaj se obține numai jumătate din variația obținută în problema 4.31. Locul lui $\tan \varphi$ este de asemenea o cubică unicursală. (c) Se obține stabilind amplitudinea tensiunii de alimentare. (d) Variaza produsul $2LC$ și deci aceste mărimi după o lege ce urmează a fi găsită.

4.33. Curentul în circuit este $\bar{I} = 2\bar{E} / (\lambda R - jX_O)$; căderea de tensiune în porțiunea CA este $\bar{U}_{AO} = -2jX_O \bar{E} / (\lambda R - jX_O)$ și deci $\bar{E}_O = \bar{E} - \bar{U}_{AO} = \frac{R + jX_O}{R - jX_O} \bar{E}$. Tensiunea obținută este constantă ca modul, dar variabilă ca fază.

Locul ei este un cerc cu centrul în origină și defazajul variază între 0 pentru $\lambda = \infty$ și 180° pentru $\lambda = 0$, în sensul trigonometric. Cu datele numerice se poate construi diagrama vectorială corespunzătoare.

5. 5.1. $R = 2,86 \Omega$; $R = 1,42 \Omega$; $R = 5,72 \Omega$.

5.2. $\bar{Z}_{10} = \frac{2}{3} + j \frac{1}{2} \Omega$; $\bar{Z}_2 = \frac{1}{4} + j \frac{11}{12} \Omega$; $\bar{Z}_{30} = \frac{7}{6} + j \frac{2}{3} \Omega$.

5.3. $\bar{Z}_{12} = 2,5 - j 7,5 \Omega$; $\bar{Z}_{23} = 10 - j 5 \Omega$; $\bar{Z}_{31} = 5,76 - j 3,86 \Omega$.

5.4. Se transfigurează triunghiul ABD într-o stea, obținându-se $\bar{Z}_{AO} = 2,2 - j 0,184 \Omega$; $\bar{Z}_{BO} = 16,69 + j 0,276 \Omega$; $\bar{Z}_{DO} = 39,4 + j 0,55 \Omega$. Se compun apoi impedanțele în paralel $\bar{Z}_{BO} + \bar{Z}_{BC}$ și $\bar{Z}_{DO} + \bar{Z}_{DC}$, obținându-se $\bar{Z}_{OC} = 14,71 - j 13,75 \Omega$. Astfel, impedanța echivalentă a punții este $\bar{Z} = \bar{Z}_{AO} + \bar{Z}_{OC} = 16,91 - j 13,934 \Omega$, de unde $R = 16,91 \Omega$.

5.5. Se transfigurează triunghiurile ABF și DCF în stele obținându-se $AO_1 = BO_1 = DO_2 = CO_2 = 0,4 \Omega$ și $FO_1 = FO_2 = 0,8 \Omega$. Se transfigurează triunghiul AO_1O_2 într-o stea obținându-se $AO_3 = 0,165 \Omega$, $O_1O_3 = 0,188 \Omega$, $O_2O_3 = 0,660 \Omega$. Se compun rezistențele în paralel O_3O_1C și O_3O_2C obținându-se $O_3C = 0,635 \Omega$. Se găsește $I = 125$ A. Acest curent se distribuie pe cele două ramuri în paralel găsindu-se $I_{O_3O_1C} = 50$ A și $I_{O_3O_2C} = 75$ A. Pentru a trece de la stea la triunghi se scrie că, în ambele circuite, între aceleași puncte avem aceeași cădere de tensiune. Se ține seama de sensul căderii de tensiune. Astfel, pentru latura AO_1 avem: $125 \times 0,165 + 50 \times 0,188 = I_{AO_1} \times 0,4$, de unde $I_{AO_1} = 75$ A; de asemenea, pentru latura O_1O_2 avem: $75 \times 0,660 - 50 \times 0,188 = I_{O_1O_2} \times 1,6$, de unde $I_{O_1O_2} = 25$ A, etc. Se găsește până la urmă, $I_{AB} = I_{BC} = I_{AD} = I_{DC} = 50$ A; $I_{AF} = I_{FC} = 25$ A; $I_{BF} = I_{FD} = 0$. Sensul curenților este indicat de succesiunea literelor.

5.6. a) Se transfigurează triunghiul ABD într-o stea. Se găsește $AO = 10/\Omega$, $BO = 6 \Omega$, $DO = 15 \Omega$. Se compun impedanțele OBC și ODC găsindu-se $\bar{Z}_\alpha = 4,30 + j 14,95 \Omega$. Se găsește curentul total $\bar{I}_{TOT} = 133 - j 139,5$ mA.

care se distribuie apoi pe cele două ramuri în paralel găsindu-se $\bar{I}_{OBC} = 100,75 - j103,25$ mA și $\bar{I}_{OBC} = 32,25 - j36,25$ mA. Se calculează căderea de tensiune pe ramurile BC și DC , găsindu-se $\Delta \bar{U}_{BC} = 2063 + j 2013$ mV și $\Delta \bar{U}_{DC} = 2181 + j 1941$ mV, de unde diferența de potențial la bornele galvanometrului $\bar{V}_D - \bar{V}_B = 118 - j 72$ mV. De unde $\bar{I}_g = 3,93 - j 2,40$ mA, având valoarea eficace (egală cu modulul) $\bar{I}_g = 4,61$ mA și decalajul față de tensiune $\varphi \cong -31^\circ 30'$. b) Alegem circuitele $ABCA$, $ABCD$ și $ABDA$. Cele trei ecuații care dau curenții ciclici sunt :

$$5(1 + j)\bar{J}_1 + 5(1 + j)\bar{J}_2 + 5\bar{J}_3 = 1$$

$$2(1 + j)\bar{J}_1 + (7 + j8)\bar{J}_2 + 7\bar{J}_3 = 0$$

$$2\bar{J}_1 + 7\bar{J}_2 + 10\bar{J}_3 = 0$$

Cum $\bar{I}_g = \bar{J}_3$ rezolvăm sistemul numai în raport cu această necunoscută, aplicând regula lui Crammer. Se găsește $\bar{J}_3 = -(3,96 - j 2,44)$ mA. Semnul $(-)$ ne arată că sensul curentului în galvanometru este contrar sensului arbitrar dat de noi lui \bar{J}_3 . Găsim apoi ca mai sus $\bar{I}_g = 4,65$ mA și $\varphi = 31,^\circ 50'$. c) Se suprimă latura BD al cărei curent trebuie determinat. Diferența de potențial între B și D , $\bar{V}_B - \bar{V}_D$ este egală cu diferența dintre căderile de tensiune pe AB și AD . Se găsește $\Delta \bar{U}_{AB} = 2,000 - j 2,000$ V și $\Delta \bar{U}_{AD} = 1,639 - j 1,967$ V; $\bar{V}_B - \bar{V}_D = 0,361 - j 0,033$ V. Impedanța rețelei între punctele B și D , presupunând că impedanța sursei este egală cu zero, este: $Z_1 = 39,5 + j 34,6 \Omega$. Curentul căutat va fi deci :

$$\bar{I}_{BD} = \frac{\bar{V}_B - \bar{V}_D}{\bar{Z}_{BD} + \bar{Z}_1} = 3,97 - j 2,45 \text{ mA.}$$

cu $I_g = 4,67$ mA și $\varphi = -32^\circ$.

5.7. Circuitul poate fi descompus în $p = 8 - 5 + 1 = 4$ circuite independente deci se pot scrie patru ecuații de curenți. Se iau următoarele circuite independente (cu sensul curentului indicat de succesiunea literelor): ABF , BCF , CDF , $ABCD$. Ecuațiile curenților sunt :

$$(3 + j2)\bar{J}_1 - 2\bar{J}_2 + \bar{J}_4 = 0$$

$$-2\bar{J}_1 + (4 + j1)\bar{J}_2 - 2\bar{J}_3 + j\bar{J}_4 = 0$$

$$-2\bar{J}_2 + (3 + j2)\bar{J}_3 + \bar{J}_4 = 0$$

$$\bar{J}_1 + j\bar{J}_2 + \bar{J}_3 + (2 + j)\bar{J}_4 = 100$$

Se observă ușor că, din cauza simetriei $\bar{J}_1 = \bar{J}_3$. Rezolvându-se sistemul se găsește ușor $\bar{J}_1 = \bar{J}_3 = j 25$ A; $\bar{J}_2 = -(6 - j 17)$ A; $\bar{J}_4 = (38 - j 41)$ A. De aici se deduc imediat curenții din circuit, sensul lor fiind indicat de succesiunea literelor: $\bar{I}_{AB} = \bar{I}_{CD} = 38 - j 16$ A; $\bar{I}_{BC} = 32 - j 24$ A; $\bar{I}_{BF} = \bar{I}_{FC} = 6 + j 8$ A; $\bar{I}_{DF} = \bar{I}_{FA} = j 25$ A. Curentul dat de sursă este $\bar{I} = 38 - j 41$ A.

5.8. (a) Aplicând metoda circuitelor independente se găsesc ecuațiile $15,1 I_1 - 5,0 I_2 = 2,0$ și $-0,5 I_1 + 25,2 I_2 = -4$; de unde $I_{ab} = I_1 = 0,0855$ A, $I_{cb} = -I_L = 0,142$ A, $I_{bo} = I_1 - I_L = 0,228$ A. Potențialele diverselor noduri, luând ca referință nodul e sunt: $V_a = 1,99$ V, $V_b = 1,14$ V; $V_c = 3,97$ V

(b) Se presupune că nu există sursa din dreapta (f.e.m. corespunzătoare egală cu zero); se găsește $I'_{ab} = 0,141$ A, $I'_{cb} = -0,028$ A; $I'_{be} = 0,113$ A. Se presupune numai sursa din dreapta: $I''_{cb} = 0,170$ A, $I''_{ab} = -0,0563$ A; $I''_{be} = 0,114$ A. Suprapunând efectele se găsește același rezultat ca mai sus.

5.9. Se pot forma două circuite independente. Se găsește ușor $\bar{I}_{AEB} = 3 + j4$ A; $\bar{I}_{BEA} = 1,5 - j3$ A; $\bar{I}_{BA} = 1,5 + j7$ A.

5.10. Se pot forma tot două circuite independente. Se găsește $\bar{I}_{AE_1B} = 10 - j10$ A; $\bar{I}_{BE_2A} = 7,5 - j7,5$ A, $\bar{I}_{BA} = 2,5 - j2,5$ A.

5.11. Se pot forma trei circuite independente. Se găsește $\bar{J}_{ABD} = 0,78 + -j1,97$ A; $\bar{J}_{BCD} = 3,42 + j1,23$ A; $\bar{J}_{ADCA} = 12,57 - j0,15$ A, de unde $\bar{I}_{AB} = \bar{J}_{ABD}$; $\bar{I}_{BC} = \bar{J}_{CDA}$ și $\bar{I}_{BD} = -(2,64 - j0,74)$ A; $\bar{I}_{AD} = 11,79 - j2,12$ A; $\bar{I}_{DC} = 9,15 - j1,38$ A; $\bar{I}_{CA} = \bar{J}_{ADCA}$.

5.12. (a) Ecuațiile circuitului sunt: $10,1 V_a - 0,1 V_b = 20$; $-0,1 V_a + 0,35 V_b - 0,05 V_c = 0$ și $-0,05 V_b + 5,05 V_c = 20$, de unde rezultă $V_a = 1,99$ V, $V_b = 1,14$ V, $V_c = 3,97$ V. Curenții din lături sunt $I_{ab} = G_{ab} (V_a - V_b) = 0,0855$ A; $I_{cb} = G_{cb} (V_c - V_b) = 0,142$ A, $I_{be} = G_{be} V_b = 0,228$ A.

(b) Se presupune numai sursa din stânga; se găsește $V'_a = 1,99$ V, $V'_{ab} = 1,42$ V, $V'_{be} = 0,568$; $V'_{cb} = -0,562$ V. Se presupune numai sursa din dreapta; se găsește $V''_c = 3,97$ V, $V''_{cb} = 3,40$ V, $V''_{be} = 0,569$ V; $V''_{ab} = -0,563$ V. Suprapunând efectele se găsește $V_{ab} = 0,86$ V, $V_{cb} = 2,84$ V; $V_{be} = V_b = 1,14$ V. Restul ca mai sus. S'a notat $V_{ab} = V_a - V_b$. A se compara cu problema 5.8.

5.13. a) punând $\bar{Z}_1 = R$, $\bar{Z}_2 = -\frac{j}{C\omega}$, $\bar{Z}_3 = jL\omega$, avem imediat $\bar{I}_L = \bar{U}_{ab} / (\bar{Z}_{ab} + \bar{Z}_3)$.

$$\text{Cum } \bar{Z}_{ab} = \bar{Z}_1 \bar{Z}_2 / (\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2) \text{ și } \bar{U}_{ab} = \bar{E}_c = \frac{\bar{E}}{\frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2} + 1}$$

\bar{E}_c fiind tensiunea la bornele condensatorului la mers în gol (fără inductanță) și deoarece $\bar{E} = \bar{E}_R + \bar{E}_C$, rezultă imediat $\bar{I}_L = \bar{E} \bar{Z}_2 / (\bar{Z}_1 \bar{Z}_2 + \bar{Z}_2 \bar{Z}_3 + \bar{Z}_3 \bar{Z}_1) = \bar{E} [R(1 - LC\omega^2) - jL\omega] / [R^2(1 - LC\omega^2)^2 + L^2\omega^2]$;

$$b) \text{ se scrie } \bar{Z} = \bar{Z}_1 + \frac{\bar{Z}_2 \bar{Z}_3}{\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3} \text{ și } \bar{I} = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}}; \text{ apoi } \bar{I}_L = \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3} \bar{I}.$$

Calculând se găsește aceeași expresie ca mai sus;

$$c) \bar{I}_L = -jE/L\omega.$$

5.14. Dacă $\bar{Z}_{ab} = R = 20 \Omega$, rezultă $\bar{I}_{ab} = \bar{U}_{ab} / (\bar{Z}_{ab} + \bar{Z}_1)$ unde \bar{U}_{ab} este tensiunea în gol la bornele lui \bar{Z}_{ab} , care tensiune este egală cu tensiunea de la bornele capacității. Avem:

$$\bar{U}_{ab} = -j15 \frac{100 + j50}{11,0 + j9,5 - j15} = -j15 \frac{100 + j50}{11 - j5,5}$$

\bar{Z}_T este impedanța totală privită dela bornele a și b . Vom avea :

$$\bar{Z}_T = j 25 + \frac{(11 + j 9,5)(-j 15)}{11 - j 5,5} = \frac{280 + j 110}{11 - j 5,5}$$

Se găsește $\bar{I}_{ab} = 1,5 - j 3,0$ A (ca și în problema 5.8).

5.15. $\bar{I}_0 = 1,5 + j 7$ A.

5.16. Introducându-se pila în ramura ab , se găsește ușor că în ramura unde a fost pila curentul este $\bar{I} = 1,5 - j 3$ A.

5.17. Linia fiind perfect simetrică, se poate trata numai pentru o fază. Fiind perfect izolată față de pământ și neglijându-se capacitatea linia poate fi considerată ca un dipol. Luând \bar{U}_2 ca origine de fază, ecuația dipolului dă (1) $U_1 \angle \theta = U_2 + Z \angle \psi \cdot I \angle -\varphi_2$.

Introducând datele numerice $R = 0,35 \Omega/\text{km}$, $X = 0,738 \Omega/\text{km}$, rezultă $\bar{Z} = 49 \angle 64^\circ 38'$; apoi $\bar{I} = 500 \angle -25^\circ 50'$ de unde ecuația dipolului (1) se poate scrie $U_1 \angle \theta = 60000/\sqrt{3} + 24500 \angle 38^\circ 48'$ V. Scriind explicit și identificând părțile reale și complexe, se găsește ușor $\bar{U}_1 = 55,95 \angle 15^\circ 58'$ kV; de aci $\varphi_1 = -\theta - \varphi_2 = 41^\circ 48'$ și $\eta = 74,87\%$. Diagrama cerută se construiește ușor; raza cercurilor este $r = \frac{U_1 U_2}{Z} = 39,6$ MVA; centrul cercului O_1 se găsește la

$\overline{OO_1} = \frac{U_1^2}{Z} = 63,9$ MVA; centrul cercului O_2 la $\overline{OO_2} = \frac{U_2^2}{Z} = 24,6$ MVA; se ia scara $1 \text{ cm} = 10$ MVA. Trebuie ținut seama că diagrama este construită numai pentru o fază. Pentru a obține puterea totală în sistem, rezultatele se înmulțesc cu 3 sau se împarte modulul scării cu 3.

5.18. Problema se rezolvă grafic cu ajutorul diagramei cu doi poli de tensiune. Avem $\bar{Z} = 1 + j 10 = 10,05 \angle 84^\circ 17'$. Raza comună cercurilor este $r = \frac{EU}{Z} = 10,95$ MVA. Centrul cercului O_2 se găsește la $\overline{OO_2} = U^2/Z = 9,94$ MVA. Centrul cercului O_1 se găsește la $\overline{OO_1} = E^2/Z = 12,05$ MVA. Diagrama se construiește luând scara $25 \text{ mm} = 10$ MVA (fig. 5.18). *)

Când vectorul $\overline{O_2 N_2}$ este paralel cu axa OP puterea debitată este maximă. Se găsește astfel OP_2 , proiecția vectorului \bar{S}_2 pe axa puteri reale. Luând $S_2 = 5000$ kVA ca unitate, se găsește $P_2 = 3390$ kW. Randamentul este $\eta = \overline{OP_2} : \overline{OP_1} = 80\%$, deoarece OP_1 reprezintă puterea absorbită de mașină.

5.19. Problema se rezolvă ca și cea de mai sus, cu ajutorul diagramei cu doi poli de tensiune a dipolului. Trebuie să se lucreze cu tensiunea pe fază. Procedând ca în cazul precedent se găsește: $\bar{Z} = 0,2 + j 2,2 = 2,21 \angle 84^\circ 48' \Omega$; $\overline{OO_1} = 234$ kVA; $\overline{OO_2} = 150$ kVA; $r = 188$ kVA. Diagrama s'a construit luând scara $10 \text{ mm} = 100$ kVA (fig. 5.19).

*) Scările indicate în soluții nu se potrivesc în general cu scările figurilor

P_2 s'a luat cu semnul (—) deoarece este o putere negativă. Deasemenea, diagrama fiind construită numai pentru o fază, s'a luat o treime, din puterea absorbită totală. Din diagramă se găsește acum $S_2 = 86,5 \text{ kVA}$, de unde $I = 150 \text{ A}$, $\cos \varphi = 0,960$ capacitiv, deoarece motorul sincron produce putere reactivă.

5.20. $\bar{Z} = 10 \angle 15^\circ = 9,659 + j 2,588 \Omega$; $\bar{Y}_1 = 0,014 - j 0,026 = 0,030 \angle -61^\circ 40' \text{ S}$; $\bar{Y}_2 = 0,019 - j 0,055 = 0,058 \angle -71^\circ \text{ S}$; $\bar{Z}_0 = 5,345 + j 7,057 = 8,852 \angle 52^\circ 55' \Omega$.

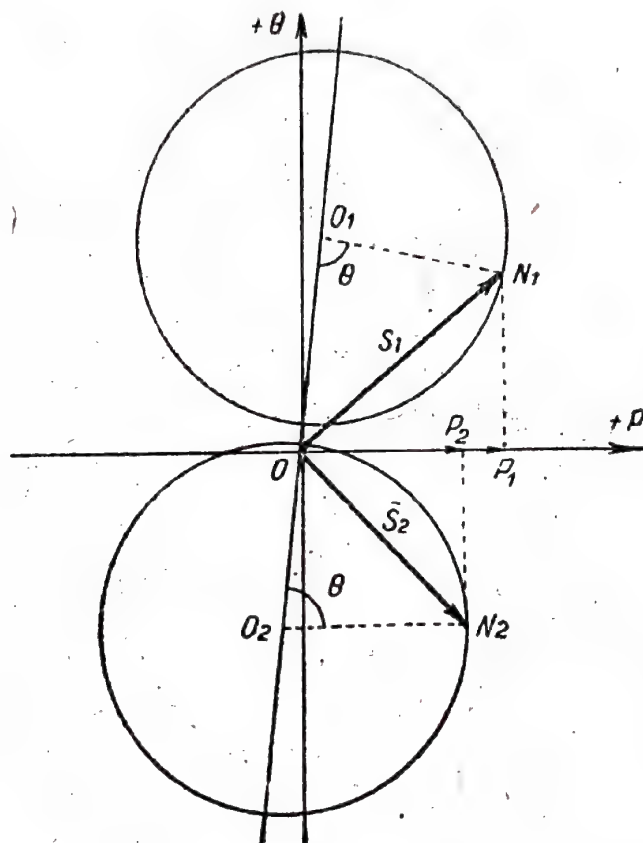


Fig. 5.18

5.21. $\bar{Y} = \frac{1}{10} \angle -75^\circ \text{ S}$; $Z_1 = 5,523 + j 1,945 = 5,856 \angle 19^\circ 24' \Omega$; $= 2,596 + j 1,416 = 2,957 \angle 28^\circ 32' \Omega$. Impedanța caracteristică este egală cu cea din problema 5.20.

5.22. Cablul fiind scurt, poate fi asemuit cu un cuadripol în T în care $\bar{Z}_1 = \bar{Z}_2 = \frac{1}{2}(R_T + j \omega L_T)$ și $\bar{Y} = j \omega C_T$. Constantele cuadripolului se deduc

din $\bar{A} = \bar{D} = 1 + \bar{Z}\bar{Y}$, $\bar{B} = 2\bar{Z} + \bar{Z}^2\bar{Y}$, $\bar{C} = \bar{Y}$. Ecuațiile cuadripolului devin $\bar{U}_1 = [\bar{A}\bar{Z}_0 + \bar{B}]\bar{I}_2$ și $\bar{I}_1 = [\bar{C}\bar{Z}_0 + \bar{A}]\bar{I}_2$ (căci $\bar{U}_2 = \bar{Z}_0\bar{I}_2$), de unde se deduc \bar{I}_1 , \bar{I}_2 și curentul de încărcare $\bar{I}_4 = \bar{I}_1 - \bar{I}_2$. Pentru datele numerice se găsește ușor $\bar{I}_2 = 419 + j 820 = 920 \angle 62^\circ 58' \text{ A}$; $\bar{I}_1 = 450 + j 1056 = 1145 \angle 66^\circ 46' \text{ A}$; $\bar{I}_4 = 31 + j 236 = 238 \angle 81^\circ 56' \text{ A}$.

5.23. Ca și în cazul precedent se asimilează linia cu un cuadripol în T . Se găsește: $\bar{U}_1 = 39,011 + j 1,788 = 39,052 \angle 2^\circ 38'$ kV, $\bar{I}_1 = 191,91 - j 140,05 = 238 \angle -36^\circ 29'$ A; $\varphi_1 = \theta - (-\varphi'_1) = 2^\circ 38' + 36^\circ 29' = 39^\circ 07'$; $\cos \varphi_1 = 0,776$; $\eta = 92,6\%$.

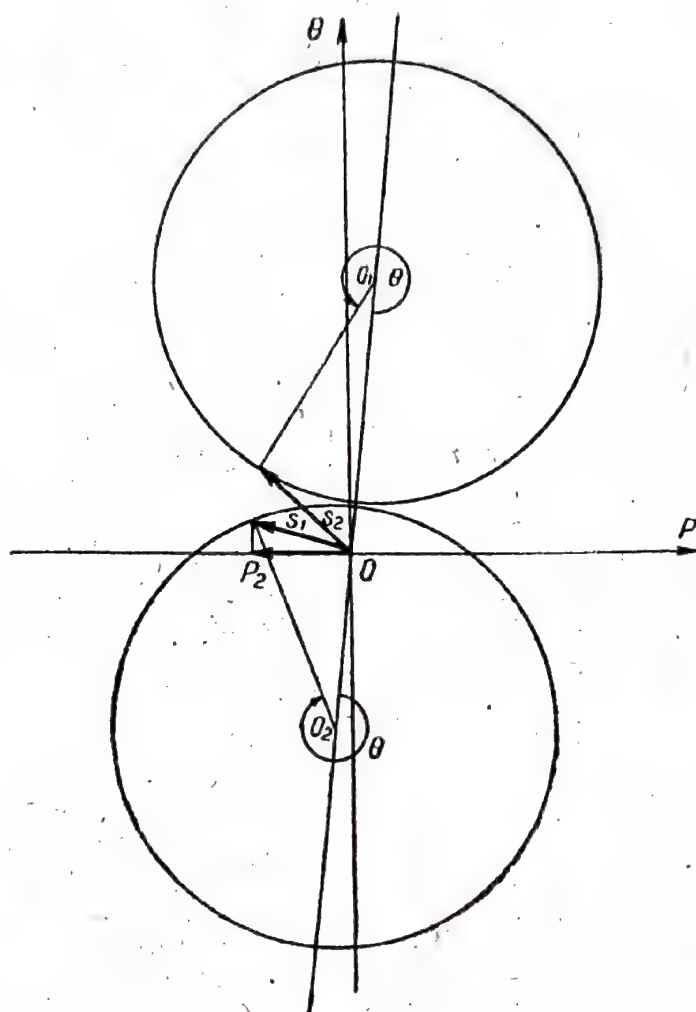


Fig 5.19

5.24. $\bar{U}_1 = 37,095 - j 0,023 = 37,095 \angle -0^\circ 02'$ kV; $\bar{I}_1 = 192,7 - j 49,0 = 198,8 \angle -14^\circ 15'$ A; $\varphi_1 = -14^\circ 17'$; $\cos \varphi_1 = 0,969$ ind; $\eta = 92\%$.

Observație: Deși randamentul este puțin mai scăzut în cazul de față, transmiterea energiei prin cablu are avantajul unui factor de putere mult mai ridicat și deci o solicitare mai mică a generatoarelor din centrală.

5.25., Prin reducerea succesivă a diverselor impedanțe expresia curentului devine:

$$\bar{I} = \bar{U}_1 \left[\frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2 + \frac{1}{\frac{1}{\bar{Z}} + \frac{1}{\bar{Z}_3}}} \right]$$

sau numeric :

$$\bar{I} = \left[\frac{1}{5} + \frac{1}{1 - j2 + \frac{1}{\frac{1}{3 + j4} + \frac{1}{4 - j2 + \lambda(1 + j3)}}} \right] \cdot 120 \angle 30^\circ$$

a) *Determinarea analitică a locului.* Făcând toate calculele, se obține :

$$\bar{I} = \frac{106,312 - 23,804 \lambda + j(29,856 + \lambda 53,228)}{31 - 2\lambda + j(-2 + 14\lambda)} \times 21 = x + jy.$$

Pentru a găsi ecuația cercului, eliminăm numitorul, identificăm părțile reale și complexe și eliminăm pe λ între cele două ecuații obținute. Se găsește :

$$x^2 + y^2 - 158,747x - 85,689y + 7753,054 = 0$$

un cerc cu centrul în punctul de coordonate $a = 79,373$ A, $b = 42,844$ A și raza

$r = 19,637$ A. Pentru $\lambda = \infty$. . $Z = \infty$ și deci $\bar{I}\infty = 86,2 \angle 16^\circ$ A = $83,244 +$

$j23,814$ A. Pentru $\lambda = 0$. . $\bar{Z} = 4 - j2 \Omega$ și $\bar{I}_3 = 69,28 + j58,5 = 90,7 \angle 40^\circ 10'$ A.

Pentru $\lambda = 1$, $\bar{I}_1 = 85,057 + j61,171 = 104,5 \angle 35^\circ 20'$ A.

b) *Determinarea locului prin inversiune* (planșa I), Inversiunea s'a efectuat din aproape în aproape : se inversează conjugata drepte $\Delta \equiv 4 - j2 + \lambda(1 + j3)$ față de un cerc unitar (α_1) de rază $k = 10$ cm obținându-se un cerc (C_1) (---). Dacă dreapta a fost construită la o scară de modul $[a] = 2$ cm., atunci modulul scării cercului este $[x] = \frac{[k^2]}{[a]} = 50$ cm. [scara 2]. Față de

același cerc unitar se inversează și $\bar{Z} = 3 + j4$. Pentru a face suma acestor admitanțe se mută axele în punctul O_2 . Se inversează acest cerc în raport cu O_2 , luându-se un cerc unitar cu raza de 10 cm, deci $\overline{O_2 S_1} \times \overline{O_2 T_1} = 100$ iar modulul noii scări rezultă $[y] = 2$ cm : scara va fi aceeași cu prima scară 1. Luând simetricul acestui cerc față de axa reală, se obține cercul C_2 al impedanțelor ramurilor în paralel (---). Mutând axele în punctul O_3 , vârful vectorului $-\bar{Z}_2$, l-am adunat cu acesta. Se inversează acum cercul C_2 față de O_3 luându-se un cerc unitar (α_3) cu raza de 8 cm, deci $\overline{O_3 S_2} \times \overline{O_3 T_2} = 64$ și modulul noii scări $[z] = 32$ cm [scara 3]. Se ia simetricul acestui cerc față de axa reală, obținându-se cercul C_3 ; mutând originea în punctul O_4 , obținem astfel cercul admitanței totale (---). Pentru a avea cercul curentului, înmulțim cu $U|_{\varphi} = 210 \angle 30^\circ$, ceea ce revine în a roti ultimele axe cu -30° și a găsi modulul noii scări. Aceasta se obține din scara 3 înmulțind elementele cu 210 (scara 4). Verificare $\bar{I}_1 = 105 \angle 36^\circ 20'$ A : eroare de $+0,5\%$.

c) *Determinarea locului prin inversiune simplificată, cu un singur cerc* (planșa II). Construcția cercului C_1 și mutarea originii în punctul O_2 se face ca mai sus. Scările 1 și 2 rămân aceleași. Pentru a inversa în raport cu O_2 pe C_1 în el însuși luăm raza cercului unitar $k_2^2 = \overline{O_2 T^2} = 11,5^2$. Modulul noii scări $[x'] = 2,655$ [scara 3']. Pentru a avea efectuată inversiunea se ia inversul axei complexe. Se mută originea în O_3 , vârful vectorului $-\bar{Z}_2$, față de care se ia acum inversul luând $k_3^2 = \overline{O_3 T_1^3} = 12,7^2$. Modulul noii scări $[y'] = 61$ cm [scara 4']. Se schimbă din

nou sensul axei complexe obținându-se cercul C_3 ; restul ca în prima metodă. Verificare $\bar{I}_1 = 104,6 \angle 35^\circ 30'$ eroarea 0,095 %.

d) *Determinarea locului prin metoda industrială* (planșa III). Chestiunea nu prezintă nici o dificultate și a mai fost tratată (problemele 4.21 și 4.24).

e) *Trasarea caracteristicii* se face ușor calculând sau luând din epură valoarea diversilor curenți și trasând apoi curba $I = f(\lambda)$.

f) Cercul C_3 dă admitanța ramurilor în paralel. Calculul analitic nu prezintă nici o dificultate.

5.26. Raportul de transformare este $k = \frac{578\sqrt{3}}{370} = 2,7 \dots k^2 = 7,3$. Din

încercarea de scurtcircuit se deduce $R_1 = R_2' = 0,0715 \Omega \dots R_2 = 0,00982 \Omega$. Apoi $X_1 = X_2' = 0,522 \Omega \dots X_2 = 0,0715 \Omega$. Din proba de mers în gol se deduce (se ia curentul pe fază) $p_0 = 3306 \text{ W}$, $g_0 = 0,0033 \text{ S}$ și $b_0 = 0,1035 \text{ S}$.

5.27. $k = 3,33 \dots k^2 = 11,1$ $R_1 = R_2' = 0,1623 \Omega \dots R_2 = 0,01465 \Omega$; $X_1 = X_2' = 0,9345 \Omega \dots X_2 = 0,084 \Omega$; $p_0 = 3145 \text{ W}$, $g_0 = 0,00314 \text{ S}$, $b_0 = 0,0502 \text{ S}$.

5.28. Ca și în cazul motorului asincron, datele experimentale permit determinarea globală a inductanței și rezistenței. Astfel, în unitățile date (a se veri-

fica) avem $R = (R_1 + R_2') = \frac{P_{sc}}{10^3 S} \cdot \frac{U^2}{S}$; tensiunea de scurtcircuit ne dă impedanța totală:

$$Z = \frac{e_{sc}}{100} \cdot \frac{U^2}{S}$$

de unde se deduce reactanța globală $X = (X_1 + X_2') = \sqrt{Z^2 - R^2}$; pierderile

de mers în gol determină conductanța $g_0 = \frac{P_0}{10^3 S} \cdot \frac{S}{U^2}$ iar susceptanța este de-

terminată de curentul de mers în gol $b_0 = \frac{I_0}{100} \cdot \frac{S}{U^2}$.

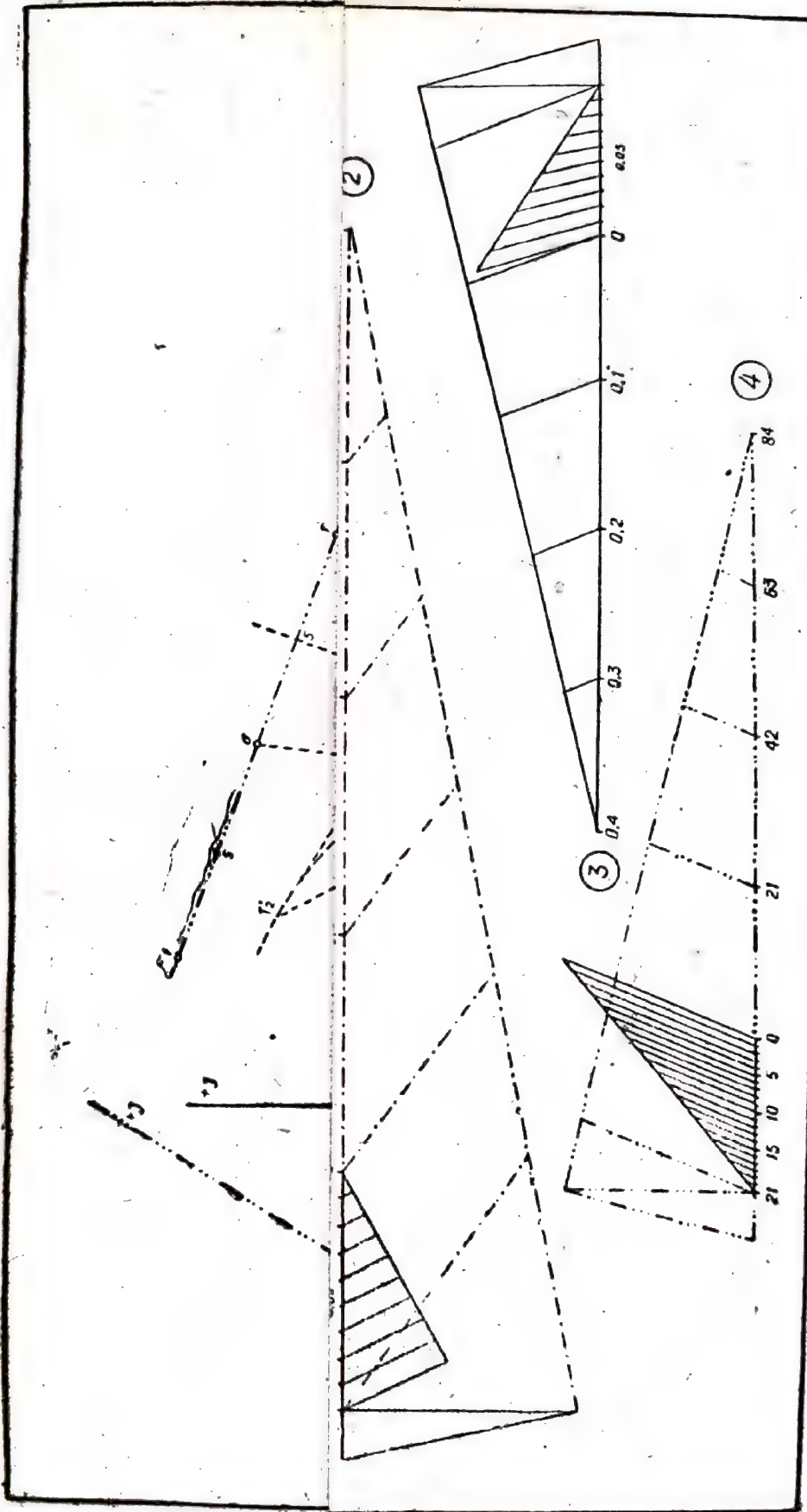
Notă. S'a pus în evidență factorul U^2/S (în care U este în kV și S în MVA) care intră în calculul tuturor elementelor caracteristice ale transformatorului. U se mai numește și tensiunea de referință. Ea poate fi una din tensiunile transformatorului, sau o tensiune oarecare. Pentru calculul numeric luăm $U_1 = 110 \text{ kV}$.

Se găsește ușor: $R = 2,43 \Omega \dots R_1 = R_2' = 1,215 \Omega \dots R_2 = \left(\frac{10,5}{110}\right)^2 \times 1,215 = 0,0111 \Omega$; $Z = 40,25 \Omega \dots X = 40,18 \Omega \dots X_1 = X_2' = 20,09 \Omega \dots X_2 = 0,183 \Omega$; $g_0 = 6,2 \times 10^{-6} \text{ S}$; $b_0 = 104 \times 10^{-6} \text{ S}$.

Pentru determinarea constantelor cuadripolului avem $\bar{Z}_1 = \bar{Z}_2' = 1,25 + j20,09 \Omega$ și $\bar{Y} = (6,2 - j104) \times 10^{-6} \text{ S}$. Se găsește $\bar{A} = \bar{D} = 1,002$; $\bar{B} = 2,433 + j40,222 \Omega$; $\bar{C} = \bar{Y} = (6,2 - j104) \times 10^{-6} \text{ S}$.

5.29. ¹⁰ Se scriu ecuațiile cuadripolului sub forma clasică (17) și se găsește: $\bar{A} = 1,25$; $\bar{B} = 12,5 + j10 \Omega$; $\bar{C} = -j0,025 \text{ S}$; $\bar{D} = 1 - j0,25$. De aici

Planşa I



rezultă constantele circuitului \bar{T} : $\bar{Z}_1 = j 10 \Omega$; $\bar{Z}_2 = 10 \Omega$; $\bar{Y} = -j 0,025 \text{ S}$.
2^o Transformatorul fiind perfect, ecuația sa este:

$$\bar{U}_1 = \bar{U}_2' + (\bar{Z}_1 + k^2 \bar{Z}_2) \bar{I}_1$$

Dar $k = A = 1,25$ și deci $\bar{U}_2' = 1,25 \times 10 = 12,5 \text{ kV}_1$. Se găsește analog $\bar{Z}_1 + k^2 \bar{Z}_2 = 15,625 + j 10$ și $\bar{I} = 400 (0,6 - j 0,8)$ de unde $\bar{U}_1 = 19,45 - j 2,6 = 19,26 \angle -7^\circ 37' \text{ kV}$.

5.30. 1^o Se scrie ecuația transformatorului raportată la secundar în care se pun valorile cunoscute. Se găsește $\bar{U}_1 = 13,6 + j 63,4 \text{ V}$, sau revenind la înalta tensiune, $\bar{U} = 81,6 + j 380,4 = 389 \angle 77^\circ 52' \text{ V}$, adică 3,26 %. 2^o $\cos \varphi = 0,211$ ind.

3^o Curentul de magnetizare se găsește $\bar{I}_{01} = 2 \angle -80^\circ 30' \text{ A}$. Dacă alimentarea se face pe la partea de joasă tensiune $\bar{I}_{02} = 12 \angle -75^\circ 05' \text{ A}$. Se calculează apoi impedanțele $\bar{Z}_{01}, \bar{Z}_{sc}, \bar{Z}_{02}$ de unde se deduce $\bar{A} = 8,3 \angle 16^\circ 45'$, $\bar{B} = 11,22 \angle 75^\circ 10' \Omega$, $\bar{C} = 13,8 \cdot 10^{-2} \angle -63^\circ 45' \text{ S}$, $\bar{D} = 1,02 \angle -2^\circ 42'$. Se calculează apoi constantele circuitului \bar{T} : $\bar{Z}_1 = 729 + j 5243 = 5250 \angle 82^\circ 05' \Omega$; $\bar{Z}_2 = 6^2 (35,7 + j 142,2) = 6^2 \cdot 146,6 \angle 75^\circ 55' \Omega$; $\bar{Y} = \bar{C}$.

Notă. Impedanța secundarului, trebuind să fie raportată la primar, s'a înmulțit cu $k^2 = 6^2$.

5.31. Se iau ca circuite independente circuitele ABFA, AFDA, ADCA și BCDB. Condiția de echilibru este ca în ramura FD să nu treacă niciun curent. Pentru ușurința calculului se ia $\bar{I}_{AFDA} = \bar{I}_2 + \bar{I}_3$. Calculul nu prezintă nicio dificultate și, prin identificarea părților reale și a celor complexe, se găsesc condițiile de echilibru ale acestei punți $L = SC (Q + r + \frac{Q}{P} r)$ și $R = QS/P$. Numeric se găsește $L = 1,4 \text{ H}$ și $R = 500 \Omega$.

5.32. Punând $\bar{Z}_C = R_C - j X_C$ și $\bar{Z}_L = R_L + j X_L$ neglijând impedanța galvanometrului și calculând printr-o metodă oarecare curentul din galvanometru se găsește

$$\bar{I}_0 = \frac{\bar{E} (\bar{Z}_0 \bar{Z}_L - R_1 R_2)}{R_1 R_2 (\bar{Z}_L + \bar{Z}_0) + \bar{Z}_L \bar{Z}_0 (R_1 + R_2)}$$

Punând condiția de echilibru $\bar{I}_0 = 0$, rezultă $\bar{Z}_0 \bar{Z}_L - R_1 R_2 = 0$, de unde

$$L_L = \frac{C R_1 R_2}{R_s^2 C^2 \omega^2 + 1} \text{ H și } R_L = \frac{C^2 \omega^2 R_1 R_2 R_C}{R_C^2 C^2 \omega^2 + 1} \Omega$$

Inductanța L_L este independentă de rezistența sa proprie.

5.33. Transformatoarele fiind perfecte pot fi asemuite cu dipoli având aceleași tensiuni primare și secundare. \bar{I}_1 și \bar{I}_2 fiind curenții debitați de transformatori, se găsește ușor că $\bar{I}_1/\bar{I}_2 = \bar{Z}_2/\bar{Z}_1$ de unde se deduce apoi că $\bar{I}_1 = \bar{I} \bar{Z}_2/(\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2)$ și $\bar{I}_2 = \bar{I} \bar{Z}_1/(\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2)$, \bar{I} fiind curentul total debitat de ambele transformatoare. Se poate arăta ușor că $\bar{Z} = C (k' + k'')$, C fiind o constantă de proporționalitate și

k', k'' rezistența și reactanța exprimate în procente. Numeric se găsește $I = 92,5 - j 69,4$ A; $\bar{I}_1 = 31,5 - j 33,2$ A; $\bar{I}_2 = 61,1 - j 36,2$ A; având respectiv modulele 45,7 A și 71 A. Rezultă că transformatorul care are tensiunea de scurtcircuit mai mică se va încălzi cu 12,3 % mai mult decât sarcina nominală și cu 55 % mai mult decât celălalt.

5.34. Alternatorul se asemuiește cu un dipol, tensiunea de intrare fiind E și cea de ieșire U . Se utilizează diagrama cu doi poli de tensiune. Deoarece se neglijează rezistența proprie a alternatorului, $\psi = 90^\circ$. Se găsește ușor $\overline{OO_2} = 7200$ kVA și $\overline{OO_1} = 10375$ kVA, $R = 8650$ kVA. Diagrama se construiește numai pentru o fază. Se va lua deci $S/3$. Se găsește $P'_2 = 3250$ kW/fază și $Q'_2 = 750$ kVAR/fază sau total $P_2 = 9750$ kW și $Q_2 = 2250$ kVAR; $\cos \varphi_2 = 0,975$ inductiv, mașina producând putere reactivă. Pentru ca alternatorul să absoarbă putere reactivă, trebuie să funcționeze subexcitat. Se ia simetricul lui N_2 , se găsește noua rază $\overline{ON'_2}$, din care se deduce $E' = 3500$ V; rezultă că excitația trebuie redusă cu 15,5 %.

5.35. Se scrie că tensiunea, respectiv curentul de ieșire a primului cuadripol este egală cu tensiunea, respectiv curentul, de intrare a celui de al doilea cuadripol. Se găsește $\bar{A} = \bar{A}_1 \bar{A}_2 + \bar{B}_1 \bar{C}_2$; etc. Numeric se găsește: $\bar{A} = 0,9727 + j 0,0042$; $\bar{B} = 22,05 + j 106,36 \Omega$; $\bar{C} = (0,123 + j 2,54) 10^{-4}$ S; $\bar{D} = 0,9957 + j 0,0023$.

5.36. Același procedeu ca mai sus extins la trei cuadripoli. Se găsește $\bar{A} = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \bar{B}_2 \bar{C}_3 + \bar{B}_1 \bar{C}_2 \bar{A}_3 + \bar{B}_1 \bar{D}_2 \bar{C}_3$, etc.

5.37. Ca mai sus. Se găsește $\bar{A} = 0,9788 + j 0,0032$; $\bar{B} = 21,906 + 161,09 \Omega$; $\bar{C} = (0,085 + j 2,164) 10^{-4}$ S; $\bar{D} = 0,9799 + j 0,0030$.

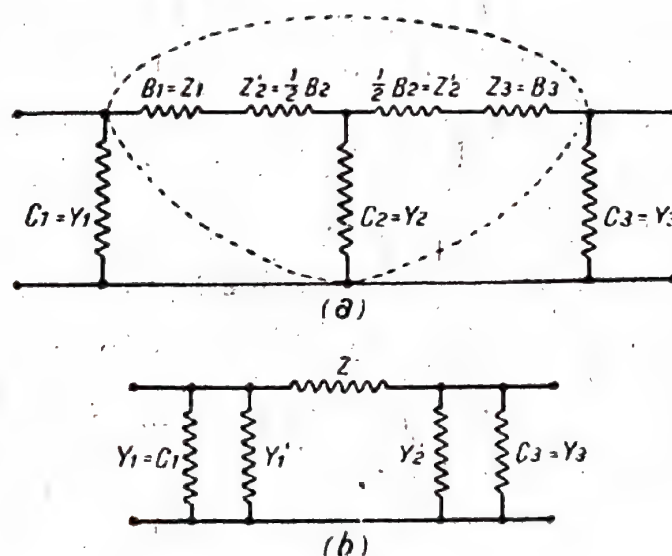


Fig 5.38

5.38. Schema echivalentă circuitului este dată în fig. 5.38 a. Se transfigurează circuitul în T central într-un circuit π echivalent (steaua în triunghi). Se obține $\bar{Z}' = \bar{Z}'_1 + \bar{Z}'_3 + \bar{Z}'_1 \bar{Z}'_3 \bar{Y}'_2$ în care $\bar{Z}'_1 = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 = \bar{B}_1 + \bar{B}_2/2$; $\bar{Z}'_3 = \bar{Z}_3 + \bar{Z}_2 = \bar{B}_3 + \bar{B}_2/2$; $\bar{Y}' = \bar{Y}_1 + \bar{Y}_1'$; $\bar{Y}'' = \bar{Y}_3 + \bar{Y}_2$ în care $\bar{Y}_1' = \bar{Z}'_3 \bar{Y}_2 / \bar{Z}'$ și $\bar{Y}_1'' = \bar{Z}'_1 \bar{Y}_2 / \bar{Z}'$. Se obține astfel un circuit echivalent în π cu aju-

torul căruia se determină constantele căutate. Numeric se găsește $\bar{A} = \bar{D} = 0,8872 + j 0,0137$; $\bar{B} = 29,41 + j 286,4 \Omega$; $\bar{C} = (0,079 + j 7,391) \cdot 10^{-4} \text{ S}$.

5.39. Asemuind linia cu un dipol, tensiunea la sosire este $\bar{U}_2 = \bar{U}_1 - \bar{Z}\bar{I}$, în care se ia ca origine de fază tensiunea la alternator. Puterea la plecare fiind $\bar{U}_1\bar{I}_c$ și la sosire $\bar{U}_2\bar{I}_c$, randamentul este $(\text{real } \bar{U}_2\bar{I}_c)/(\text{real } \bar{U}_1\bar{I}_c)$. Sistemul fiind trifazat, se va lucra pe fază. Numeric se obține: $\bar{I} = 28,8 - j 21,6 \text{ A}$, circuitul fiind inductiv. $\bar{U}_2 = 3264,16 - j 207,36 \text{ V}$; $P_1 = 100 \text{ kW}$, $P_2 = 98,485 \text{ kW}$; $\eta = 98,5 \%$.

5.40. Luând ca origine de fază tensiunea la sosire și presupunând că factorul de putere la utilizare este egal cu 1, ecuația tensiunilor este $U (\cos \theta + j \sin \theta) = \bar{U} + \bar{Z}\bar{I}$. Se deduce $\tan \theta = XI/(U + RI)$ și randamentul căutat $U \cos \theta$. $I/|U| = \cos \theta$. Numeric $\eta = 99,60 \%$. R și X sunt rezistența și reactanța liniei.

5.41. Se ia ca origine de fază tensiunea simplă la bornele motorului. Circuitul este un dipol cu ecuația $U_1 (\cos \theta + j \sin \theta) = \bar{U}_2 + \bar{Z}\bar{I}$. Curentul \bar{I} se determină din relația $\bar{I} = \frac{P_2}{3 U_2 \cos \varphi} (\cos \varphi + j \sin \varphi) = \frac{P_2}{3 U_2} + j \frac{P_2 \tan \varphi}{3 U_2}$. În-

mulțind cu \bar{Z} , făcând înlocuirile în ecuația de mai sus și identificând părțile reale și complexe se obțin două ecuații cu două necunoscute (θ și U_2). Se deduce $U_2 = 3460 \text{ V}$, deci tensiunea la bornele motorului sincron este egală cu tensiunea la barele uzinei. Explicația fenomenului constă în faptul că motorul sincron supraexcitat lucrează ca un compensator de fază.

5.42. Motorul sincron trebuie să compenseze motorul asincron, factorul de putere minim corespunde cazului în care motorul asincron ar funcționa numai reactiv, adică ar absorbi $49,5/0,86 = 57,5 \text{ kVAR}$. În acest caz, factorul de putere al motorului sincron este dat de relația $Q/P = \tan \varphi$; cunoscând Q , P se deduce din $\bar{S} = P + jQ$. Se găsește $P = 17,1 \text{ kW}$ și $\cos \varphi = 0,3$.

5.43. Circuitul este un dipol cu ecuația $\bar{U}_1 = \bar{U}_2 + \bar{Z}(\bar{I}_R + \bar{I}_M)$. Se ia ca origine de fază U_2 . Curentul $\bar{I}_M = \frac{P \cdot 10^3}{3 U_2} + j \frac{P \cdot 10^3 \tan \varphi}{3 U_2}$. Numeric se găsește $\bar{U}_1 = 255,48 + j 18,635 = 256,6 \angle 4,11^\circ \text{ V}$.

5.44. (a) Se transfigurează circuitul abc într-o stea obținându-se $\bar{Z}_a = \bar{Z}_b = \bar{Z}_1 = \bar{Z}_2 = 2,89 + j 281 \Omega$ și $\bar{Z}_c = \bar{Z}_3 = -1,45 - j 1,915 \Omega$.

(b) Aplicând relațiile (21) se găsește $\bar{Z}_{10} = \bar{Z}_{20} = 0 - j 354 \Omega$, $\bar{Z}_{12} = 4,95 + j 521 \Omega$.

(c) Aplicând relațiile (20) se găsește $\bar{A} = \bar{D} = 0,853 + j 0,0014$, $\bar{B} = 4,97 + j 520 \Omega$, $\bar{C} = (-0,396 + j 521) \cdot 10^{-6} \text{ S}$.

Notă. Trebuie rezolvat în prealabil punctul (c) apoi (b).

5.45. Considerând 3 din cele 4 încercări posibile de mers în gol și în scurt circuit, se obțin ecuațiile:

$$\bar{Z}_{10} = \frac{\bar{A}}{\bar{C}} = R(1-n); \quad \bar{Z}_{12} = \frac{\bar{B}}{\bar{C}} = R; \quad \bar{Z}_{20} = -\frac{\bar{D}}{\bar{C}} = nR$$

care cu $\bar{A}\bar{D} - \bar{B}\bar{C} = 1$ dau soluțiile: $\bar{A} = \frac{1}{n}$; $\bar{B} = R(1-n)$; $\bar{C} = \frac{1}{nR} \text{ S}$; $\bar{D} = 1$.

5.46. Ca mai sus. Se obține $\bar{A} = 2,35$; $\bar{B} = 2200 \Omega$; $\bar{C} = 0,00275 \text{ S}$; $\bar{D} = 3$.

5.47. Ca în problema precedentă. $\bar{A} = 2 + j9$; $\bar{B} = 280 + j30 \Omega$; $\bar{C} = 0,1 \text{ S}$; $\bar{D} = 1 - j3$.

5.48. Se știe că la cuadripolul simetric $\bar{A} = \bar{D}$ (1); $\bar{Z}_{10} = \frac{\bar{U}_{10}}{\bar{I}_{10}} = \frac{\bar{U}_{10} | \theta}{\bar{I}_{10} | \theta - \varphi} = \frac{\bar{U}_{10}}{\bar{I}_{10}} | \varphi = \frac{\bar{A}}{\bar{C}}$ (2), unde $\cos \varphi = \frac{P_{10}}{U_{10} \cdot I_{10}}$; $\bar{Z}_{1330} = \frac{\bar{U}_{1k}}{\bar{I}_{1k}} = \frac{\bar{U}_{1k} | \theta'}{\bar{I}_{1k} | \theta' + \varphi'} = \frac{\bar{U}_{1k}}{\bar{I}_{1k}} | -\varphi' = \frac{\bar{B}}{\bar{D}}$ (3), unde $\cos \varphi' = \frac{P_{1k}}{U_{1k} \cdot I_{1k}}$; $\bar{A}\bar{D} - \bar{B}\bar{C} = 1$ (4). Rezolvând sistemul de 4 ecuații, cu 4 necunoscute se obține $\bar{A} = \bar{D} = 0,988 \angle 25^\circ$; $\bar{C} = 0,000198 \angle 21^\circ 45'$ S; $\bar{B} = 148 \angle 69^\circ 35' \Omega$.

5.49. Pentru primul cuadripol avem:

$$\bar{U}'_1 = \frac{\bar{A}_1}{\bar{C}_1} \bar{I}'_1 - \frac{1}{\bar{C}_1} \bar{I}'_2 \text{ întrucât } \bar{U}'_2 = \frac{1}{\bar{C}_1} \bar{I}'_1 - \frac{\bar{D}_1}{\bar{C}_1} \bar{I}'_2$$

pentru cel de al doilea

$$\bar{U}''_1 = \frac{\bar{A}_2}{\bar{C}_2} \bar{I}''_1 - \frac{1}{\bar{C}_2} \bar{I}''_2 \text{ întrucât } \bar{U}''_2 = \frac{1}{\bar{C}_2} \bar{I}''_1 - \frac{\bar{D}_2}{\bar{C}_2} \bar{I}''_2.$$

Adunând valorile obținute și ținând seama că:

$$\bar{U}_1 = \bar{U}'_1 + \bar{U}''_1; \bar{U}_2 = \bar{U}'_2 + \bar{U}''_2; \bar{I}'_1 = \bar{I}''_1; \bar{I}'_2 = \bar{I}''_2;$$

se obține:

$$\bar{U}_1 = \frac{\bar{A}_1 \bar{C}_2 + \bar{A}_2 \bar{C}_1}{\bar{C}_1 + \bar{C}_2} \bar{U}_2 + \frac{(\bar{A}_1 \bar{C}_2 + \bar{A}_2 \bar{C}_1)(\bar{D}_1 \bar{C}_2 - \bar{D}_2 \bar{C}_1) - (\bar{C}_1 + \bar{C}_2)^2}{\bar{C}_1 \bar{C}_2 (\bar{C}_1 + \bar{C}_2)} \bar{I}_2$$

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{C}_1 \bar{C}_2}{\bar{C}_1 + \bar{C}_2} \bar{U}_2 + \frac{\bar{D}_1 \bar{C}_2 + \bar{D}_2 \bar{C}_1}{\bar{C}_1 + \bar{C}_2} \bar{I}_2$$

de unde coeficienții cuadripolului echivalent

$$\bar{A} = \frac{\bar{A}_1 \bar{C}_2 + \bar{A}_2 \bar{C}_1}{\bar{C}_1 + \bar{C}_2}; \bar{B} = \frac{(\bar{A}_1 \bar{C}_2 + \bar{A}_2 \bar{C}_1)(\bar{D}_1 \bar{C}_2 + \bar{D}_2 \bar{C}_1) - (\bar{C}_1 + \bar{C}_2)^2}{\bar{C}_1 \bar{C}_2 (\bar{C}_1 + \bar{C}_2)}$$

$$\bar{C} = \frac{\bar{C}_1 \bar{C}_2}{\bar{C}_1 + \bar{C}_2}; \bar{D} = \frac{\bar{D}_1 \bar{C}_2 + \bar{D}_2 \bar{C}_1}{\bar{C}_1 + \bar{C}_2}.$$

Dacă cei doi cuadripoli sunt identici:

$$\bar{A} = \bar{A}'; \bar{B} = \bar{B}'; \bar{C} = \frac{\bar{C}'}{2}; \bar{D} = \bar{D}'.$$

5.50. Din schema de montaj rezultă egalitățile:

$$\bar{I}'_1 = \bar{I}''_1 = \bar{I}_1; \bar{U}'_2 = \bar{U}''_2 = \bar{U}_2; \bar{I}_2 = \bar{I}'_2 + \bar{I}''_2; \bar{U}_1 = \bar{U}'_1 + \bar{U}''_1.$$

Prin identificarea ecuațiilor care se obțin introducând în egalitățile de mai sus expresiile lui \bar{U}'_1 , \bar{U}''_2 , \bar{I}'_1 și \bar{I}''_1 (prin scrierea ecuațiilor fiecărui cuadripol în parte) se obține:

$$\bar{A} = \frac{(\bar{D}_1 + \bar{D}_2)^2 + (\bar{B}_1\bar{D}_2 + \bar{D}_1\bar{B}_2)(\bar{C}_1\bar{D}_2 + \bar{C}_2\bar{D}_1)}{\bar{D}_1\bar{D}_2(\bar{D}_1 + \bar{D}_2)}; \bar{B} = \frac{\bar{B}_1\bar{D}_2 + \bar{D}_1\bar{B}_2}{\bar{D}_1 + \bar{D}_2}$$

$$\bar{C} = \frac{\bar{C}_1\bar{D}_2 + \bar{C}_2\bar{D}_1}{\bar{D}_1 + \bar{D}_2}; \bar{D} = \frac{\bar{D}_1\bar{D}_2}{\bar{D}_1 + \bar{D}_2}.$$

Pentru cuadripoli identici $\bar{A} = 2\bar{A}'$; $\bar{B} = \bar{B}'$; $\bar{C} = 2\bar{C}'$; $\bar{D} = \frac{\bar{D}'}{2}$.

5.51. Se deduc din ecuațiile cuadripolului valorile lui \bar{U}_2 și \bar{I}_2 . Făcând produsul $\bar{U}_2 \cdot \bar{I}_2$ și luând partea reală a acestui produs se obține

$$P_2 = 17,1 \text{ kW}$$

5.52. Transfigurând triunghiul $\bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \bar{Z}_5$ în stea se obține o schemă echivalentă în T dela care se poate trece imediat la constantele cuadripolului echivalent și apoi la constantele circuitului în π

$$\bar{A} = 1 + \frac{\bar{Z}'}{\bar{Z}''} = 1 + Z_\pi \bar{Y}_\pi$$

$$\bar{B} = 2\bar{Z}' + \frac{\bar{Z}'^2}{\bar{Z}''} = \bar{Z}_\pi$$

$$\bar{Z}_\pi = 5(1 + j3)\Omega \text{ și } Y_\pi = (2 - j)10^{-2} \text{ S.}$$

5.53. Se determină constantele cuadripolului; cunoscând \bar{U}_2 și \bar{I}_2 se determină prin ecuațiile cuadripolului \bar{U}_1 și \bar{I}_1 apoi P_1 . Numeric se găsește $U_1 = 8,9 \text{ kV}$; $I_1 = 101,5 \text{ A}$; $P_1 = 679 \text{ kW}$.

5.54. Din teoria liniilor lungi (vezi orice curs de transport a energiei electrice) se găsesc ecuațiile cuadripolului sub forma:

$$\bar{U}_1 = \bar{U}_2 \text{ ch}\gamma + \bar{I}_2 \bar{Z} \text{ sh}\gamma$$

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{U}_2}{\bar{Z}} \text{ sh}\gamma + \bar{I}_2 \text{ ch}\gamma$$

se obține:

$$I_2 = 158 \text{ A}; U_2 = 101 \text{ kV}; P_2 = 12,44 \text{ MW}; \cos \varphi_2 = 0,78; \eta = 73,2\%.$$

5.55. Problema se rezolvă ca și problema 5.45. Se găsește $I_2 = 5,2 \text{ A}$; $U_2 = 4230 \text{ V}$; $P_2 = 16,2 \text{ kW}$; $\eta = 0,54$; $\cos \varphi = 0,48$.

5.56. a) Constantele cuadripolului se determină din ecuațiile sale generale. La mers în gol $\bar{I}_2 = 0$: $\frac{\bar{E}_{10}}{\bar{E}_{20}} = A = 2$ și $\frac{I_{10}}{\bar{E}_{20}} = C = \frac{1}{2} \text{ S}$. La scurt-

circuit $\bar{E}'_{20} = 0$: $\frac{I_1}{I_2} = D = 2 \therefore B = 1$.

(b) Aplicând relația (19) se obține $\bar{Z}_1 = 2 \Omega$, $\bar{Z}_2 = 2 \Omega$ și $\bar{Y} = C = 0,5 \text{ S}$.

(c) Circuitul în T echivalent se obține transfigurând triunghiul central al sistemului în lanț într-o stea. Se găsește $\bar{Z}_1 = \bar{Z}_2 = 1 \Omega$, $\bar{Y} = 2 \text{ S}$.

Pentru circuitul în π echivalent se transfigurează una din stelele sistemului în lanț într-un triunghi, obținându-se un cuadripol în π în lanț cu un dipol. Se transfigurează apoi acest element, care formează un T în sistem, într-un triunghi obținându-se cuadripolul în π căutat cu elementele $\bar{Y}_1 = \bar{Y}_2 = 4 \text{ S}$ și $\bar{Z} = 24 \Omega$. Se poate obține direct aceasta dacă din parametrii cuadripolului T echivalent obținut se calculează parametrii cuadripolului general.

$$(d) \bar{A} = \bar{D} = 7, \bar{B} = 24 \Omega, \bar{C} = 2 \text{ S}.$$

5.57. Tensiunea $\bar{E}_2' = \bar{Z}_s \bar{I}_2$. Dar, conform teoremei lui Thévenin,

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{V}_{20}}{\bar{Z}_{20} + \bar{Z}_s} = \frac{\bar{E}_1/\bar{A}}{\bar{B}/\bar{A} + \bar{Z}_s} = \frac{\bar{E}_1}{\bar{B} + \bar{A} \bar{Z}_s}.$$

Calculând raportul \bar{E}_1/\bar{E}_2' se găsește tocmai relația de condiție dată de enunț.

5.58. Ținând seama de transformatoare, schemele (a) și (c) respectiv (b) și (d) sunt echivalente. Pentru primele scheme se poate scrie $\bar{A} \bar{I}_1 = \bar{I}' + \bar{I}_2$
 $\bar{I}' = \frac{\bar{E}_1}{\bar{A}} \cdot \bar{A} \bar{C} = \bar{E}_1 \bar{C}$, $\frac{\bar{E}_1}{\bar{A}} = \bar{E}_2' + \bar{I}_2 \frac{\bar{B}}{\bar{A}} \therefore \bar{E}_1 = \bar{A} \bar{E}_2' + \bar{B} \bar{I}_2$ și $\bar{I}_1 \bar{I} = \bar{C} \bar{E}_2' + \bar{D} \bar{I}$

circuitele se reduc astfel la cuadripoli cu constantele \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} , \bar{D} .

Pentru schemele (b) și (d) se scrie $\bar{I}_1 = \bar{I}' + \bar{D} \bar{I}_2$, $\bar{I}' = \frac{\bar{E}_2'}{\bar{D}} \cdot \bar{D} \cdot \bar{C} = \bar{E}_2' \bar{C}$, $\bar{E}_1 = \frac{\bar{B}}{\bar{D}} \bar{I}_1 + \frac{\bar{E}_2'}{\bar{D}} \therefore \bar{I}_1 = \bar{C} \bar{E}_2' + \bar{D} \bar{I}_2$ și $\bar{E}_1 = \bar{A} \bar{E}_2' + \bar{B} \bar{I}_2$, adică același cuadripol ca mai sus.

5.59. Linia fiind perfect simetrică și izolată poate fi tratată ca un dipol. Pentru determinarea puterilor se construiește diagrama cu 2 poli de tensiune. luându-se s. ex. $1 \text{ MVA} = 5 \text{ mm}$. Caracteristicile liniei sunt $R = 15,6 \Omega$; $X = 24 \Omega$; $\bar{Z} = 28,6 \angle 57^\circ \Omega$. Din diagramă se găsește $P_3 = 6,3 \text{ MW}$, $Q_2 = 6,3 \text{ MVAR}$; $P_1 = 7,2 \text{ MW}$; $Q_1 = 7,8 \text{ MVAR}$; $\eta = 87,5\%$. Pierderile în linie $p = P_1 - P_2 = 0,9 \text{ MW}$ sau $14,25\%$; $q = 1,5 \text{ MVAR}$ sau $23,80\%$ (pierderile sunt raportate la puterile sosite). $\varphi = 47^\circ \therefore \cos \varphi_1 = 0,68$ Pentru studiarea randamentului în funcție de factorul de putere se duc pe diagramă ON_2 la diverse decalaje, deducând unghiurile θ și deci vectorii ON_1 .

Notă. Diagrama se construiește pentru o singură fază, puterile calculându-se însă pentru tot sistemul.

5.60. Se utilizează metoda circuitelor independente. $I_1 = I_2 = 2 \text{ A}$; $P_3 = 4,19 \text{ kW}$; $P_1 = -1,02 \text{ kW}$. Mașina 1 lucrează în regim de motor, absorbind energie de la generatorul al doilea. Puterea totală, cerută de motor, este egală cu $1,46 \text{ kW}$, din care $0,44 \text{ kW}$ se consumă pentru încălzirea înfășurării și $1,02 \text{ kW}$ pentru învârtirea motorului.

5.61. Problema se rezolvă fără dificultate prin următoarele două metode

(a) Reducerea rețelei la o impedanță unică; (b) Circuite independente.

5.62. Problema se poate rezolva prin trei metode: (a) circuite echivalente; (b) perechi de noduri; (c) cuadripol echivalent. La ultima chestiune, mașina 1 funcționează tot ca generator.

5.63. (a) Se aplică teorema lui Thévenin. Pentru determinarea impedanței rețelei se transfigurează un triunghi în stea. Se găsește:

$$V_{22'0} = \frac{\bar{E}_1}{R} (R + 2jX), \quad \bar{I}_2 = \frac{\bar{E}_1 (R + 2jX)}{R\bar{Z}_s - 2jX(R + jX)}$$

$$\text{și } \bar{Y}_{12} = \frac{R + 2jX}{R\bar{Z}_s - 2jX(R + jX)}$$

(b) Pentru $R = 0$ rezultă $\bar{I}_2 = \frac{j\bar{E}_1}{X}$.

(c) Rezultă imediat din (a).

(d) $\bar{Y}_{11} = -\frac{2jX}{R} (R + jX)$

(e) $Z_s = 0 \therefore \bar{Y}_{12}' = -\frac{R + j2X}{j2X(R + jX)}$

5.64. $R_{cond} = \frac{10}{57 \cdot 50000} = 3,5 \cdot 10^{-6} \Omega;$

$R_{fază_{total}} = R_{fază} + R_{cond} = 253,5 \cdot 10^{-6} \Omega.$

Inductanța proprie și mutuală se pot deduce în modul următor:
F.e.m. indusă în faza de mijloc

$$e_B = -L \frac{di_B}{dt} - M \left(\frac{di_A}{dt} + \frac{di_C}{dt} \right) = -(L-M) \frac{di}{dt} \quad (A)$$

unde L este inductanța proprie, iar M inductanța mutuală dintre faza de mijloc și fiecare din cele 2 faze extreme. Aceiași f.e.m. $e = -\frac{d\Phi_s}{dt}$ cu $k = \frac{r_0}{2\pi} l$

$$\therefore \Phi_B = \int_r^\infty k i_B \frac{dx}{x} + \int_a^\infty k (i_A + i_C) \frac{dx}{x} \quad \Phi_B = k i_B \ln \frac{a}{r}$$

Aici a = distanța dintre axele fazelor vecine; r = raza conductorilor.

$$e_B = -k \ln \frac{a}{r} \frac{di_s}{dt} \quad (B)$$

Compararea relațiilor (A) și (B) dă $L-M = k \ln \frac{a}{r}$.

Ținând seama și de inductanța internă și făcând substituția $k = 2 \cdot 10^{-9} l$ cm se obține

$$L - M = \left(0,5 + 2 \ln \frac{a}{r} \right) 10^{-4} l. \quad (C)$$

F.e.m. indusă într-una din fazele extreme (d. ex. A)

$$e_A = -L \frac{di_A}{dt} + M \frac{di_B}{dt} - (M-S) \frac{di_C}{dt} = (L-M) \frac{di_B}{dt} + (L-M+S) \frac{di_C}{dt} \quad (D)$$

$(M-S)$ fiind inductanța mutuală dintre fazele extreme.

Pe de altă parte

$$e_A = - \frac{d\Phi_A}{dt}$$

$$\Phi_A = \int_r^\infty k i_A \frac{dx}{x} + \int_0^\infty k i_B \frac{dx}{r} + \int_{2a}^\infty k i_O \frac{dx}{x} = - (L-M) i_B - k i_O \ln \frac{2a}{r}$$

$$e_A = (L-M) \frac{di_B}{dt} + k \ln \frac{2a}{r} \frac{di_O}{dt} \quad (E)$$

Compararea relațiilor (D) și (E) dă

$$L - M + S = k \ln \frac{2a}{r}$$

de unde

$$S = k \left(\ln \frac{2a}{r} - \ln \frac{a}{r} \right) l = k \ln 2l = 1,385 \cdot 10^{-4} \text{ l km.}$$

Obținem astfel :

$$X = \omega (L-M) = 314 \left(0,5 + \ln \frac{3000}{150} \right) \cdot 10^{-4} \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 2,04 \cdot 10^{-3} \Omega$$

$$X_s = \omega S = 314 \cdot 1,385 \cdot 10^{-4} \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 0,435 \cdot 10^{-3} \Omega$$

$$\bar{Z} = R + j X = (0,253 + j 2,04) \cdot 10^{-3} \Omega$$

$$\bar{Z}_s = j X_s = j 0,435 \cdot 10^{-3} \Omega.$$

Ecuațiile fundamentale :

$$\bar{U}_A = \bar{U}_0 + \bar{I}_A (R + j \omega L) + \bar{I}_B j M \omega + \bar{I} j (M-S) \omega$$

$$\bar{U}_B = \bar{U}_0 + \bar{I}_B (R + j L \omega) + (\bar{I}_A + \bar{I}_O) j M \omega$$

$$\bar{U}_c = \bar{U}_0 + \bar{I}_c (R + j L \omega) + \bar{I}_B j M \omega + \bar{I}_A j (M-S) \omega$$

$$\bar{I}_A + \bar{I}_B + \bar{I}_O = 0$$

Efectuând calculele se obține

$$\bar{I}_A = 124,5 \angle 43^\circ \text{ kA}; \bar{I}_B = 151 \angle -82^\circ 20' \text{ kA}; \bar{I}_O = 128 \angle 150^\circ \text{ kA.}$$

Dacă se ia ca origină de fază tensiunea U_B , sistemul tensiunilor va fi :

$$\bar{U}_A = 289 \angle 120^\circ; \bar{U}_B = 289 \angle 0; \bar{U}_O = 289 \angle 24^\circ$$

și deci

$$P_A = 8100 \text{ kW}; P_B = 5800 \text{ kW}, P_O = 0.$$

PARTEA II

6. 6.1. $y = 120 \sin (\omega t + 110^\circ)$

6.2. $y = 100 \sin (\omega t + 150^\circ)$

6.3. $150 \sin (\omega t - \frac{5\pi}{6})$.

6.4. $220 \sin(\omega t + 70^\circ)$.

6.5. $380 \sin(\omega t - \frac{5\pi}{6})$

6.6. -13° .

6.7. $y_1 = 5 \sin(\omega t + 75^\circ)$ și $\varphi = 195^\circ = -165^\circ$

6.8. $i = 5 \sin(\omega t + 90^\circ)$ și $\varphi = -210^\circ = 150^\circ$.

6.9. $\varphi = 270^\circ = -90^\circ$.

6.10. $\varphi = -270^\circ = +90^\circ$.

6.11. 11° .

6.12. $y_5 = 2 \sin(5\omega t + 70^\circ)$ și deci $\varphi_5 = -14^\circ$.

6.13. $y_4 = 3 \sin(4\omega t - 120^\circ)$. $\therefore \varphi_4 = 30^\circ$.

6.14. $y_{17} = 1,2 \sin(17\omega t + 93^\circ 30')$. $\therefore \varphi_{17} = -5^\circ 30'$.

6.15. A transforma armonicile înseamnă a determina unghiul φ_n de decalaj, astfel ca el să fie mai mic decât $\frac{\pi}{n}$. Se găsește: $y_3 = 12 \sin 3(\omega t + 50^\circ)$.

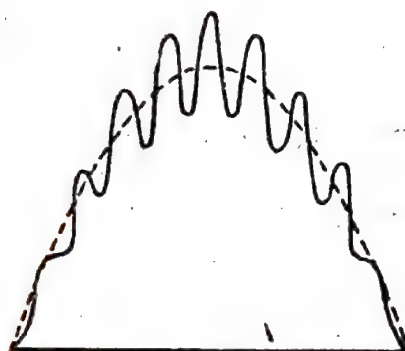


Fig. 6.25.

6.16. $y_7 = 100 \sin(7\omega t - 148^\circ)$.

6.17. $y_{11} = 5 \sin(11\omega t + 85^\circ)$.

6.18. $y_5 = 2 \sin 5(\omega t - 24^\circ)$.

6.19. -41° .

6.20. -18° .

6.21. 40° .

6.22. $A_3 \cong 7,98$ $\varphi_3 \cong 20^\circ 36'$.

6.23. $A_1 = 133$ $\varphi_1 = 39^\circ 45'$.

6.24. $A_5 = 3,94$ $\varphi_5 = 36^\circ 50'$.

6.25. Se compun analitic armonicile $3 \sin 17\omega t + 3 \sin(19\omega t + 180^\circ) = 3(\sin 17\omega t - \sin 19\omega t) = -3 \times 2 \cos 18\omega t \times \sin \omega t = 6 \sin \omega t \sin(18\omega t - 90^\circ)$ care trebuie privită ca o armonică de ordinul 18 având amplitudinea $6 \sin \omega t$. Curba rezultantă se construiește grafic (fig. 6.25).

6.26. Se procedează ca mai sus și se găsește compunând armonicile: $4 \cos \omega t \sin 18\omega t$, curba rezultantă construindu-se grafic.

6.27. Se procedează ca în cazurile precedente. Curba rezultantă a armonicilor este $4 \cos(\omega t + 5^\circ) \times \sin(12\omega t + 11^\circ)$. Se consideră amplitudinea variabilă a armoniciei de ordinul 12. Curba rezultantă se construiește grafic.

6.28. $2 \cos 2\omega t E_n \times \sin(n+2)\omega t$.

6.29. Curba rezultantă se construiește grafic prin puncte (fig. 6.29) și este o curbă pară.

6.30. Curba se construiește grafic și este o curbă deasemenea pară.

6.31. Idem, curbă impară.

6.32. Idem, curbă pară.

6.33. Se construiește mai întâi suma armonicilor, apoi se adaugă termenul constant deplasându-se axa absciselor înspre amplitudinile negative cu valoarea termenului constant.

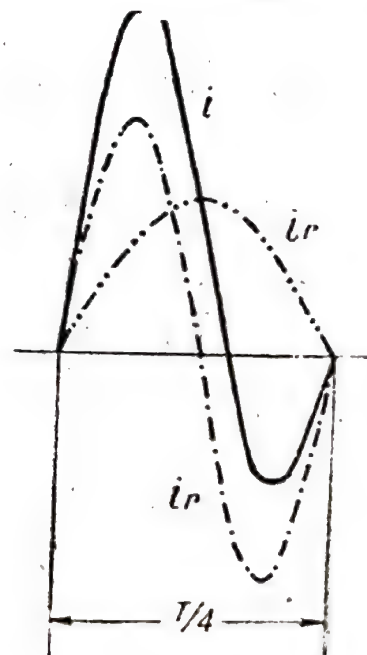


Fig. 6.29.

6.34. Se construiește prin puncte, găsindu-se pentru jumătate perioadă curbele din fig. 6.34.

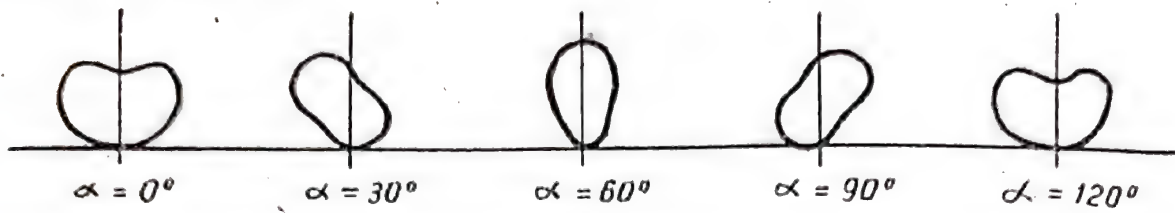


Fig. 6.34.

6.35. Idem, curbele din fig. 6.35.

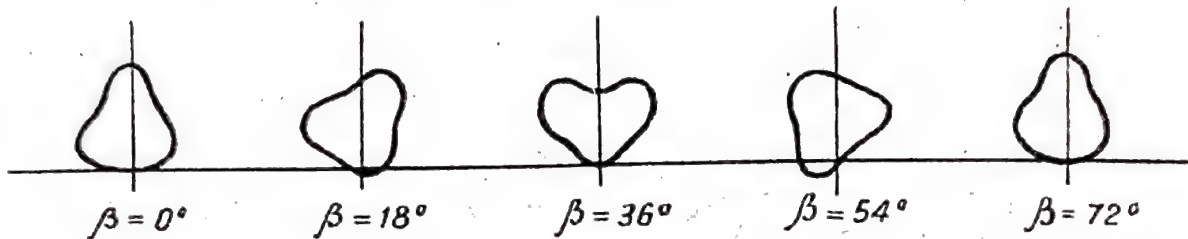


Fig. 6.35.

6.36. Aceeași construcție ca mai sus. Se obține un semicerc (fig. 6.36).

6.37. Se obține un ovoid (fig. 6.37).

6.38. Se obține curba reprezentată în fig. 6.38.

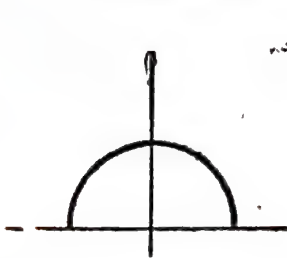


Fig. 6.36.

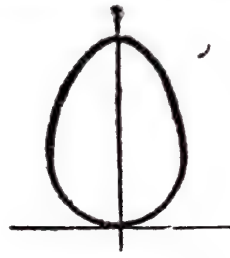


Fig. 6.37.

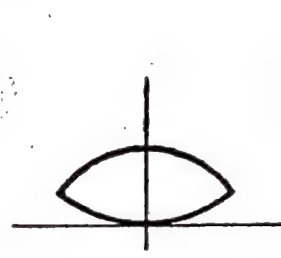


Fig. 6.38.

6.39. Pentru diversele valori ale lui φ ($0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ etc.) se construiesc grafic curbele rezultante corespunzătoare.

6.40. Se procedează ca mai sus.

7. 7.1. Problema poate fi rezolvată prin orice metodă analitică sau grafică. Metoda cea mai indicată este aceea a discontinuităților. Prin metoda integrării se obține $A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{25x}{\pi} + 100 \right) \times \sin nx dx = \frac{50}{\pi n}$, $B_n = 0$ și $C_0 = 75$. Prin metoda discontinuităților se găsește deasemenea $A_n = \frac{1}{n} \sum S_i^{(0)} \cos nx_i - \frac{1}{n^2} \sum S_i^{(1)} \sin nx_i = \frac{50}{n}$, căci avem numai salturi de ordonată în punctele $n_{st} = 0$ și $n_{dr} = 2\pi$. Se găsește ușor $B_n = 0$ și $C_0 = 75$.

7.2. Funcția prezintă simetria $f(x) = f(2\pi - x)$ și nu are decât armonice în cosinus. Prin integrare $B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Y}{\pi^2} x (2\pi - x) \times \cos n\pi x dx = -\frac{4Y}{\pi^2 n^2}$.

$C_0 = \frac{2Y}{3}$. Prin metoda discontinuităților se observă că funcția nu prezintă discontinuități decât la extremitățile perioadei ($x = 0$ și $x = 2\pi$) și numai discontinuități în derivatele de ordinul 1 și 2, căci derivatele de ordinul 3 sunt nule și salturi de ordonată nu există. Expresia coeficientului se reduce la $\pi B_n = -\frac{1}{n^2} \times \sum S_i^{(1)} \cos nx_i + \frac{1}{n^2} S_i^{(2)} \sin nx_i$, care calculat dă aceeași valoare ca mai sus.

7.3. Se calculează ușor cu ajutorul formulelor generale prin integrare obținându-se

$$A_n = \frac{2Y}{\pi^2} \left(-\frac{\pi}{2n} \cos n \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n^2} \sin n \frac{\pi}{2} \right),$$

$$B_n = \frac{2Y}{\pi^2} \left(\frac{\pi}{2n} \sin n \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n^2} \cos n \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad C_0 = \frac{Y}{8}.$$

$$7.4. \quad y = \frac{Y}{4} + \frac{4Y}{\pi^2} \left(\frac{\sin x}{1^2} - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \frac{\sin 7x}{7^2} + \dots \right) - \frac{8Y}{\pi^2} \left(\frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 6x}{6^2} + \frac{\cos 10x}{10^2} + \dots \right).$$

La calculul prin metoda discontinuităților, se observă că funcția nu are decât salturi de tangentă.

7.5. Funcția este bisimetrică și calculul se face numai asupra unui sfert de perioadă. Funcția nu are decât armonice impare în sinus. Se găsește $A_n = \frac{4Y}{n\pi}$ (n impar). Pentru metoda discontinuităților se observă că funcția nu are decât salturi de ordonată.

7.6. Funcție bisimetrică. $A_n = \frac{8Y}{\pi^2 n^2} \sin n \frac{\pi}{2}$ (n impar). Pentru metoda discontinuităților se observă că funcția, considerată pe un sfert perioadă, prezintă salturi de ordonată și de tangentă. Considerată pe întreaga perioadă, prezintă numai salturi de tangentă în punctele $\pi/2$ și $3\pi/2$.

7.7. Funcție bisimetrică $A_n = \frac{4Y}{n^2 \pi \alpha} \sin n\alpha$ (n impar).

7.8. Funcție bisimetrică. Se obține $A_n = \frac{32Y}{\pi^3 n^3}$ (n impar). Prin metoda discontinuităților, se va observa că, lucrându-se asupra unui sfert de perioadă, va avea salt de ordonată numai pentru $x = \pi/2$, care însă dă o contribuție nulă. Deasemenea, curba fiind de gradul doi are numai salturi de ordinul 1 (tangentă) și ordinul 2 (curbură).

7.9. Prin metoda integrării se găsește $A_n = \frac{Y}{2\pi} \left[\frac{\sin (1-n)\pi}{1-n} - \frac{\sin (1+n)\pi}{1+n} \right]$. Se observă că pentru $n = 1$, $A_n = \frac{Y}{2}$; pentru $n \neq 1$, $A_n = 0$.

Pentru B_n se găsește deasemenea

$$B_n = \frac{Y}{2\pi} \left[\frac{1 - \cos(1+n)\pi}{1+n} + \frac{1 - \cos(1-n)\pi}{1-n} \right],$$

de unde rezultă că funcția nu conține decât armonice *pare* în cosinus, și se poate scrie $B_n = \frac{2Y}{\pi} \cdot \frac{1}{(1-n^2)} = \frac{2Y}{\pi} \cdot \frac{1}{(1-n)(1+n)}$ în care n este par. Ter-

menul constant este $C = \frac{Y}{\pi}$. Desvoltarea în serie se poate scrie

$$y = Y \left[\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin x - \frac{2}{\pi \cdot 1 \cdot 3} \cos 2x - \frac{2}{\pi \cdot 3 \cdot 5} \cos 4x - \dots \right].$$

7.10. Funcția prezintă simetria $f(x) = f(2\pi - x)$, desvoltarea ei va conține, în afară de termenul constant, numai armonice *pare* în cosinus. Se găsește

$$C_0 = \frac{2Y}{\pi} \text{ și } B_n = \frac{4Y}{\pi} \cdot \frac{1}{1-n^2}.$$

7.11. Problema se reduce la a arăta că armonicele *pare* se anulează. O curbă electrotehnică are simetria $f(x) = -f(\pi + x)$. Impărțindu-se perioada în 12 părți (s. ex.) se obține $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6, Y_7 = -Y_1, Y_8 = -Y_2, Y_9 = -Y_3, Y_{10} = -Y_4, Y_{11} = -Y_5, Y_{12} = -Y_6$. Pentru orice armonică pară, construcția grafică, dă rezultanta zero.

7.12. a) Curba este bisimetrică și impară: nu are decât armonice *impare* în sinus. Se găsește $y = U + \frac{4U}{T} t$ de unde, prin integrare,

$$A_n = \frac{4U}{n\pi} \left(1 + \frac{2}{n\pi} \sin n \frac{\pi}{2} \right), n \text{ impar.}$$

b) Valoarea eficace se calculează grafic (fig. 7.12). Se găsește $U_{ef} = 0,745 U_1 = 1,49 U$.

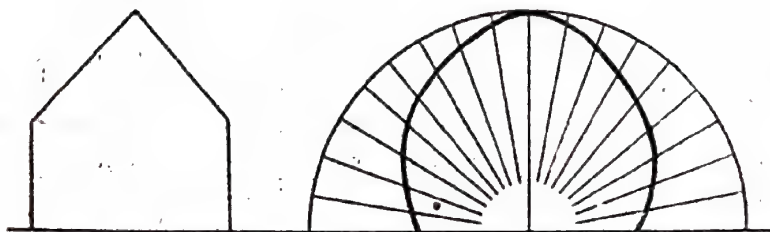


Fig. 7.12.

c) Rezidiul deformant se calculează din $U_d = \sqrt{U_{ef}^2 - \frac{1}{2} U_1^2}$. Cum

$$U_1 = \frac{4U}{\pi} \left(1 + \frac{2}{\pi} \right) = 2,08 U, \text{ rezultă } U_d = 0,24 U. d) \delta = \frac{U_d}{U_{ef}} = \frac{0,24}{1,49} \times 100 = 16,11\%. \text{ (Vezi și problema 8.41).}$$

7.13. a) Curba este electrotehnică deci va conține numai armonice *impare* în sinus și cosinus. Se găsește prin integrare.

$$A_{2n+1} = \frac{2U}{(2n+1)\pi} \text{ și } B_{2n+1} = -\frac{4U}{(2n+1)^2 \pi^2}.$$

b) Valoarea eficace se calculează grafic (fig. 7.13) sau analitic găsindu-se $U_{ef} = 0,58 U$.

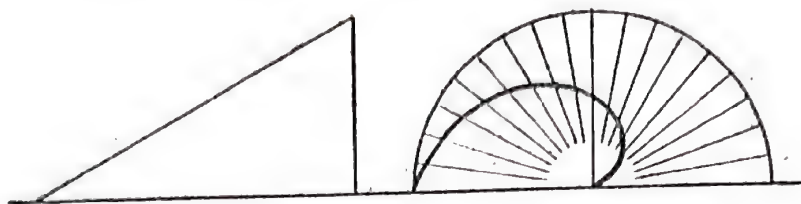


Fig. 7.13.

c) Pentru calculul reziduiului deformant trebuie calculat termenul C_1 .

Se găsește $C_1 = \sqrt{A_1^2 + B_2^2} = \frac{2U}{\pi} \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}} = 0,76 U$ și deci $U_d = 0,21 U$.

d) $\delta = 36,33 \%$.

7.14: Curba dată fiind o funcție electrotehnică nu are decât armonice impare în sinus și cosinus. Se vor calcula numai tablele M și E . Semiperioada se împarte în 18 părți egale. Se realizează tabela I pentru calculul lui M_k și E_k . Cu aceste date se întocmesc tablele de calcul E și M , din care, cu ajutorul cartoanelor ajurate se calculează sumele P_n, Q_n, R_n, T_n .

Tabela I

Calculul coeficienților M_k, E_k

Y_k		$Y_1 = 32,0$	$Y_2 = 26,5$	$Y_3 = 24,0$
Y_{p-k}	$Y_{18} = -36,8$	$Y_{17} = -25,0$	$Y_{16} = -25,5$	$Y_{15} = -28,0$
$M_k = Y_k - Y_{p-k}$	$M_0 = 36,8$	$M_1 = 57,0$	$M_2 = 52,0$	$M_3 = 52,0$
$E_k = Y_k + Y_{p-k}$		$E_1 = 7,0$	$E_2 = 1,0$	$E_3 = -4,0$

(urmare) Tabela I

$Y_4 = 21,5$	$Y_5 = 21,2$	$Y_6 = 18,3$	$Y_7 = 18,5$	$Y_8 = 24,0$	$Y_9 = 9,5$
$Y_{14} = -10,6$	$Y_{13} = -9,7$	$Y_{12} = -7,2$	$Y_{11} = 19,0$	$Y_{10} = 10,0$	
$M_4 = 32,1$	$M_5 = 30,9$	$M_6 = 25,5$	$M_7 = -0,5$	$M_8 = 14,0$	$M_9 = 9,5$
$E_4 = 10,9$	$E_5 = 11,5$	$E_6 = 11,1$	$E_7 = 37,5$	$E_8 = 34,0$	$E_9 = 9,5$

E

CALCULUL ARMONICELOR IMPARE IN SIN TABLOUL PRODUSELOR DINTRE DIFERENTELE DIFERENTELOR

$$E_k = d_k + d_{p-k} \text{ SI } \sin(k\pi/p) - (k = 1, 2, \dots, p/2).$$

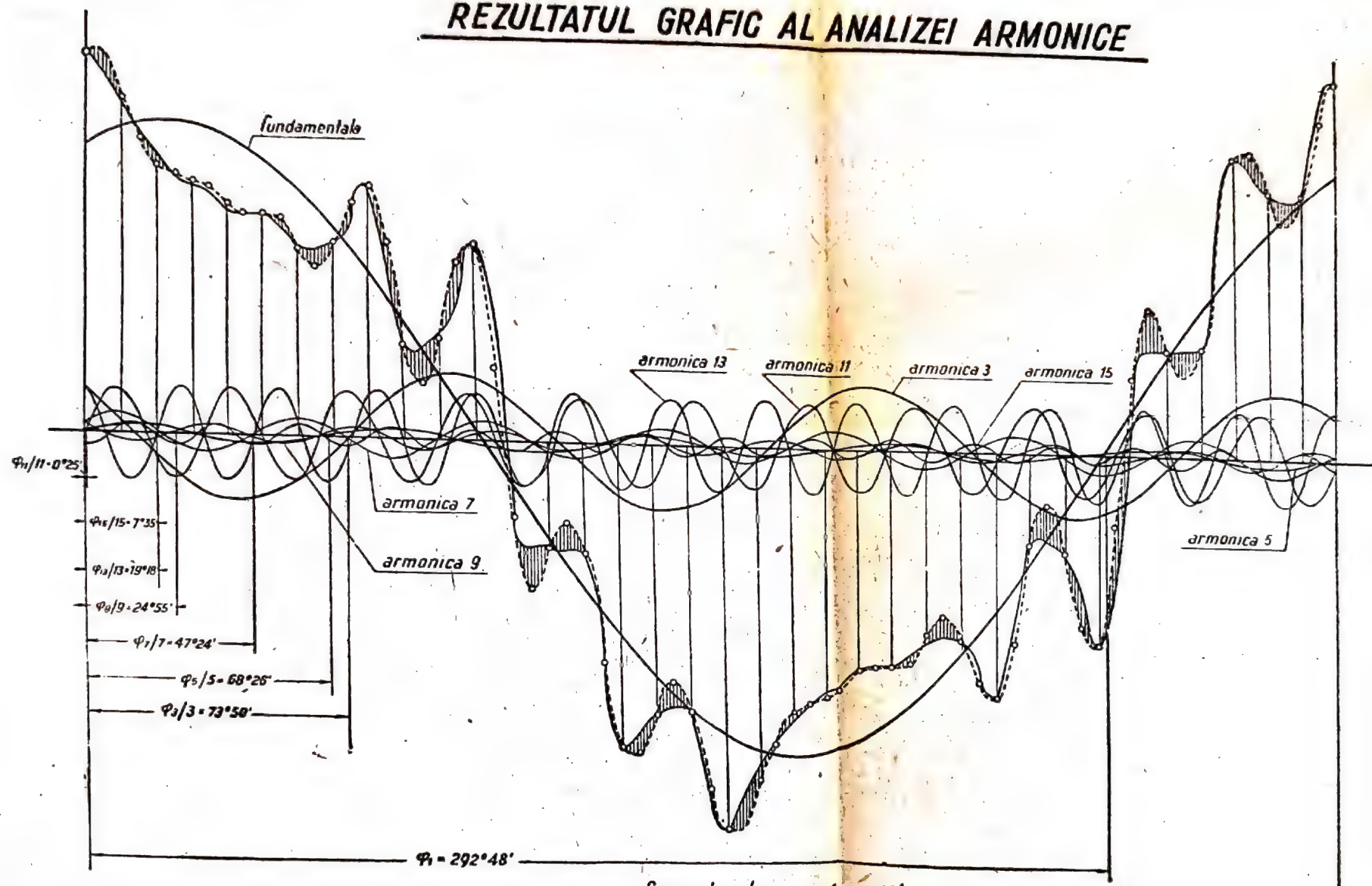
	$\sin 90^\circ$ 1,00000	$\sin 80^\circ$ 0,98481	$\sin 70^\circ$ 0,93969	$\sin 60^\circ$ 0,86603	$\sin 50^\circ$ 0,76604	$\sin 40^\circ$ 0,6427	$\sin 30^\circ$ 0,50000	$\sin 20^\circ$ 0,34203	$\sin 10^\circ$ 0,17365	$\sin 0^\circ$ 0,00000	
E_1	7,0		6, 57783		5, 36228		3, 50000		1, 21555		
E_2	1,0	0, 98481		0, 86603		0, 64279		0, 34202		0	
E_3	-4,0						-2, 00000				
E_4	10,9	10, 73443		9, 43973		7, 00641		3, 72802		0	
E_5	11,5		10, 80643		8, 80946		5, 75000		1, 99697		
E_6	11,1			9, 61293						0	
E_7	37,5		35, 23837		28, 72650		18, 75000		6, 51187		
E_8	34,0	33, 48354		29, 44502		21, 85426		11, 62868		0	
E_9	0,5										

M

CALCULUL ARMONICELOR IMPARE IN COS TABLOUL PRODUSELOR DINTRE DIFERENTELE SUMELOR $M_k = S_k - S_{0-k}$ SI $\cos(K\pi/p) - (K=1, 2, \dots, p/2)$

	$\cos 0^\circ$ 1,00000	$\cos 10^\circ$ 0,98481	$\cos 20^\circ$ 0,93969	$\cos 30^\circ$ 0,86603	$\cos 40^\circ$ 0,76604	$\cos 50^\circ$ 0,64279	$\cos 60^\circ$ 0,50000	$\cos 70^\circ$ 0,34202	$\cos 80^\circ$ 0,17365	$\cos 90^\circ$ 0,00000	
M_0	36,8										
M_1	57,0	56, 13417		49, 36371		36, 63903		19, 49514		0	
M_2	52,0		48, 86388		39, 83408		26, 00000		9, 02980		
M_3	52,0			45, 03356						0	
M_4	32,1		30, 16405		24, 58988		16, 50000		5, 57416		
M_5	30,9	30, 43063		26, 76033		19, 86221		10, 56842		0	
M_6	25,5						12 75000				
M_7	-0,5	-0, 49240		-0, 43301		-0, 32140		-0, 17101		0	
M_8	14,0		13, 15566		10, 72456		7, 00000		2, 43110		
M_9											

REZULTATUL GRAFIC AL ANALIZEI ARMONICE



Scara absciselor : 1mm = 1A
 Scara ordonatelor : de trei ori scara diagramei date

Tabela II

Sumele P_n , Q_n , R_n , T_n calculate cu cartoanele ajurate și tabelele M și E

P_n	$P_1=120,85893$	$P_3=23,03639$	$P_5=-19,45535$	$P_7=5,21361$	$P_9=0,00000$
Q_n	$Q_1=125,43486$	$Q_3=14,25000$	$Q_5=21,08071$	$Q_7=2,13442$	$Q_9=5,40000$
R_n	$R_1=52,76338$	$R_3=-23,00000$	$R_5=-4,45602$	$R_7=25,80736$	$R_9=-5,50000$
T_n	$T_1=50,44490$	$T_3=-19,13926$	$T_5=9,49872$	$T_7=-12,10739$	$T_9=0,00000$

Tabela III

Verificarea sumelor P_n , Q_n , R_n , T_n

$P_1 \cos 10^\circ + P_3 \cos 30^\circ + P_5 \cos 50^\circ + P_7 \cos 70^\circ$		$\frac{9}{4} M_1 = \frac{9}{4} \times 57$
$120,85893 \times 0,98481 + 23,03639 \times 0,86603 + (-19,45535) \times 0,64279 + 5,21361 \times 0,34202 =$	128,25696	$= 128,25000$
$Q_1 + Q_3 + Q_5 + Q_7 + \frac{1}{2} Q_9$		$\frac{9}{2} M_0 = \frac{9}{2} \times 36,8$
$125,43486 + 14,25000 + 21,08071 + 2,13442 + \frac{1}{2} \times 5,40000 =$	165,59999	$= 165,60000$
$R_1 - R_3 + R_5 - R_7 + \frac{1}{2} R_9$		$\frac{9}{2} E_9 = \frac{9}{2} \times 9,5$
$52,76338 + 23,00000 - 4,45602 - 25,80736 + \frac{1}{2} \times (-5,50000) =$	42,750000	42,75000
$T_5 \sin 80^\circ + T_3 \sin 60^\circ + T_7 \sin 40^\circ + T_9 \sin 20^\circ$		$\frac{9}{4} E_2 = \frac{9}{4} =$
$9,49872 \times 0,98481 + (-19,13926) \times 0,86603 + (-12,10739) \times 0,64279 + 50,44490 \times 0,34202 =$	2,24985	2,25000

Rezultate finale

n	1	3	5	7	9	11	13	15	17
A	11,46759	- 4,68214	0,56030	1,52222	- 0,61111	4,21275	- 1,55053	- 0,42897	0,25761
B	27,36598	4,14293	0,18059	0,81645	0,60000	- 0,34213	4,50401	- 0,97627	0,50844
A^2	131,50562	21,92243	0,31394	2,31715	0,43456	17,74726	2,40414	0,18402	0,06636
B^2	748,8 686	17,16387	0,03261	0,66659	0,36000	0,11705	20,27610	0,95310	0,25851
$A^2 + B^2$	880,40248	39,08630	0,34655	2,98374	0,79456	17,86431	22,68024	1,13712	0,32487
$C = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$	29,6715	6,2519	0,5886	1,7270	0,8913	4,2266	4,7623	1,0663	0,5700
$\operatorname{tg} \varphi_n = -B/A$	- 2,386	+ 0,885	- 0,322	- 0,536	+ 0,982	+ 0,081	+ 0,291	- 2,275	- 1,974
$\sin \varphi_n$	-	-	-	-	-	+	-	+	-
$\cos \varphi_n$	+	-	+	+	-	+	-	-	+
Cadran	IV	III	IV	IV	III	I	III	II	IV
φ'_n	67°12'	41°30'	17°52'	28°12'	44°28'	4°36'	71°00'	66°17'	63°08'
φ_n	292°48'	221°30'	342°08'	331°48'	224°28'	4°36'	251°00'	113°43'	296°52'
φ_n/n	292°48'	73°50'	68°26'	47°24'	24°55'	0°25'	19°18'	7°35'	17°28'

Rezultatul analizei armonice poate fi pus sub una din formele de mai jos :

$$i = 27,36598 \cos x + 4,14293 \cos 3x + 0,18059 \cos 5x + 0,80645 \cos 7x + \\ + 0,60000 \cos 9x - 0,34213 \cos 11x + 4,50401 \cos 13x - 0,97627 \cos 15x + \\ + 0,50844 \cos 17x + 11,46759 \sin x - 4,68214 \sin 3x + 0,56030 \sin 5x + \\ + 1,52222 \sin 7x - 0,61111 \sin 9x + 4,21275 \sin 11x - 1,55053 \sin 13x - \\ - 0,42897 \sin 15x + 0,25761 \sin 17x;$$

sau :

$$i = 29,6715 \sin (x - 292^{\circ}48') + 6,2519 \sin (3x - 221^{\circ}30') + \\ + 0,5886 \sin (5x - 342^{\circ}08') + 1,7270 \sin (7x - 331^{\circ}48') + \\ + 0,8913 \sin (9x - 224^{\circ}28') + 4,2266 \sin (11x - 4^{\circ}36') + \\ + 4,7623 \sin (13x - 251^{\circ}) + 1,0663 \sin (15x - 113^{\circ}43') + \\ + 0,5700 \sin (17x - 296^{\circ}52');$$

sau, cum funcția este o funcție periodică de timp :

$$i = 29,6715 \sin (\omega t - 292^{\circ}48') + 6,2519 \sin 3 (\omega t - 73^{\circ}50') + \\ + 0,5886 \sin 5 (\omega t - 68^{\circ}26') + 1,7270 \sin 7 (\omega t - 48^{\circ}24') + \\ + 0,8913 \sin 9 (\omega t - 24^{\circ}55') + 4,2266 \sin 11 (\omega t - 0^{\circ}25') + \\ + 4,7623 \sin 13 (\omega t - 19^{\circ}18') + 1,0663 \sin 15 (\omega t - 7^{\circ}35') + \\ + 0,5700 \sin 17 (\omega t - 17^{\circ}28').$$

În planșa IV s'a dat rezultatul grafic al analizei armonice, trasându-se curba dată, armonicile componente ale acestei curbe și curba rezultantă din suma-re a acestor armonice. (Nu s'a trasat pe diagramă armonică 17 având amplitudinea prea mică). În planșa V s'a dat calculul grafic al valorii eficace, din care rezultă

$$I_{ef} = 21,3 \text{ A. Calculul analitic al valorii eficace este } I_{ef}^2 = \sum I_{kef}^2 = \frac{1}{2} \sum C_k^2.$$

Se găsește $I_{ef} = 21,97 \text{ A}$. Aplicând metoda grafică a lui Crug se obțin rezultate ce diferă foarte puțin de calculul analitic (fig. 7.14, a - 7.14, i).

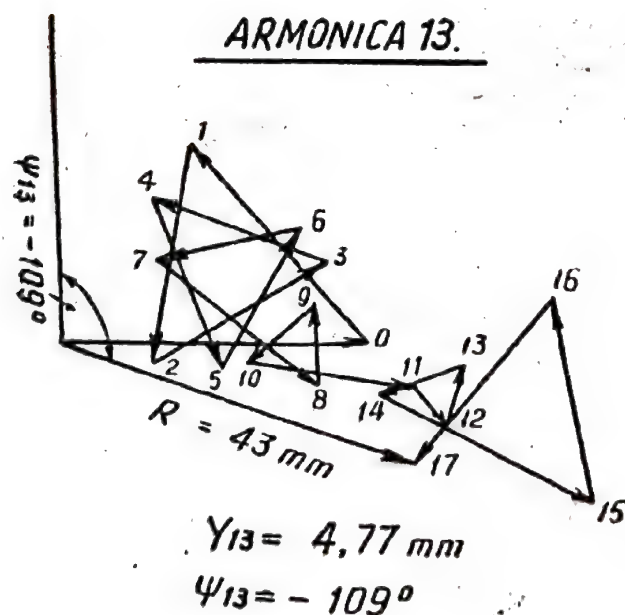


Fig. 7.14 b

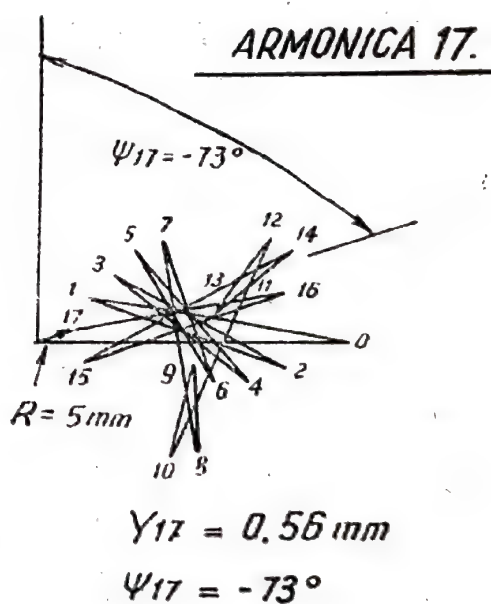
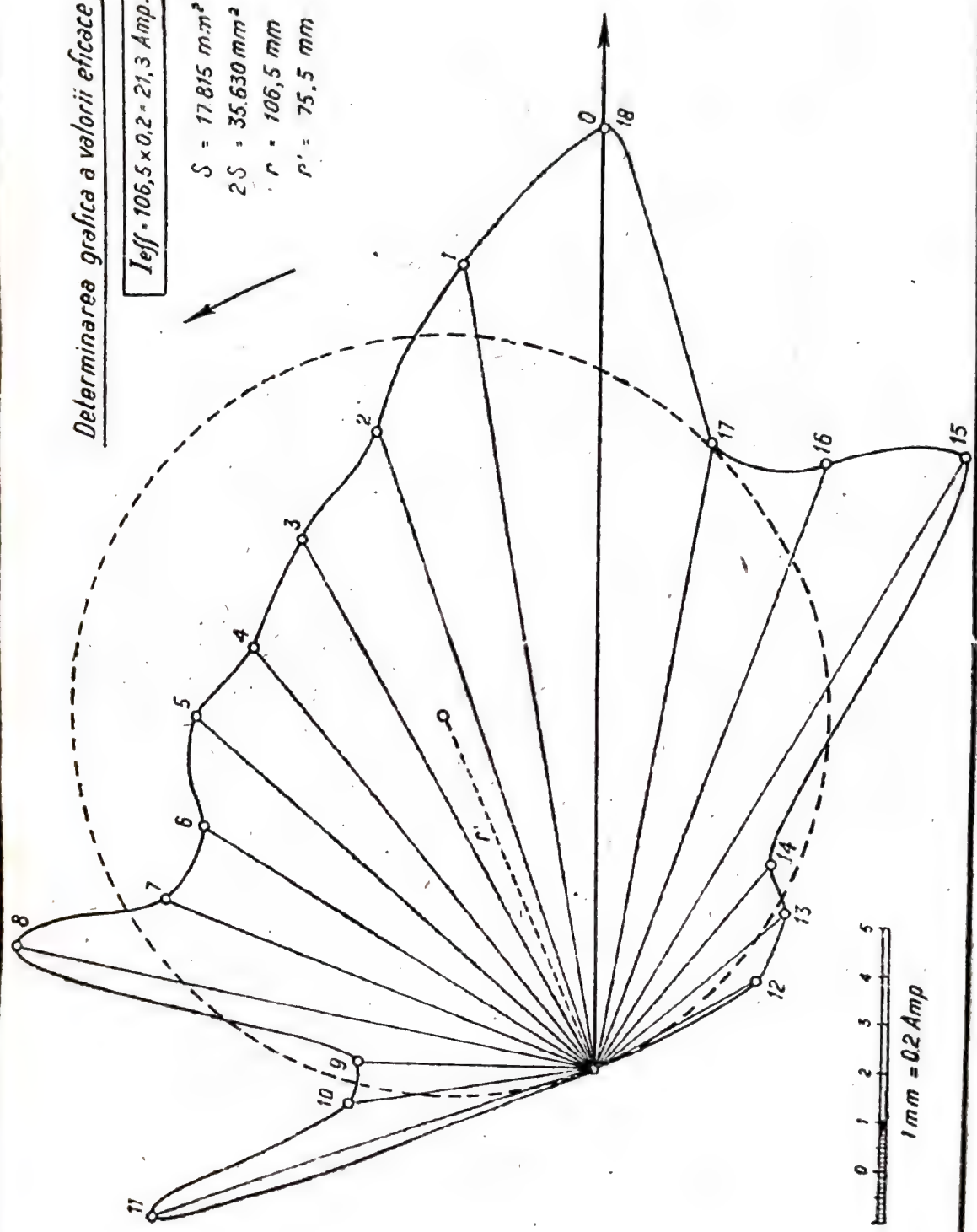


Fig. 7.14 c

Determinarea grafică a valorii eficace

$$I_{eff} = 106,5 \times 0,2 = 21,3 \text{ Amp.}$$

$$\begin{aligned} S &= 17.815 \text{ mm}^2 \\ 2S &= 35.630 \text{ mm}^2 \\ r &= 106,5 \text{ mm} \\ r' &= 75,5 \text{ mm} \end{aligned}$$



ARMONICA 1

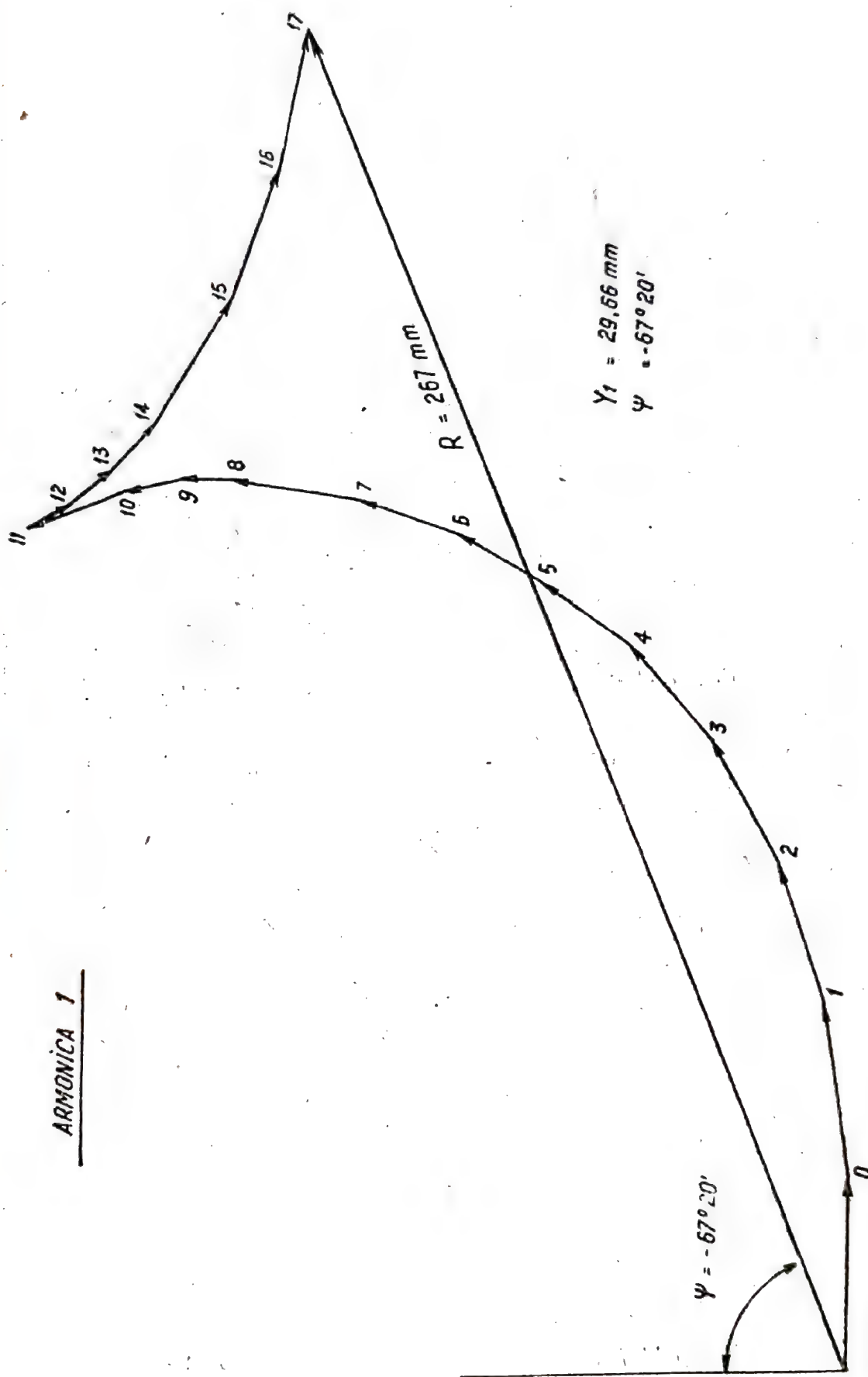
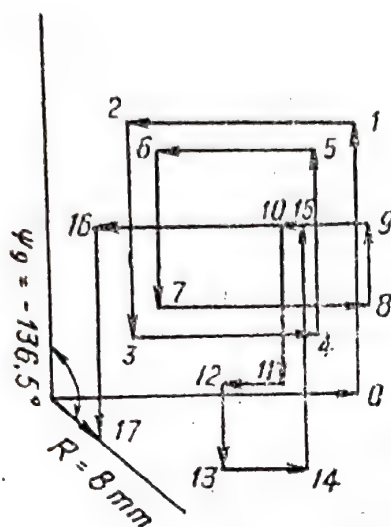


Fig. 7.14, a

ARMONICA 9

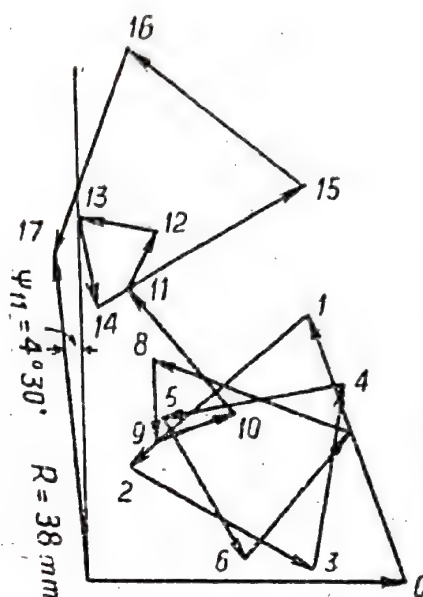


$$Y_9 = 0,88 \text{ mm}$$

$$\Psi_9 = -136,5^\circ$$

Fig. 7.14 d

ARMONICA 11

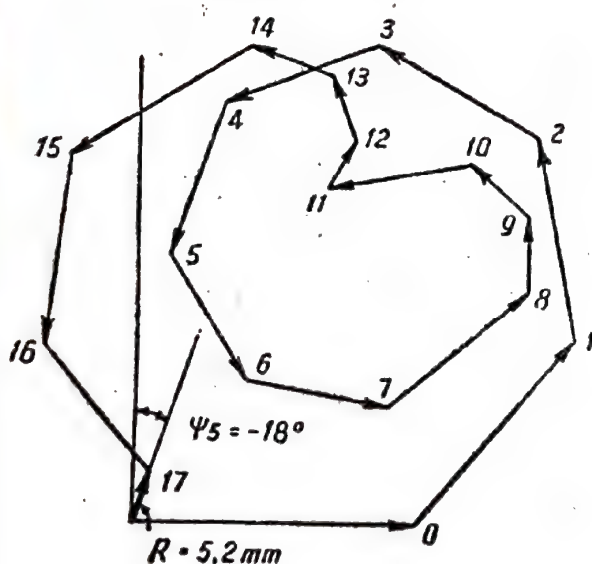


$$Y_{11} = 4.22 \text{ mm}$$

$$\Psi_{11} = 4^\circ 30'$$

Fig. 7.14 e

ARMONICA 5

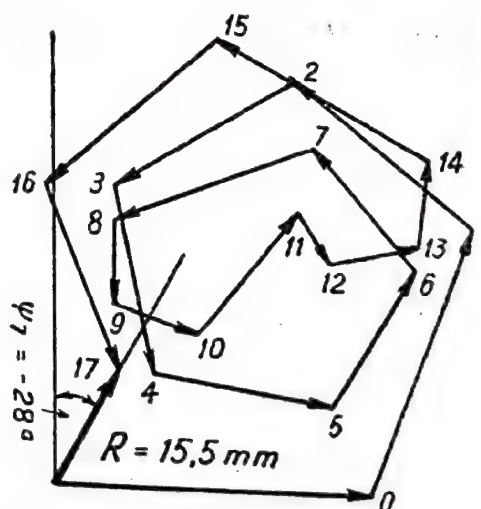


$$Y_5 = 0,58 \text{ mm}$$

$$\Psi_5 = -18^\circ$$

Fig. 7.14 f

ARMONICA 7



$$Y_7 = 1,725 \text{ mm}$$

$$\Psi_7 = -28^\circ$$

Fig. 7.14 g

ARMONICA 3

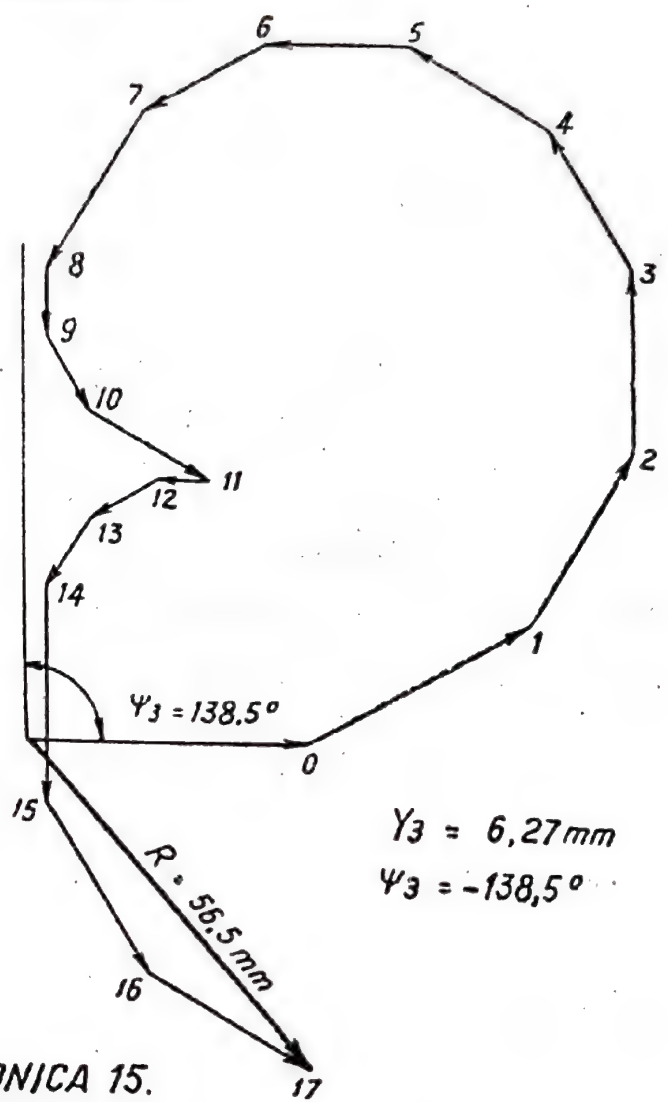
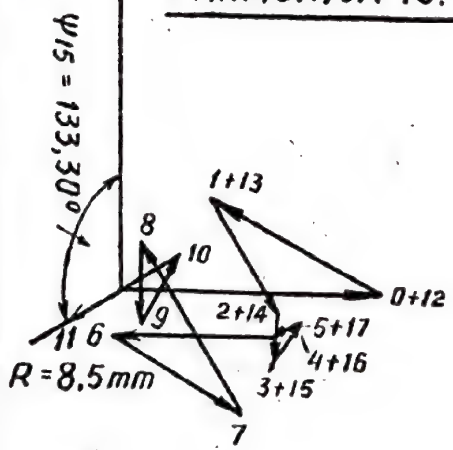


Fig. 7.14 h

ARMONICA 15.



$Y_{15} = 1.06 \text{ mm}$

$\Psi_{15} = 133.30^\circ$

Fig. 7.14 i

7.15. a) Ambele curbe sunt electrotehnice și calculele se fac la fel ca mai sus. *Curba tensiunii*. Tabela pentru calculul lui M și E :

Y_k		-36,5	-35	-33	-29,5	-22,5	-14	-7	-3	5
Y_{p-k}	39,5	38,5	37	37	34,5	30	23,5	19,5	13	
$E_k =$ $Y_k + Y_{p-k}$	39,5	2	2	4	5	7,5	9,5	12,5	10	5
$M_k =$ $Y_k - Y_{p-k}$	-39,5	-75	-92	-70	-64	-52,5	-37,5	-26,5	-16	5

Calculul armonicilor se face cu ajutorul tabelor de calcul date alăturat (tabelele I și II). Rezultatul calculului analizei armonice este dat în tabela III. *Curba curentului* se calculează ca mai sus.

Y_k		3	3,2	4	5,5	9	13	20	31	44,5
Y_{p-k}	0	6,5	12	19	24	28	34	41	45,5	
$E_k =$ $Y_k + Y_{p-k}$	0	9,5	15,2	23	29,5	37	47	61	76,5	44,5
$M_k =$ $Y_k - Y_{p-k}$	0	-3,5	-8,8	-15	-18,5	-19	-21	-21	-14,5	44,5

Rezultatul analizei armonice este:

$$u = 211,9215 \sin(x - 82^\circ 28') + 4,418732 \sin 3(x - 75^\circ 41') +$$

$$+ 4,016584 \sin 5(x - 50^\circ) + 2,699668 \sin 7(x - 49^\circ 25') +$$

$$+ 6,035476 \sin 9(x - 11^\circ 15') + 1,735310 \sin 11(x - 31^\circ 47') +$$

$$+ 1,383657 \sin 13(x - 5^\circ 4') + 0,868427 \sin 15(x - 7^\circ 44') +$$

$$+ 1,656372 \sin 17(x - 0^\circ 30') \text{ volți;}$$

și

$$i = 6,736849 \sin(x - 14^\circ 7') + 1,976439 \sin 3(x - 76^\circ 19') +$$

$$+ 0,734237 \sin 5(x - 2^\circ 15') + 0,404222 \sin 7(x - 76^\circ 19') +$$

$$+ 0,177374 \sin 9(x - 2^\circ 44') + 0,047272 \sin 11(x - 16^\circ 33') +$$

$$+ 0,106624 \sin 13(x - 26^\circ 57') + 0,044217 \sin 15(x - 15^\circ 23') +$$

$$+ 0,024908 \sin 17(x - 20^\circ 46') \text{ amperi.}$$

b) Valorile eficace calculate sunt $U_{ef} = 150,003 \text{ V}$ și $I_{ef} = 5,002 \text{ A}$. Rezidiul deformant: $U_d = 6,63 \text{ V}$ și $I_d = 1,53 \text{ A}$. Coeficientul de distorsiune: $\delta_u = 4,4\%$ și $\delta_i = 30,51\%$.

Problema 7.15

CALCULUL ARMONICELOR CURBEI DE TENSIUNE

(Tabelele I—III)

Tabela 1
Armonicile impare în sin
 Problema 7.15

$k \frac{\pi}{18}$	$\sin k \frac{\pi}{18}$	E_k	A_1	A_{17}	A_3	A_{15}	A_5	A_{13}	A_7	A_{11}	A_9	
0°	0	39,5	—	0	—	0	—	0	—	0	—	0 0 0 0
10°	0,17365	2	0,3473	—	—	—	-2,170625	—	-1,302375	—	—	—
20°	0,34202	2	—	0,68404	—	—	—	-1,71010	—	-3,4202	—	—
30°	0,5	4	2	—	3,75 -6,25	—	2	—	-2	—	—	—
40°	0,64279	5	—	3,21395	—	—	—	6,4279	—	1,28558	—	—
50°	0,76604	7,5	5,7453	—	—	—	1,53208	—	9,5755	—	—	—
60°	0,86603	9,5	—	8,326285	—	1,73206 4,33015 -8,6603	—	-8,326285	—	8,326265	—	=
70°	0,93969	12,5	11,746125	—	—	—	-7,047675	—	1,87938	—	—	—
80°	0,9481	10	—	9,8481	—	—	—	-1,96962	—	-4,92405	—	—
90°	1	5	5	—	4 -5	—	5	—	-5	—	2 -4 1,5 12,5; 6	—

R_n	24,838725	22,072375	-2,5	-2,59809	-0,68622	-1,638865	3,152505	1,267595	-2	
T_n	22,072375		-2,59809		-1,638865		1,267595			
$R_n + T_n$	46,911100		-5,09809		-2,325085		4,420100		-2	
$R_n - T_n$	2,766350		0,09809		0,952645		2,884915			
$A_n = \frac{R_n + T_n}{9}$	5,212344		-0,56534		-0,258342		0,491122		-0,22222	
$A_{p-n} = \frac{R_n - T_n}{9}$	0,307472		0,010898		0,105849		0,320546			

Verificarea sumelor R_n și T_n

Sume R_n impare		Sume T_n impare	
R_1	24,838725	$T_5 \times 0,98481$	-1,613952
$- R_3$	2,5	$T_3 \times 0,86603$	-2,250023
$+ R_5$	-0,68622	$T_7 \times 0,64279$	0,814797
$- R_7$	-3,152505	$T_1 \times 0,34202$	7,549192
$+ \frac{1}{2} R_9$	-1		
$\Sigma = \frac{9}{2} E_9$	22,5 = 22,5	$\Sigma = \frac{9}{4} E_2$	4,500013 \cong 4,5

Tabela 11
Armonicile impare în cos
Problema 7.15

$k \frac{\pi}{18}$	$\cos k \frac{\pi}{18}$	M_k	B_1	B_{17}	B_3	B_{15}	B_5	B_{13}	B_7	B_{11}	B_9	
0°	1	-39,5	- 39,5	—	-39,5 37,5	—	- 39,5	—	-39,5	—	-39,5;37,5 92 ; -16 -64 ;	—
10°	0,98481	-75	—	- 73,86075	—	—	—	-26,097465	--	-51,702525	—	—
20°	0,93969	-72	- 67,65768	—	—	—	60,14016	—	15,03504	—	—	—
30°	0,86603	-70	—	- 60,62210	—	-64,95225 45,466575 22,949795	—	60,62210	—	60,6221	—	—
40°	0,76604	-64	- 49,02656	—	—	—	-12,25664	—	55,15488	—	—	—
50°	0,64271	-52,5	—	-33,746475	—	—	—	-48,201925	—	17,933935	—	—
60°	0,5	-37,5	- 18,75	—	-36 32 8	—	- 18,75	—	-18,75	—	—	—
70°	9,34202	-26,5	—	- 9,063530	—	—	—	17,956050	—	-25,6515	—	—
80°	0,17365	-16	- 2,77840	—	—	—	12,50280	—	-11,1135	—	—	—
90°	0	5	—	0	—	0 0	—	0	—	0	—	0 0 0 0

Q_n	-177,71264	-177,29285	2	3,46412	2,13632	4,271435	0,82632	0,30201	-10	-
P_n	-177,292855		3,46412		4,271435		0,30201		-	
$Q_n + P_n$	-355,005495		5,46412		6,407755		1,12833		-10	
$Q_n - P_n$	-0,419785		-1,46412		-2,135115		0,52431		-	
$B_n = \frac{Q_n + P_n}{9}$	-39,445055		0,60712		0,711972		0,12538		-1,11111	
$B_{p-n} = \frac{Q_n - P_n}{9}$	-0,046531		-0,16268		-0,237235		0,05825		-	

Verificarea sumelor P_n și Q_n

Sume Q_n impare		Suma P_n impare	
Q_1	-177,71262	$P_1 \times 0,98481$	-174,599776
Q_3	2	$P_3 \times 0,86603$	3,000031
Q_5	2,13632	$P_5 \times 0,64271$	2,745635
Q_7	0,82632	$P_7 \times 0,32202$	0,103293
$\frac{1}{2} Q_9$	-5	-	-
$\Sigma = \frac{9}{2} M_0$	-177,75 = -177,75	$\Sigma = \frac{9}{2} M_1$	-168,750815 \cong -168,75

Tabela 111
Tabloul de calcul al armonicilor de tensiune
Problema 7.15

n	0	1	3	5	7	9	11	13	15	17	Unitatea	Observații
A_n		5,212344	-0,565340	-0,258342	0,491122	-0,222222	0,320546	0,105849	0,010898	0,307472	mm	
B_n		-39,445055	0,60712	0,711972	0,12537	-1,111111	0,05825	-0,237235	-0,16268	-0,046531	mm	
A_n^2		27,168529	0,319609	0,066740	0,2412008	0,049381	0,102749	0,011204	0,000118	0,094539		
B_n^2		1555,912363	0,368594	0,506904	0,015717	1,234565	0,003393	0,059280	0,026464	0,002165		
$C_n^2 = A_n^2 + B_n^2$		1583,08089	0,688204	0,573644	0,256918	1,283047	0,106142	0,067484	0,026583	0,096704		
$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$		39,78793	0,82958	0,75408	0,50684	1,13311	0,32579	0,25977	0,16304	0,31097	mm	
$\operatorname{tg} \varphi_n = -\frac{B_n}{A_n}$		211,929215	4,418732	4,016584	2,699668	6,035476	1,735310	1,383657	0,868427	1,656372	volți	
φ_n		7,56762	1,0739	2,75592	-0,25525	-5,00004	-0,18172	2,24126	-14,92750	-0,15133		
$\sin \varphi_n = -\frac{B_n}{C_n}$		82°28'	47°2'	70°3'	14°19'	78°41'	10°14'	65°57'	86°11'	8°36'		
$\cos \varphi_n = \frac{A_n}{C_n}$		>0	<0	<0	<0	>0	<0	>0	>0	>0		
φ_n		>0	<0	<0	>0	<0	>0	>0	>0	>0		
φ_n / n		82°28'	227°2'	250°3'	345°41'	101°19'	349°46'	65°57'	86°11'	8°36'		
		82°28'	75°41'	50°	49°23'	11°15'	31°47'	5°4'	7°44'	0°30'		

Problema 7.15

CALCULUL ARMONICELOR CURBEI DE CURENT

(Tabelele IV—VI)

Tabela IV
Armonicile impare in sin

Problema 7.15

$k \frac{\pi}{18}$	$\sin k \frac{\pi}{18}$	E_k	A_1	A_{17}	A_3	A_{15}	A_5	A_{13}	A_7	A_{11}	A_9	
0°	0	0	—	0	—	0	—	0	—	0	—	0000
10°	0,17365	9,5	1,649675	—	—	—	-10,59265	—	-6,42505	—	—	
20°	0,34202	15,2	—	5,198704	—	—	—	-10,08959	—	-26,16453	—	
30°	0,5	23	11,5	—	4,75 18,5 30,5	—	11,5	—	-11,5	—	—	
40°	0,64271	29,5	—	18,962305	—	—	—	49,193435	—	9,770408	—	
50°	0,76604	37	28,34348	—	—	—	7,279380	—	46,72844	—	—	
60°	0,86603	47	—	40,70341	—	13,163656 25,547885 -66,251295	—	-40,70341	—	40,70341	—	
70°	0,93969	61	57,32109	—	—	—	-34,76853	—	8,927055	—	—	
80°	0,98481	76,5	—	75,337965	—	—	—	14,969112	—	-29,051895	—	
90°	1	44,5	44,5	—	23 -44,5	—	44,5	—	44,5	—	9,5 ; -61 -23 44,5 37	

R_n	143,314245		-28,75		17,91620		-6,769555		7
T_n	140,202384	140,202384	-27,539754	-27,539754	13,349547	13,349547	-4,742607	-4,742607	
$R_n + T_n$	283,516629		-56,289754		31,265747		-11,512162		7
$R_n - T_n$	3,111861		- 1,210246		4,566653		- 2,026948		
$A_n = \frac{R_n + T_n}{9}$	31,501847		- 6,254417		3,473971		- 1,279129		0,77777
$A_{p-n} = \frac{R_n - T_n}{9}$	0,345762		- 0,134471		0,507406		- 0,225216		

Verificarea sumelor R_n și T_n

Sume impare R_n		Sume T_n impare	
R_1	+ 143,314245	$T_5 \times 0,98481$	13,146095
$-R_3$	+ 28,75	$T_3 \times 0,866$	-23,848774
$+R_5$	+ 17,91620	$T_7 \times 0,6428$	- 3,048157
$-R_7$	+ 6,769555	$T_1 \times 0,342$	47,949084
$+ \frac{1}{2} R_9$	+ 3,5		
$\Sigma = \frac{9}{2} E_9$	200,25 = 200,25	$\Sigma = \frac{9}{4} E_2$	34,19935 = 34,2

Tabela V
Armonicele impare în cos
Problema 7.15

$k \frac{\pi}{18}$	$\cos k \frac{\pi}{18}$	M_k	B_1	B_{17}	B_3	B_{15}	B_5	B_{13}	B_7	B_{11}	B_9
0°	1	0	0	—	0 21	—	0	—	0	—	8,8; 21 -18,5; -14,5
10°	0,98481	- 3,5	—	- 3,446835	—	—	—	-20,68101	—	- 18,71139	—
20°	0,93969	- 8,8	- 8,269272	—	—	—	17,384265	—	13,625505	—	—
30°	0,86603	- 15	—	- 12,99045	—	-3,031105 16,45457 18,18663	—	12,99045	—	12,99045	—
40°	0,76604	-18,5	-14,171740	—	—	—	-11,10758	—	6,741152	—	—
50°	0,64271	- 19	—	- 12,21301	—	—	—	-2,249765	—	13,49859	—
60°	0,5	- 21	-10,5	—	- 4,4 9,25 7,25	—	-10,5	—	-10,5	—	—
70°	0,34202	- 21	—	- 7,18242	—	—	—	6,49838	—	- 1,19707	—
80°	0,17365	-14,5	-2,517925	—	—	—	1,52812	—	- 3,21252	—	—
90°	0	44,5	—	0	—	0 0	—	0	—	0	—

Q_n	- 35,45893		33,1		-2,695195		6,654132		- 3,2	
P_n	-35,832715	-35,832715	31,610095	31,610095	-3,441945	-3,441945	6,58058	6,58058		
$Q_n + P_n$	- 71,291652		64,710095		- 6,137140		13,234712		- 3,2	
$Q_n - P_n$	0,373778		1,489905		0,746750		0,073552			
$B_n = \frac{Q_n + P_n}{9}$	- 7,921294		7,19001		- 0,681904		- 1,470523		0,35555	
$B_{p-n} = \frac{Q_n - P_n}{9}$	0,041530		0,165545		0,082972		0,008173			

Verificarea sumelor P_n și Q_n

Sume Q_n impare		Sume P_n impare	
Q_1	- 35,458937	$P_1 \times 0,98481$	- 35,28735
Q_3	33,1	$P_3 \times 0,86603$	27,37426
Q_5	- 2,695195	$P_5 \times 0,6428$	- 2,211874
Q_7	6,654132	$P_7 \times 0,34202$	2,250558
$\frac{1}{2} Q_9$	- 2,6		
$\Sigma = \frac{9}{2} M_o$	0=0	$\Sigma = \frac{9}{4} M_1$	- 7,87441 \cong - 7,875

Tabela VI
Tabloul de calcul al armonicelor de curent
Problema 7.15

n	0	1	3	5	7	9	11	13	15	17	Unitatea	Observatii
A_n		31,501847	- 6,254417	3,473971	- 1,279129	0,777777	- 0,225216	0,507406	- 0,134471	0,345762	mm	
B_n		- 7,921294	7,19001	- 0,681904	1,470523	- 0,355555	0,008173	0,082972	0,165545	0,041530	mm	
A_n^2		992,365923	39,117644	12,068467	1,636173	0,604926	0,050724	0,257454	0,018082	0,119549		
B_n^2		62,746835	51,696243	0,464987	2,162429	0,126455	0,0000667	0,006884	0,027403	0,001724		
$C_n^2 = A_n^2 + B_n^2$		1055,112758	90,813888	12,533455	3,798602	7,731341	0,0507907	0,264338	0,045485	0,121274		
$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$		32,48249	9,52962	3,54026	1,94900	0,85518	0,22536	0,51413	0,21327	0,34822	mm	
C_n		6,736849	1,976439	0,734237	0,404222	0,177374	0,047277	0,106624	0,044217	0,024908	amperi	
$\operatorname{tg} \varphi_n = -\frac{B_n}{A_n}$		0,251454	- 1,149490	0,196289	- 1,149634	0,457140	- 0,036289	- 0,163521	- 1,231083	- 0,120111		
φ_n		14°7'	48°58'	11°7'	48°58'	24°35'	2°7'	9°17'	50°56'	6°53'		
$\sin \varphi_n = -\frac{B_n}{C_n}$		>0	<0	>0	<0	>0	<0	<0	<0	<0		
$\cos \varphi_n = \frac{A_n}{C_n}$		>0	<0	>0	<0	>0	<0	>0	<0	>0		
φ_n		14°7'	228°58'	11°7'	22 8°58'	24°35'	182°7'	350°43'	230°56'	353°7'		
φ_n/n		14°7'	76°19'	2°13'	76°19'	2°44'	16°33'	26°57'	15°23'	20°46'		

c) Calculul puterilor se face cu formulele cunoscute. Se găsește: $P = 262,38 \text{ W}$, $Q = -659,98 \text{ VAR}$. Pentru puterea deformantă, deoarece $\delta_u < 20\%$ se ia $D = U_{ef} I_d = 228,99 \text{ VAD}$.

CURBA POLARA A TENSIUNEI

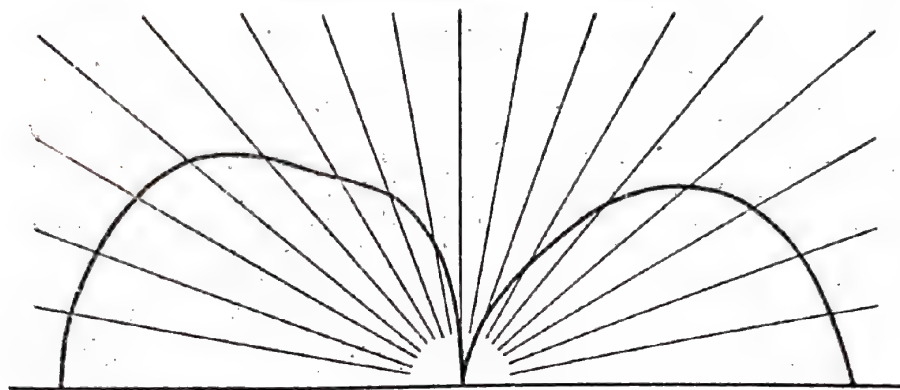


Fig. 7.15 a

Se găsește apoi $S = 745,549 \text{ VA}$, eroarea de determinare a puterii aparente (față de indicația aparatelor de măsură) este $-0,593\%$.

CURBA POLARA A CURENTULUI

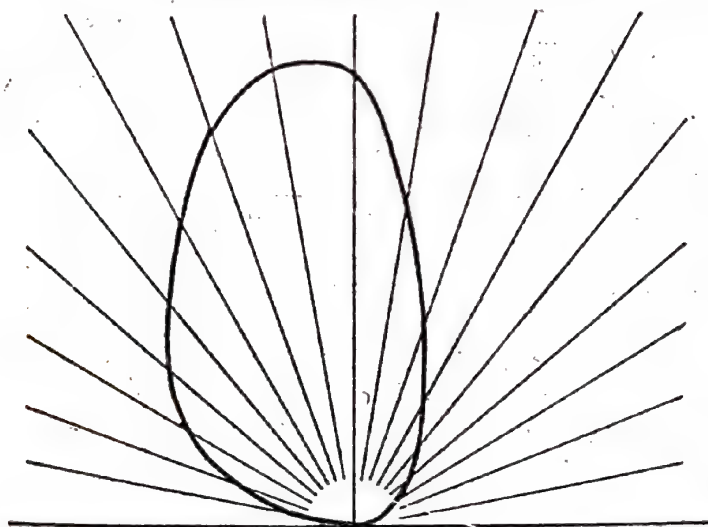


Fig. 7.15 b

d) Din calculul grafic (fig. 7. 15,a și b), se găsește: $U_{ef} = 149,83 \text{ V}$ cu eroarea $-0,18\%$ și $I_{ef} = 4,98 \text{ A}$ cu eroarea $-0,431\%$.

7.16. Prin metoda integrării sau prin metoda salturilor, se găsește ușor:

$$i = \frac{I_1 + I_2}{2} + \frac{2(I_2 - I_1)}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3 \omega t + \frac{1}{5} \sin 5 \omega t + \dots \right)$$

7.17. Ca mai sus, se găsește $i = \frac{2}{3} I - \frac{\sqrt{3}}{\pi 2} I (\cos \omega t - \frac{1}{2} \cos 2\omega t + \frac{1}{3} \cos 4\omega t - \dots) + \frac{3}{2\pi} I (\sin \omega t + \frac{1}{2} \sin 2\omega t + \frac{1}{3} \sin 4\omega t + \dots)$. a) Se folosește relația (32). b) Grafic. În ambele cazuri se găsește $I_{ef} = \sqrt{\frac{2}{3}} I$.

7.18. Tensiunea aplicată este dată de ecuația $u = Ri + L \frac{di}{dt}$. Curba căderii de tensiune ohmice are aceeași formă cu aceea a curentului. Curba căderii de tensiune inductive se construiește ținând seama că derivata curentului este constantă și este egală cu panta curbei curentului: pe porțiunea Oa ea este egală

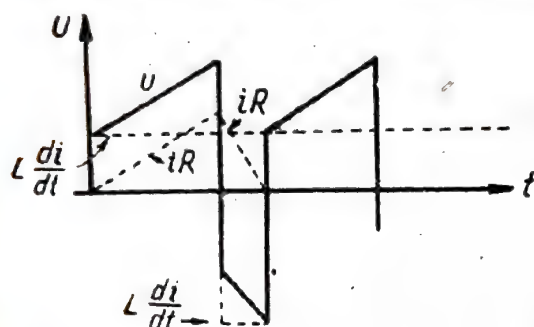


Fig. 7.18

cu Im/τ_1 , iar pe porțiunea ab ea este egală cu Im/τ_2 . Numeric se găsește: valoarea maximă a lui $Ri = 10$ V. Din $\tau_1 + \tau_2 = 0,020$ s și $\tau_1/\tau_2 = 4$, se găsește $\tau_1 = 0,02$ s și

$\tau_2 = 0,005$ s; deci $L \frac{di}{dt}$ pe porțiunea

Oa este egală cu 5 V, iar pe porțiunea ab este egală cu -20 V. Curba tensiunii este deci: pentru $0 < t \leq \tau_1$, $u = 5 + 500t$ V; pentru $\tau_1 \leq t \leq T$, $u = 30 - 2000t$ V (fig. 7.18).

7.19. Se aplică metodele de calcul (integrare sau salturi); se găsește:

$$y = \frac{Y}{2\pi} (\cos \alpha + \cos \beta) + \frac{Y}{2\pi} (\sin \alpha \cos \alpha + \sin \beta \cos \beta + \pi - \alpha - \beta) \sin x + \frac{Y}{2\pi} (\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha) \cos x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{Y}{\pi} \frac{1}{1-n^2} \left[\cos n\pi (n \sin \beta \cos n\beta - \cos \beta \sin n\beta) + \cos \alpha \sin n\alpha - n \sin \alpha \cos n\alpha \right] \sin nx + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{Y}{\pi} \frac{1}{1-n^2} \left[\cos n\pi (\cos \beta \cos n\beta + n \sin \beta \sin n\beta) + \cos \alpha \cos n\alpha + n \sin \alpha \sin n\alpha \right] \cos nx.$$

7.20. Se aplică metoda Crug. Se găsește: $i = 44,8 \sin (\omega t - 13^\circ 50') + 14,1 \sin (3\omega t + 53^\circ 30') + 2,74 \sin (5\omega t - 48^\circ 50')$.

7.21. Funcție pară. Se poate rezolva fie prin metoda integrării, fie prin metoda discontinuităților. Se mai poate rezolva și ținând seama de soluția problemei 7.19, dublând rezultatele. Se găsește:

$$y = \frac{Y}{\pi} (\cos \alpha + \cos \beta) + \sum_{n=2}^{2n} \frac{2Y}{\pi} \cdot \frac{1}{1-k^2} \left[k \sin \beta \cos k\beta - \cos \beta \sin k\beta + \cos \alpha \sin k\alpha - k \sin \alpha \cos k\alpha \right] \sin kx + \sum_{n=2}^{2n} \frac{2Y}{\pi} \cdot \frac{1}{1-k^2} \left[\cos \beta \cos k\beta + k \sin \beta \sin k\beta + \cos \alpha \cos k\alpha + k \sin \alpha \sin k\alpha \right] \cos kx.$$

7.22. Se face calculul numai asupra sfertului de perioadă fie prin metoda discontinuităților (are numai salturi de ordonată), fie prin metoda integrării. Curba este electrotehnică. Se găsește

$$A_n = \frac{4}{\pi \cdot n} \left[X \cos n\alpha + Z \cos n(\alpha + \beta) + W \cos n(\alpha + \beta + \gamma) \right], n \text{ impar.}$$

7.23. Curba este electrotehnică și se procedează ca în cazul problemei precedente. Se găsește:

$$A_n = -\frac{4}{\pi} \frac{1}{n^2} \left[\left(\frac{Z}{\beta} - \frac{X}{\alpha} \right) \sin n\alpha - \frac{Z}{\beta} \sin n(\alpha + \beta) \right], n \text{ impar.}$$

7.24. Pentru curba în trapez se face $Z = 0$ și rezultă $X = R$. Se găsește rezultatul obținut în problema 7.7.

Pentru curba în dreptunghi se face $Z = 0$ și $\alpha = 0$, obținându-se rezultatul din problema 7.5.

Pentru curba în triunghi isoscel se face $\frac{Z}{\beta} = \frac{X}{\alpha}$ și $\gamma = 0$. Se găsește rezultatul din problema 7.6.

7.25. Curba este formată numai din vârfurile sinusoidelor dintre două intersecții consecutive. Se aplică metoda integrării numai unui singur arc.

Ecuția curbelor este de forma $y = Y \sin \left(\omega t + k \frac{2\pi}{3} \right)$ în care $k = 0, \pm 1$.

Se găsește

$$i = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} I_m \left[1 + \frac{2}{9 \cdot 1 - 1} \cos 3\omega t - \frac{2}{9 \cdot 2^2 - 1} \cos 6\omega t + \dots + \frac{2(-1)^{k+1}}{9k^2 - 1} \cos 3k\omega t + \dots \right]$$

8. 8.1. $I_{ef} = 6,5 \text{ A}$; $I_d = 2,5 \text{ A}$; $i = 6,5 \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi)$; $\alpha = \frac{I_{ef}}{I_{med}}$ dar

$$I_{med} = I_0 + \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sum \frac{1}{k} I_k = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \left(6 + \frac{2}{3} + \frac{1,5}{5} \right) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{20,9}{3} \dots \alpha =$$

$$6,5 \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{20,9} = 1,035; \delta_I = \frac{I_d}{I_{ef}} \times 100 = 38,46\%.$$

8.2. $U_{ef} = 121,2 \text{ V}$; $U_d = 17,3 \text{ V}$; $u = 121,2\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi)$ luându-se originea de fază originea curbei nesinusoidale; $\alpha = 1,075$; $\delta_T = 14,25\%$.

8.3. $U_{ef} = 122,7 \text{ V}$; $U_d = 100,3 \text{ V}$; $u = 122,7 \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi)$; $\alpha = 0,74$; $\delta_T = 82\%$.

8.4. $I_{ef} = 6,6 \text{ A}$; $I_d = 5,57 \text{ A}$; $i = 6,6 \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi)$; $\alpha = 0,736$; $\delta_I = 84,5\%$.

8.5. $I_{ef} = 7,42 \text{ A}$; $I_d = 5,48 \text{ A}$; $i = 7,42 \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi)$; $\alpha = 1,21$; $\delta_I = 74\%$.

8.6. a) Valoarea eficace se calculează grafic și se găsește (vezi problema 7.12): $U_{ef} = 0,745$; $U_M = 1,49 U$ volți;

b) $U_d = 0,24 U$ volți; $\delta = 16,11\%$.

8.7. Dacă $u_n = U_n \sqrt{2} \sin(n\omega t - \alpha_n)$ și $i_n = I_n \sqrt{2} \sin(n\omega t - \beta_n)$, atunci $\varphi_n = \beta_n - \alpha_n$. Avem $\rho = \frac{Q}{P}$ și $\tau = \frac{D}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$ apoi $k = \cos \varphi \cdot \cos \xi$ în care $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \rho^2}}$ și $\cos \xi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2}}$. Puterile se calculează din $P = \sum U_n I_n \cos \varphi_n$, $Q = \sum U_n I_n \sin \varphi_n$, $D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2}$ și $S = U_{ef} \cdot I_{ef}$, în care $U_{ef} = \sqrt{\sum U_n^2}$, etc. Calculând se găsește $P \cong 438 \text{ W}$; $Q \cong 258,7 \text{ VAR}$; $U_{ef} = 100,5 \text{ V}$; $I_{ef} \cong 5,1 \text{ A}$; $S \cong 512,6 \text{ VA}$; $D \cong 63,1 \text{ VAD}$; $\rho = 0,59$; $\tau = 0,1044$; $\cos \varphi = 0,862$; $\cos \xi = 0,995$; $K = 0,858$.

8.8. $P = 432,7 \text{ W}$; $U_{ef} = 100 \text{ V}$; $I_{ef} = 7,42 \text{ A}$; $S = 742 \text{ VA}$; $K = 0,584$; $Q = 249,7 \text{ VAR}$; $\rho = 0,577$; pentru că $\delta_I \cong 0,1\% < 20\%$, $D = U_{ef} I_d = 548 \text{ VAD}$, căci $I_d = 5,48 \text{ A}$; $\tau = 1,1$.

8.9. Formula exactă de calcul a puterii deformante este $D^2 = \sum [U_m^2 I_n^2 + U_n^2 I_m^2 - 2 U_m U_n I_m I_n \cos(\varphi_m - \varphi_n)]$. Se găsește $D = 357 \text{ VAD}$; $I_d = 3,35 \text{ A}$, $U_1 = 120 \text{ V}$. $D' = 402 \text{ VAD}$ și $\varepsilon = +12,6\%$.

8.10. Unda de curent fiind dată în cosinus, trebuie transformată în sinus cu relația $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$. Se găsește $i = 5 + 5 \sin(\omega t + 25^\circ) + 3 \sin(3\omega t - 145^\circ) + \sin(5\omega t - 10^\circ)$; $U_{ef} = 122,4 \text{ V}$; $I_{ef} = 6,34 \text{ A}$; $S = 778 \text{ VA}$; $P = 723,3 \text{ W}$; $Q = 132,5 \text{ VAR}$; $D = 270 \text{ VAD}$; $K = 0,93$; $\rho = 0,184$; $\tau = 0,368$.

8.11. $U_{ef} = 123 \text{ V}$; $I_{ef} = 6,55 \text{ A}$; $S = 806 \text{ VA}$; $P = 726,8 \text{ W}$; $Q = 136,0 \text{ VAR}$; $D = 320,4 \text{ VAD}$, $\rho = 18,74\%$, $\tau = 43,30\%$; $K = 0,9$.

8.12. Aplicând legea lui Ohm se obține:

$$i = 2 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + 0,5 \sin\left(5\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$U_{\text{voltmetru}} = 50,5 \text{ V}.$$

8.13. Se aplică legea lui Ohm pentru fiecare armonică în parte, scriind cu cantități complexe impedanța pentru fiecare armonică; se determină curentul total i , făcând suma curenților din ramuri. Se găsește:

$$i_R = 30 \sin \omega t + 10 \sin(3\omega t + 20^\circ)$$

$$i_L = 90 \sin(\omega t - 90^\circ) + 10 \sin(3\omega t - 70^\circ)$$

$$i_C = 10 \sin(\omega t + 90^\circ) + 10 \sin(3\omega t + 110^\circ)$$

$$i = 85,5 \sin(\omega t - 69^\circ 30') + 10 \sin(3\omega t + 20^\circ)$$

8.14. Aplicând legea lui Ohm pentru fiecare armonică în parte și scriind $I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2}$ se obține $I = 1,61 \text{ A}$.

8.15. (a) $i_1 = 35,3 \sin(\omega t - 45^\circ) + 6,32 \sin(3\omega t - 71^\circ 30') \text{ A}$; $i_2 = 35,3 \sin(\omega t + 45^\circ) + 19 \sin(3\omega t + 18^\circ 30') \text{ A}$; $i = i_1 + i_2 = 50 \sin \omega t + 20 \sin 3\omega t \text{ A}$; (b) $I_1 = 25,36 \text{ A}$; $I_2 = 29,05 \text{ A}$; $I = 38 \text{ A}$; $U = 76,15 \text{ V}$. (c) $\alpha_1 = 1,06$; $\alpha_2 = 1,09$; $\alpha_I = 1,055$; $\alpha_u = 1,05$; $f_{vI} = 1,28$; $f_{vu} = 1,18$; pentru curenții din impedanțe se construiesc oscilogramele corespunzătoare deducându-se valorile maxime respective.

$\delta_1 = 17,9\%$; $\delta_2 = 53,8\%$; $\delta_I = 40\%$; $\delta_T = 40\%$. (d) $P = 2165 \text{ W}$.

8.16. Curentul se calculează prin metoda suprapunerii efectelor. Avem: $Z_1 = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = 5 \Omega$; $\lg \varphi_1 = \frac{X_L - X_C}{R} = -1,33 \dots \varphi_1 = -53^\circ 08'$;

$$i_1 = \frac{U_1 \sqrt{2}}{Z_1} \sin(\omega t - \varphi_1) = 56,4 \sin(\omega t + 53^\circ 08'); Z_3 = \sqrt{R_2^2 + (3X_L - \frac{1}{3}X_C)^2} =$$

$$= 20,22 \Omega; \operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{3X_L - \frac{1}{3}X_C}{R} = 4, \therefore \varphi_3 = 81^\circ 28'; I_3 \sqrt{2} = 0,21 \text{ A}; Z_5 =$$

$$= \sqrt{R^2 + (5X_L - \frac{1}{5}X_C)^2} = 47,7 \Omega; \operatorname{tg} \varphi_5 = \frac{5X_L - \frac{1}{5}X_C}{R} = 15,16, \therefore \varphi_5 = 86^\circ 23';$$

$$I_5 \sqrt{2} = 0,074 \text{ A. Curentul căutat este } i = 56,4 \sin(\omega t + 53^\circ 08') + 0,21 \sin(3\omega t - 81^\circ 28') + 0,074 \sin(5\omega t - 86^\circ 23'); U_{ef} = 200 \text{ V}; I_{ef} = 40,0 \text{ A};$$

$$S = 8000 \text{ VA}; I_d = 0,157 \text{ A}; \delta = 0,394 \%; P = 4775 \text{ W}; Q = -6374 \text{ VAR}; D = 500 \text{ VAD}; K = 0,6 \text{ cap.}$$

8.17. Se transformă în prealabil curba tensiunii într-o curbă în sinus. Se găsește: $U = 10 \sqrt{2} \sin(\omega t + 20^\circ) + 2 \sqrt{2} \sin(5\omega t - 40^\circ) + 10 \sqrt{2} \sin(7\omega t - 60^\circ)$; $P = 705 \text{ W}$; $Q = 104 \text{ VAR}$; $P_c = 1773 \text{ VA}$; $U_{ef} = 14,3 \text{ V}$; $I_{ef} = 126,7 \text{ A}$; $S = 1912 \text{ VA}$; $D = 1774 \text{ VAD}$.

8.18. Tensiunea eficace este $U_{ef} = \sqrt{\sum U_k^2}$ iar intensitatea eficace a

curentului $I_{ef} = \sqrt{\sum I_k^2} = \sqrt{\sum \frac{E_k^2}{k^2 X_L^2}} = \frac{1}{X_L} \sqrt{\sum \left(\frac{E_k}{k}\right)^2}$. Reactanța aparentă

a circuitului va fi $X'_L = \frac{U_{ef}}{I_{ef}} = X_L \sqrt{\frac{\sum U_k^2}{\sum \left(\frac{U_k}{k}\right)^2}}$.

8.19. Avem $\frac{X'_L}{X_L} = \sqrt{\frac{\sum U_k^2}{\sum \left(\frac{U_k}{k}\right)^2}}$. Dar $\sum U_k^2 = (1 + 0,25^2 + 0,15^2) U_1^2 =$

$$= 1,0850 U_1^2 \text{ și } \sum \left(\frac{U_k}{k}\right)^2 = U_1^2 \left[1 + \left(\frac{0,25}{3}\right)^2 + \left(\frac{0,15}{5}\right)^2 \right] = 1,0078 U_1^2$$

$\therefore (X'_L / X_L) = 1,0766$, adică X'_L este cu 7,66 % mai mare decât X_L .

8.20. Din relația $Z = \frac{U_{ef}}{I_{ef}}$, ținând seama că $I_k = \frac{U_k}{Z_k}$ și $Z_k^2 = R^2 +$

$$+ k^2 X_L^2 \text{ se deduce ușor } Z = \sqrt{\frac{\sum U_k^2}{\sum \left(\frac{U_k}{Z_k}\right)^2}} = Z_1 \sqrt{\frac{\sum U_k^2}{\sum \left(\frac{Z_1}{Z_k} U_k\right)^2}}$$

În cazul particular al problemei se găsește $Z_1 = 100 \Omega$; $Z = 101,46 \Omega$, adică crește cu 1,46 %; $X'_L = \sqrt{Z^2 - R^2} = 62,4 \Omega$, adică crește cu 4 %.

8.21. Ținând seama că $U_k = k X_L I_k$, se găsește ușor $X'_L = \frac{U_{ef}}{I_{ef}} =$

$$= X_L \sqrt{\frac{\sum (k I_k)^2}{\sum I_k^2}}$$

$$8.22. b_c = b_e \sqrt{\frac{\sum (k U_k)^2}{\sum U_k^2}}$$

$$8.23. 17,5 \%$$

$$8.24. Z = 99,1 \Omega, \text{ adică o scădere cu } 0,9 \%. X'_c = 58,5 \Omega, \text{ adică o scădere cu } 2,5 \%.$$

$$8.25. \text{ Deoarece } E_k = \frac{I_k}{k X_c} \text{ se deduce ușor } X'_c = X_c \sqrt{\frac{\sum \left(\frac{I_k}{k}\right)^2}{\sum I_k^2}}$$

$$8.26. Z' = 5,0125 \Omega, \text{ adică cu } 0,25 \%, \text{ mai mare decât cea reală.}$$

8.27. Curenții capacitivi corespunzători celor trei armonice sunt $I_{1c} = 1$ A, $I_{3c} = 0,6$ A, $I_{5c} = 0,5$ A; curenții inductivi sunt analogi, $I_{1L} = 1$ A; $I_{3L} = 0,067$ și $I_{5L} = 0,02$ A. Curentul rezultat dat de sursă este zero pentru fundamentală; $0,6 - 0,067 = 0,533$ A pentru armonica 3 și $0,5 - 0,2 = 0,3$ A pentru armonica 5. Valoarea eficace a acestui curent este $0,72$ A. Valoarea eficace a curentului capacitiv este $1,27$ A iar aceea a curentului inductiv este 1 A.

8.28. Trebuie îndeplinită condiția de rezonanță pentru fiecare harmonică în parte. $LCn^2\omega^2 = 1$. Se găsește: pentru $n = 1$, $L = 319$ mH; $n = 3$, $L = 35,4$ mH; $n = 5$, $L = 12,76$ mH. În aceste trei cazuri, curenții care intră în buclele oscilografului sunt: $i_1 = 2,82 \sin \omega t + 0,247 \sin (3\omega t - 69^\circ 27') + 0,086 \sin (5\omega t - 88^\circ 48')$; $i_3 = 2,10 \sin (\omega t + 41^\circ 40') + 0,7 \sin 3\omega t + 0,41 \sin (5\omega t - 14^\circ 02')$; $i_5 = 2,02 \sin (\omega t + 89^\circ 20') + 0,685 \sin (3\omega t + 41^\circ 40') + 0,423 \sin 5 \omega t$.

Oscilogramele curenților se trasează ușor prin puncte.

8.29. Din tensiunea de scurtcircuit u_k se deduce reactanța transformatorului care se presupune inductivă (se neglijează rezistența ohmică). Se găsește $X_L = \frac{u_k}{100} \cdot \frac{U^2}{S} = 6,3 \Omega$, în care s'a luat U în kV și S în MVA. Cablul având

capacitatea de $0,31 \times 6 = 1,86 \mu F$, condiția de rezonanță este $2nX_L = \frac{10^6}{n \cdot 314 \cdot 1,86}$ de unde $n = 11,66$. Rezultă că circuitul ar putea să intre în rezonanță pentru armonicele 11 sau 13.

8.30. Curentul căutat este dat de ecuația $i = C \frac{du}{dt}$. Se găsește

$$i = \frac{8 C \omega U}{\pi^2} \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin (2k+1) \frac{\pi}{2} \sin \left[(2k+1) \omega t + \frac{\pi}{2} \right] \text{ care este o curbă}$$

mai deformată decât unda formată din dreptunghiuri $y = \frac{4 Y_m}{\pi} \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin (2k+1) \omega t$. Curba de curent este decalată cu $\frac{\pi}{2}$ înaintea curbei de tensiune.

Calculul coeficienților de distorsiune se face aplicându-se metoda obișnuită. Seria de sub radical fiind foarte convergentă se poate calcula limitându-ne la 8 termeni. Se găsește $\delta_T = 12,01 \%$ și $\delta_I = 41,03 \%$. Prin urmare curba curentului este mai deformată decât aceea a tensiunii: condensatorul accentuează deformația.

8.31. Curentul se deduce din relația $u = L \frac{di}{dt}$ prin integrare. Se găsește

$$\text{ușor } i = \frac{8U}{\pi^2 L \omega} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} \sin(2k+1) \frac{\pi}{2} \sin \left[(2k+1) \omega t - \frac{\pi}{2} \right], \text{ curbă a-}$$

semănătoare cu a parabolei $y = \frac{32 Y_m}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} \sin(2k+1) \omega t$. Coeficientul de distorsiune este $\delta_1 = 3,80\%$, mai mic decât acela al tensiunii: inductanța ameliorează situația regimului deformant.

8.32. Notând $\bar{Z}_1 = j L \omega$ și $\bar{Z}_2 = \frac{-j}{C \omega} = -j 31,4 \Omega$, unda fundamentală

$$\text{a curentului este dată de relația } \bar{I}_1 = \frac{\bar{U}_1}{\bar{Z} + \frac{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2}} = \frac{\bar{U}_1 (\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2)}{\bar{Z} (\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2) + \bar{Z}_1 \bar{Z}_2}$$

Pentruca $I_1 = 0$ trebuie ca $\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 = 0$ sau $j \omega L - j \frac{1}{C \omega} = 0$, de unde se deduce ușor $L = 0,1 \text{ H}$.

Pentru calculul lui $\bar{Z} = R_x + j X_x$ se calculează curenții produși de armonicile 3 și 5. Impedanțele respective sunt $\bar{Z}_{1(3)} = j 3.314,0,1 = j 94,2 \Omega$ și $\bar{Z}_{2(3)} = -j 10,5 \Omega$,

$$\text{de unde } \bar{Z}_{T(3)} = R_x + j 3 X_x = \frac{\bar{Z}_{1(3)} \bar{Z}_{2(3)}}{\bar{Z}_{1(3)} + \bar{Z}_{2(3)}} = R_x + j 3 (X_x - 3,95) \Omega. \text{ In}$$

același mod se găsește $\bar{Z}_{T(5)} = R_x + j 5 (X_x - 1,31) \Omega$. Curenții respectivi sunt $I_3 = U_3 / Z_{T(3)}$ și $I_5 = U_5 / Z_{T(5)}$. Punând condiția $|I_5| = 0,05 |I_3|$ se găsește relația $4 [R_x^2 + 9 (X_x - 3,95)^2] = R_x^2 + 25 (X_x - 1,31)^2$ de unde

$$R_x^2 = \frac{25 (X_x - 1,31)^2 - 36 (X_x - 3,95)^2}{3}. \text{ Condiția ca } R_x \text{ să fie real și pozitiv}$$

conduce la relația :

$$25 (X_x - 1,31)^2 - 36 (X_x - 3,95)^2 \geq 0$$

de unde se găsește $2,9 \leq X_x \leq 16,1 \Omega$. Dacă luăm $X_x = 3,95 \Omega$, găsim $R_x = 7,6 \Omega$. Cu aceste valori găsim $\sqrt{2} \bar{I}_3 = 1,315 + j 0 \text{ A}$. $\varphi_3 = 0$ și $\sqrt{2} \bar{I}_5 = 0,033 - j 0,057 \text{ A}$ cu $\sqrt{2} \bar{I}_1 = 0,066 \text{ A}$ și $\varphi_5 = 59^\circ 54'$. Curentul căutat este $i = 1,315 \sin 3 \omega t + 0,066 \sin (5 \omega t - 59^\circ 54')$. Cum $I_{ef} = I_d$ rezultă $\delta = 100\%$.

8.33. Curentul se calculează pentru fiecare armonică în parte. Pentru fundamentală $\frac{1}{C \omega} = 30 \Omega$. Impedanța între J și K: $\bar{Z}_3 = 15 (1 - j) \Omega$; impe-

danța între H și K: $\bar{Z}_2 = 85 - j 15 \Omega$; impedanța ramurii FG: $\bar{Z}_1 = 20 + j 88 \Omega$; impedanța totală a circuitului $\bar{Z} = 51,3 + j 32,6 \Omega = 60,8 \angle 32^\circ 20' \Omega$. Unda fundamentală a tensiunii fiind $\bar{U}_1 = 100 \angle 0^\circ$. $\bar{I}_1 = 1,64 \angle -32^\circ 30' \text{ A}$. Pentru armonică $\bar{Z}'_3 = 3 - j 9 \Omega$; $\bar{Z}'_2 = 73 - j 9 \Omega$; $\bar{Z}'_1 = 20 + j 264 \Omega$; $\bar{Z}' = 71 + j 10,8 \Omega = 71,8 \angle 8^\circ 40' \Omega$. $U_3 = 50 \angle 0^\circ$. $\bar{I}_3 = 0,7 \angle -8^\circ 40' \text{ A}$.

Curba curentului este :

$$i = 23,15 \sin (\omega t - 32^\circ 30') + 0,99 \sin (3 \omega t - 8^\circ 40') \text{ A.}$$

$U_{ef} = 112 \text{ V}$; $U_d = 50 \text{ V}$; $\delta_T = 45,5\%$; $I_{ef} = 16,39 \text{ A}$; $I_d = 0,7 \text{ A}$; $\delta_I = 4,27\%$. Curentul este mai puțin deformat, deci circuitul este netezitor pentru curent.

8.34. a) $S = 800 \text{ kVA}$; $S' = 783 \text{ kVA}$ $\xi = 2,17\%$

b) $p_D = 3R \frac{P^2 + Q^2 + D^2}{3U^2} \text{ W}$; $p_s = 3R \frac{P^2 + Q^2}{3U^2} \text{ W}$; $\zeta = \frac{p_D - p_s}{p_s}$

$\frac{D^2}{P^2 + Q^2} = \tau^2 = 7,60\%$.

8.35. a) $S = 7980 \text{ VA}$; $S' = 7950 \text{ VA}$; $\xi = 0,38\%$.

b) $\zeta = 1,08 \times 10^{-4}\%$. Regimul este foarte puțin deformat.

8.36. $e_I = E_1 \sqrt{2} \sin \omega t + E_3 \sqrt{2} \sin 3\omega t$; $e_{II} = E_1 \sqrt{2} \sin (\omega t - 120^\circ) + E_3 \sqrt{2} \sin 3\omega t$; $\therefore e_I - e_{II} = e_{I-II} = E_1 \sqrt{2} \sqrt{3} \sin (\omega t + 30^\circ)$. Valoarea eficace a tensiunii pe fază este $\sqrt{E_1^2 + E_3^2}$, iar a tensiunii între faze $\sqrt{3} E_1$.

Raportul căutat este $\xi = \frac{\sqrt{3} E_1}{\sqrt{E_1^2 + E_3^2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1 + \left(\frac{E_3}{E_1}\right)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1 + \left(\frac{k}{100}\right)^2}}$.

Se găsește ușor :

k	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
ξ	1,732	1,723	1,698	1,659	1,608	1,549	1,485	1,420	1,351	1,287	1,227

8.37. Se pornește ca mai sus dela expresia tensiunii pe fază, care conține armonica 5. Se scrie apoi tensiunea între faze (aplicată wattmetrelor). Se determină puterea reală $3 U_1 I_1 \cos \varphi_1 + 3 U_5 I_5 \cos \varphi_5$ și puterea aparentă reală $3 \sqrt{(U_1^2 + U_5^2)(I_1^2 + I_5^2)}$, deducându-se factorul de putere real. Wattmetrul 1 indică $W_1 = \sqrt{3} U_1 I_1 \sin (\varphi_1 + 120^\circ) + \sqrt{3} U_5 I_5 \sin (\varphi_5 + 60^\circ)$, iar wattmetrul 2 indică $W_2 = \sqrt{3} U_1 I_1 \sin (\varphi_1 + 60^\circ) + \sqrt{3} U_5 I_5 \sin (\varphi_5 + 120^\circ)$. Factorul de putere se deduce din relația $\text{tg } \varphi = \sqrt{3} \frac{W_2 - W_1}{W_2 + W_1}$. Se găsește ușor

$\frac{\text{factor de putere indicat}}{\text{factor de putere real}} = \sqrt{\frac{(U_1^2 + U_5^2)(I_1^2 + I_5^2)}{U_1^2 I_1^2 + U_5^2 I_5^2 + 2U_1 I_1 U_5 I_5 \cos (\varphi_1 + \varphi_5)}}$

8.38. Procedând în același mod se găsește

$\frac{K \text{ indicat}}{K \text{ real}} = \sqrt{\frac{(U_1^2 + U_7^2)(I_1^2 + I_7^2)}{U_1^2 I_1^2 + U_7^2 I_7^2 + 2U_1 I_1 U_7 I_7 \cos (\varphi_1 - \varphi_7)}}$

Dacă toate elementele au aceeași mărime, eroarea este mai mare în cazul armonicei 5.

8.39. Alternatorul fiind legat în stea, tensiunea de borne nu conține armonica 3; expresia ei este :

$$e_{12} = 220 \sqrt{2} \sqrt{3} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{6} \right) + 20 \sqrt{2} \sqrt{3} \sin \left(5\omega t - \frac{\pi}{6} \right).$$

Impedanță aparentă este $Z' = U_{ef}/I_{ef} = 100,37 \Omega$, adică cu 0,37% mai mare decât impedanța circuitului. Reactanța aparentă este $X'_L = \sqrt{Z'^2 - R^2} = 60,61 \Omega$ sau cu 1,015% mai mare decât cea dată. Factorul de putere se determină din relația :

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{X'_L}{R} = 0,7576 \quad \dots \quad K = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi}} = 0,797.$$

Pe de altă parte $K = \cos \varphi \cdot \cos \xi$ și cum $\operatorname{tg} \varphi = \frac{X_L}{R} = 0,75$; $\therefore \cos \varphi = 0,8$ și deci $\cos \xi = 0,99625$. Din relațiile $\cos \varphi = P/(\sqrt{P^2 + Q^2})$ și $\operatorname{tg} \xi = D/(\sqrt{P^2 + Q^2})$ se deduce $D = P (\operatorname{tg} \xi / \cos \varphi) = 126 \text{ VAD}$, căci $P = RI_{ef}^2 = 1162,6 \text{ W}$. Din relația $\operatorname{tg} \varphi = Q/P$. $\therefore Q = 872 \text{ VAR}$. Spre verificare se calculează $S^2 = U_{ef}^2 I_{ef}^2 = P^2 + Q^2 + D^2$.

8.40. Curentul pe faza I este :

$$i_1 = 6 \sin \omega t + 2,36 \sin (3\omega t - 30^\circ) \text{ A.}$$

Curentul pe faza II se deduce din relația $e = L \frac{di}{dt}$ și se găsește :

$$i_2 = 56 \sin (\omega t + 150^\circ) + 0,78 \sin (3\omega t - 120^\circ) \text{ A.}$$

Curentul pe faza III se deduce din relația $u = \frac{1}{C} \int_0^t i dt$ și se găsește :

$$i_3 = 6 \sin (\omega t - 150^\circ) + 7,08 \sin (3\omega t + 60^\circ) \text{ A}$$

curentul în firul neutru este :

$$i_0 = i_1 + i_2 + i_3 = -0,73 \sin \omega t + 6,72 \sin (3\omega t + 39^\circ 40') \text{ A.}$$

8.41. a) Curba este bisimetrică impară. Termenul general se poate obține prin integrare sau prin metoda incidentelor geometrice. Se găsește ușor $y = -4(\gamma - 1) \frac{U}{T} t + U_1$, de unde :

$$U_k = \frac{4U}{k\pi} \left[1 + (\gamma - 1) \frac{\sin k \frac{\pi}{2}}{k \frac{\pi}{2}} \right].$$

b) Din $U_{ef} = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$ se găsește :

$$U_{ef} = \frac{U}{\sqrt{3}} \sqrt{\gamma^2 + \gamma + 1}$$

c) Rezidiul deformant este :

$$U_d = \sqrt{U_{ef}^2 - \frac{1}{2} U_1^2} = U \sqrt{\frac{1}{3} (\gamma^2 + \gamma + 1) - \frac{32}{\pi^4} \left(\gamma + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2}$$

8.42. a) Se calculează impedanțele corespunzătoare fundamentalei și armonice, și se calculează apoi amplitudinile și defazațiile cu relațiile (56). Se găsește :

$$i = 9,4 \sqrt{2} \sin(\omega t + 60^\circ) + 1,62 \sqrt{2} \sin(3\omega t + 30^\circ) \text{ A.}$$

b) Din $U_{ef} = 3467 \text{ V}$ și $I_{ef} = 9,54 \text{ A}$, se găsește $\delta_T = 10\%$ și $\delta_I = 17\%$.
Apoi $P = 16685 \text{ W}$; $Q = -27680 \text{ VAR}$; $D = U_{ef} I_d = 5640 \text{ VAD}$;
 $S = \sqrt{P^2 + Q^2 + D^2} = 32833 \text{ VA} \cong U_{ef} I_{ef}$.

$$c) K = \frac{P}{S} = 0,506 \text{ cap} \cong \cos \varphi \cdot \cos \xi = 0,50 \text{ cap.}$$

8.43. Se procedează ca mai sus și se găsește :

a) Curentul :

$$i = 16,6 \sqrt{2} \sin(\omega t - 30^\circ) + 0,94 \sqrt{2} \sin(3\omega t - 60^\circ) \text{ A}$$

b) $\delta_I = 5,65\%$; $P = 49762 \text{ W}$; $Q = 28980 \text{ VAR}$; $D = 3260 \text{ VAD}$;
 $S = 57678 \text{ VA}$;

$$c) K = \frac{P}{S} = 0,862 \text{ ind} = \cos \varphi \cdot \cos \xi.$$

8.44. Pentru circuitul (a) se găsește : $I = 3,57 \text{ A}$; $P = 256 \text{ W}$; $K = 0,69$.
Pentru circuitul (b) : $I = 4,5 \text{ A}$; $P = 404 \text{ W}$; $K = 0,86$.

8.45. Din relația (37) se deduce $U_1 = 200 \text{ V}$, de unde rezultă $U_3 = 80 \text{ V}$, $U_5 = 40 \text{ V}$, $U_7 = 10 \text{ V}$. Cu prima relație (56) se calculează $I_1 = 21,58 \text{ A}$, $I_3 = 4,88 \text{ A}$, $I_5 = 1,63 \text{ A}$, $I_7 = 0,294 \text{ A}$, de unde $I_{ef} = 22,5 \text{ A}$. Rezultă $S = 4950 \text{ VA}$ și $P = R \sum I_k^2 = 4049,36 \text{ W}$ și deci $K = 0,815$.

8.46. Expresia curentului din circuit este

$$i = \frac{100}{\sqrt{4 + (X_L - 9)^2}} \sin \left[\omega t - \arctg \frac{X_L - 9}{2} \right] + \frac{40}{\sqrt{4 + (3X_L - 3)^2}} \sin \left[3\omega t - \arctg \frac{3X_L - 3}{2} \right]$$

cu valoarea eficace

$$I = 10 \sqrt{2} \sqrt{\frac{25}{4 + (X_L - 9)^2} + \frac{4}{4 + (3X_L - 3)^2}}$$

Factorul de putere al circuitului este

$$K = \frac{R(I_1^2 + I_3^2)}{\sqrt{(U_1^2 + U_3^2)(I_1^2 + I_3^2)}} = R \sqrt{\frac{I_1^2 + I_3^2}{U_1^2 + U_3^2}}$$

Pentru diverse valori ale lui X se obțin rezultatele din tabloul de mai jos :

X_L	0	1	3	9	∞
I_1	7,68	8,58	11,18	35,36	0
I_2	5,64	14,14	4,47	1,18	0
φ_1	$-77^\circ 20'$	$-75^\circ 55'$	$-71^\circ 35'$	0	—
φ_2	$-56^\circ 20'$	0	$71^\circ 35'$	$85^\circ 15'$	—
I	9,53	16,54	12,04	35,37	0
K	0,125	0,217	0,158	0,464	—

Curentul și factorul de putere au două maxime corespunzătoare respectiv rezonanței fundamentale și armonice 3.

8.47. Din prima măsurătoare $U/L\omega = I \therefore L\omega = 10$.
In cazul când există armonica 3 se pot scrie ecuațiile

$$U_1^2 + U_2^2 = 100^2 \text{ și } \left(\frac{U_1}{L\omega}\right)^2 + \left(\frac{U_2}{3L\omega}\right)^2 = 8^2. \text{ Se obține } \beta = \frac{U_2}{U_1} = 0.83.$$

8.48. Se aplică metoda suprapunerii efectelor. Se găsește $i = 2,5 + 0,849 \sqrt{2} \sin(\omega t - 31^\circ 30')$ A și $i = 0,232 \sqrt{2} \sin(\omega t - 166^\circ 30')$ A.

8.49. $I_1 = 4,26$ A și $I_2 = 1,18$ A.

8.50. Ecuația circuitului este $e = ri$ sau $E \sqrt{2} \sin \omega t = \frac{R}{\sqrt{i}} \cdot i = R \sqrt{i}$.

Se găsește $i = \frac{E^2}{R^2} \left[1 + \sin(2x - 90^\circ) \right]$. Valoarea eficață este $\frac{E^2}{R^2} \sqrt{2}$.

8.51. Sistemul fiind cu neutrul izolat, armonica 3, care este homopolară, nu va da curent. Sistemul nu absoarbe deci putere deformantă. Deasemenea sistemul nu va absorbi nici putere activă sau reactivă datorită armonice 3. Armonica 3 nu are ca efect decât să producă o oscilație a punctului neutru. (a) Deplasarea punctului neutru: Pentru armonica fundamentală $\bar{U}_{01} = 603 \angle 120^\circ$ V; pentru armonica trei $\bar{U}_{03} = 53,6 \angle 0$ V. Potențialul punctului neutru este $U_0 = 850 \sin(\omega t + 120^\circ) + 93 \sin 3\omega t$ V.

(b) Curenții pe fază sunt dați numai de armonica fundamentală: $\bar{I}_A = 61 \angle 45^\circ = 43 + j 43$ A; $\bar{I}_B = 61 \angle 249^\circ 30' = -59 - j 15,7$ A; $\bar{I}_C = 31,6 \angle 300^\circ 30' = 16 - j 27,3$ A.

$$(c) \bar{S}_A = -j 3 (2 + \sqrt{3}) \frac{E^2}{R} = -j 45130 \text{ VA}; \bar{S}_B = j 3 (2 + \sqrt{3})$$

$\frac{E^2}{R} = j 45130 \text{ VA}; \bar{S}_O = 3 \frac{E^2}{R} = 4033 \text{ VA}. \bar{S} = \bar{S}_O$. Sistemul nu absoarbe decât putere reală.

PARTEA III

9. 9.1. Luăm ca scară 5 mm = 1 V. Diagrama topografică a tensiunilor se construiește ușor :

Se găsește $\overline{OA} = 5,4$ V; $\overline{OB} = 8,6$ V; $\overline{OC} = 6,8$ V; $\overline{AB} = 13,4$ V; $\overline{BC} = 13,2$ V; $\overline{CA} = 9,2$ V; $\overline{GA} = 6,2$ V; $\overline{GB} = 8,4$ V; $\overline{GC} = 6,0$ V; $\overline{OG} = 1,1$ V.

9.2. Cum $\bar{Y}_A = \bar{Y}_B = \frac{1}{\bar{Z}_A}$,

$$\bar{Y}_C = \frac{1}{2\bar{Z}_A} = \frac{1}{2}\bar{Y}_A \text{ și } \bar{U}_A + \bar{U}_B = -\bar{U}_C.$$

se deduce $U_0 = -\frac{1}{5}U_C$. Cu aceste

elemente diagrama topografică se construiește ușor.

9.3. Punând $Y_A = Y_B = \frac{1}{R}$ și

$$Y_C = \frac{1}{\alpha R}, \text{ cum } \bar{U}_A + \bar{U}_B = -\bar{U}_C, \text{ se gă-}$$

sește $\bar{U}_0 = \frac{-\alpha + 1}{2\alpha + 1} \bar{U}_C$. Pentru $\alpha = 0 \dots \bar{U}_0 = \bar{U}_C$, punctul neutru se găsește

în vârful C al triunghiului tensiunilor. Pentru $\alpha = \infty \dots \bar{U}_0 = -\frac{1}{2}\bar{U}_C$, adică pe

latura AB a triunghiului tensiunilor. Rezultă deci că în acest caz punctul neutru rămâne în permanență în interiorul triunghiului tensiunilor. Pentru $\alpha = 1$, punctul neutru coincide cu punctul de concurență al tensiunilor; pentru $\alpha = 2$, suntem în cazul problemei precedente.

9.4. Avem $\bar{Y}_A = \frac{-j}{L\omega}$, $\bar{Y}_B = jC\omega$, $\bar{Y}_C = \frac{1}{\alpha R}$.

Se găsește

$$\bar{U}_0 = \frac{-j\alpha R\bar{U}_A + j\alpha RLC\omega^2 \bar{U}_B + L\omega\bar{U}_C}{-j\alpha R + j\alpha RLC\omega^2 + L\omega} = \frac{aL\omega + j\alpha R(1 + a^2LC\omega^2)}{L\omega + j\alpha R(-1 + LC\omega^2)} \bar{U}_A$$

($a = 1/\sqrt{120^\circ}$). Punctul neutru se deplasează deci pe un cerc ce trece prin C,

pentru $\alpha = 0$, și prin punctul $\bar{U}_0 = \frac{-U_A + LC\omega^2 \bar{U}_B}{-1 + LC\omega^2} = \frac{-1 + a^2LC\omega^2}{-1 + LC\omega^2} \bar{U}_A$,

pentru $\alpha = \infty$. Centrul și raza cercului se determină scriind ecuația sub forma *) $\bar{U}_0 = \bar{F} + \bar{R} \angle \varphi$. În cazul rezonanței punctul neutru se deplasează pe

dreapta $\bar{U}_0 = \frac{aL\omega + j\alpha R(-1 + a^2)}{L\omega} \bar{U}_A$, care coincide cu vectorul tensiunii U_0 .

Problemele 9.2, 9.3 și 9.4 se rezolvă ușor și grafic.

*) Vezi I. S. Antoniu, Chestiuni speciale de electrotehnică, București 1952, pag. 55.

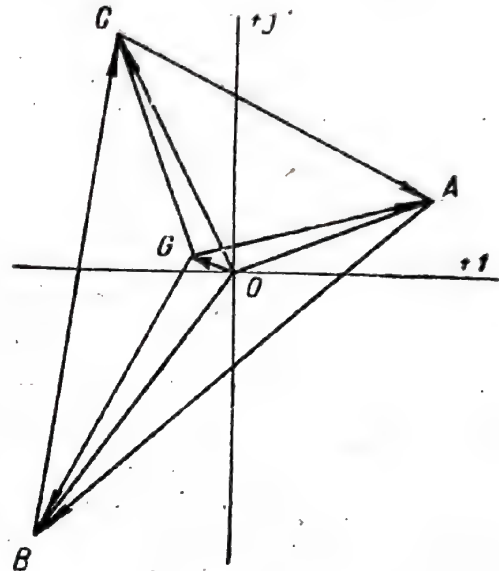


Fig. 9.1.

9.5. Se determină $\bar{E}_0 = E \frac{\alpha + \sqrt{3}}{\alpha}$; $\bar{I}_1 = (\bar{E}_1 - \bar{E}_0) Y_1 \dots \bar{I}_1 = -\frac{E\sqrt{3}}{R}$;

$$\bar{I}_2 = \frac{E}{R \cdot 2\alpha} [\sqrt{3}\alpha - j(3\alpha + 2\sqrt{3})]; \bar{I}_3 = \frac{E}{R \cdot 2\alpha} [\sqrt{3}\alpha + j(3\alpha + 2\sqrt{3})].$$

9.6. Avem $\bar{Y}_A = 0,1 \text{ S}$, $\bar{Y}_B = 0,25 \text{ S}$, $\bar{Y}_C = 0,04 \text{ S}$, $\bar{Y}_0 = 0,12 - j0,16 \text{ S}$; luând $\bar{E}_A = 120 \angle 0^\circ \text{ V}$, avem $\bar{E}_B = 120 \angle -120^\circ = -60 - j60\sqrt{3} \text{ V}$ și $\bar{E}_C = 120 \angle 120^\circ = 60 + j60\sqrt{3} \text{ V}$. Se găsește ușor $\bar{U}_0 = \frac{\Sigma \bar{E}_A \bar{Y}_A}{\bar{Y}_0 + \Sigma \bar{Y}_A} = 2,6 - j42 \text{ V}$.

Apoi tensiunile pe faze $\bar{U}_A = \bar{E}_A - \bar{U}_0 = 117,4 + j42 = 122 \angle 19^\circ 40' \text{ V}$; $\bar{U}_B = -62,6 - j62 = 84,4 \angle 225^\circ 15' \text{ V}$; $\bar{U}_C = -62,6 + j146,2 = 159 \angle 156^\circ 50' \text{ V}$; curenții se obțin din $\bar{I}_A = (\bar{E}_A - \bar{U}_0) \bar{Y}_A = \bar{U}_A \bar{Y}_A = 11,7 + j4,2 = 12,2 \angle 19^\circ 40' \text{ A}$; $\bar{I}_B = -15,8 - j15,5 = 22,1 \angle 225^\circ 15' \text{ A}$; $\bar{I}_C = -2,5 + j5,8 = 6,2 \angle 156^\circ 50' \text{ A}$; $\bar{I}_0 = -\bar{U}_0 \bar{Y}_0 = 6,4 + j5,5 = 8,45 \angle 40^\circ 57' \text{ A}$.

9.7. $\bar{U}_0 = -34,3 - j29,6 \text{ V}$; apoi $\bar{U}_A = 154,3 + j29,6 = 160 \angle 10^\circ 50' \text{ V}$; $\bar{U}_B = -25,7 - j74,6 = 78,7 \angle 251^\circ 02' \text{ V}$; $\bar{U}_C = -25,7 + j133,6 = 136 \angle 100^\circ 53' \text{ V}$ de unde $\bar{I}_A = \bar{U}_A \bar{Y}_A = 4 \angle 10^\circ 50' \text{ A}$; $\bar{I}_B = 7,87 \angle 251^\circ 02' \text{ A}$; $\bar{I}_C = 6,8 \angle 100^\circ 53' \text{ A}$.

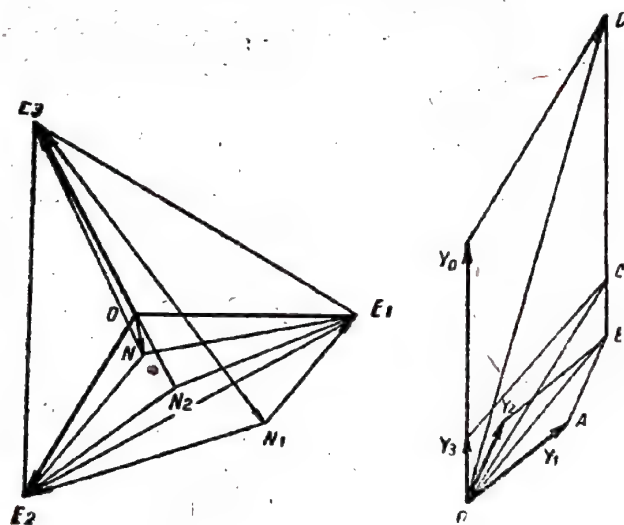


Fig. 9.8.

9.8. Analitic. $\bar{U}_0 = 0,715 - j22,6 \text{ V}$; $\bar{U}_A = \bar{E}_A - \bar{U}_0 = 99,285 + j22,6 \text{ V}$; $\bar{U}_B = -50,715 - j64 \text{ V}$; $\bar{U}_C = -50,715 + j109,2 \text{ V}$. Grafic: vezi figura 9.8, care s'a construit cu scările $1 \text{ S} = 5 \text{ cm}$; $100 \text{ V} = 2 \text{ cm}$.

9.9. Se găsesc exact aceleași rezultate ca în cazul problemei precedente.

9.10. Se găsește $\bar{U}_0 = 22,4 + j65,5 \text{ V}$; $\bar{U}_1 = \bar{E}_1 - \bar{U}_0 = 97,6 - j65,5 \text{ V}$; $\bar{U}_2 = -37,6 - j169,5 \text{ V}$; $\bar{U}_3 = -37,6 + j38,5 \text{ V}$; $\bar{I}_1 = \bar{U}_1 \bar{Y}_1 = 2,07 - j4,22 \text{ A}$; $\bar{I}_2 = 4,66 - j7,25 \text{ A}$; $\bar{I}_3 = -0,94 + j0,96 \text{ A}$.

9.11. Se transfigurează triunghiul 102 într-o stea, obținându-se $\bar{Z}_{N1} = \bar{Z}_{N2} = 89,13 - j5,26 \Omega$ și $\bar{Z}_{N0} = 5,26 + j89,13 \Omega$; astfel că a treia impedanță

este $\bar{Z}_{0N} + \bar{Z}_{NO} = 105,26 + j 262,13 \Omega$. În cazul încărcării simetrice, tensiunile pe fază sunt, luând ca origină de fază tensiunea $\bar{U}_1 = \bar{U}_{23} = 380 \angle 0^\circ$; $\bar{V}_1 = j 220 \text{ V}$; $\bar{V}_2 = 220 \angle -30^\circ \text{ V}$; $\bar{V}_3 = 220 \angle -150^\circ$.

Deplasarea punctului neutru al sarcinii desechilibrate este $\bar{V}_0 = -191,6 - j 90,9 \text{ V}$. Rezultă $\bar{V}'_1 = \bar{V}_1 - \bar{V}_0 = 191,6 + j 310,9 \text{ V}$; $\bar{V}'_2 = 381,6 - j 19,1 \text{ V}$; $\bar{V}'_3 = 1,6 - j 19,1 \text{ V}$. Curenții pe fiecare fază, deci curenții din linie sunt $\bar{I}_1 = \bar{Y}_1 \bar{V}'_1 = 1,936 + j 3,606 \text{ A}$; $\bar{I}_2 = 4,386 + j 0,138 \text{ A}$; $\bar{I}_3 = -6,322 - j 3,744 \text{ A}$. Curenții în impedanțele reale sunt $\bar{I}_{10} = 3,586 + j 2,756 \text{ A}$; $\bar{I}_{20} = 2736 + j 1,038 \text{ A}$; $\bar{I}_{30} = \bar{I}_3$; $\bar{I}_{12} = -1,65 + j 0,85 \text{ A}$. Acești curenții se obțin scriind că între aceleași două puncte în triunghi și în stea căderile de tensiune sunt aceleași.

9.12. Se observă că $\bar{Z}_A = 5(1 - j 1,73) = 10 \angle -60^\circ \Omega$; $\bar{Z}_B = 5(1,73 + j 1) = 10 \angle 30^\circ \Omega$; $\bar{Z}_C = 20 \angle -90^\circ \Omega$. Se găsește ușor $\bar{U}_0 = -58,5 + j 72,5 \text{ V}$. Curenții $\bar{I}_A = 14,18 + j 13,7 \text{ A}$; $\bar{I}_B = -7,22 - j 17,95 \text{ A}$; $\bar{I}_C = -7 + j 4,25 \text{ A}$.

9.13. Cele trei tensiuni formează un triunghi, luându-se ca origine de fază tensiunea \bar{U}_{AB} care se găsește ușor prin determinarea unghiurilor pe care le fac tensiunile \bar{U}_{BC} și \bar{U}_{CA} cu \bar{U}_{AB} . Se găsește $\bar{U}_{BC} = 120 \angle -135^\circ 30' = -85,6 - j 84 \text{ V}$; $\bar{U}_{CA} = 100 \angle 123^\circ = -54,3 + j 83,8 \text{ V}$. Sarcinile fiind egale, rezultă că tensiunile pe fază sunt concurente în centrul de greutate al triunghiului

ABC . Vom avea deci: $\bar{U}_A = \frac{\bar{U}_{AB} - \bar{U}_{CA}}{3} = 64,8 - j 27,9 = 70,8 \angle -23^\circ 15' \text{ V}$;

$\bar{U}_B = -75,2 - j 28 = 80,3 \angle 200^\circ 25' \text{ V}$; $\bar{U}_C = 10,4 + j 55,9 = 56,4 \angle 79^\circ 20' \text{ V}$.

Curenții vor fi $\bar{I}_A = \bar{U}_A : R = 7,08 \angle -23^\circ 15' \text{ A}$, etc., adică în fază cu tensiunile.

9.14. Rezistențele celor trei faze sunt $R_1 = 4 \Omega$, $R_2 = 5 \Omega$, $R_3 = 10 \Omega$.

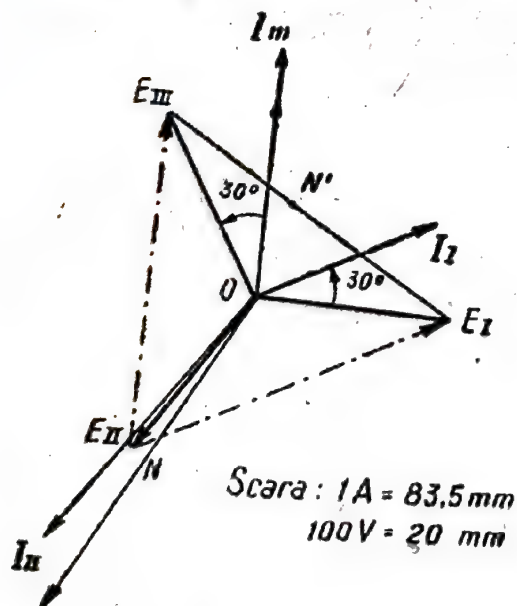


Fig. 9.15

Tensiunile date $\bar{E}_1 = 127 \angle 0^\circ \text{ V}$; $\bar{E}_2 = 127 \angle -120^\circ \text{ V}$; $\bar{E}_3 = 127 \angle 120^\circ \text{ V}$.

a) se găsește $\bar{U}_0 = 23,1 - j 20,0 \text{ V}$;

$\bar{U}'_1 = 103,9 + j 20 = 105,8 \angle 10^\circ 58' \text{ V}$;

$\bar{U}'_2 = -86,6 - j 90 = 124,9 \angle 226^\circ \text{ V}$;

$\bar{U}'_3 = -86,6 + j 130 = 156,2 \angle 123^\circ 47' \text{ V}$.

b) $\bar{U}''_0 = 12,1 - j 10,5 \text{ V}$; $\bar{U}''_1 = 114,9 +$

$+ j 10,5 = 115,4 \angle 42^\circ 23' \text{ V}$; $\bar{U}''_2 =$

$-75,6 - j 99,5 = 125 \angle 232^\circ 44' \text{ V}$;

$\bar{U}''_3 = -75,6 + j 120,5 = 142,3 \angle 122^\circ 10' \text{ V}$

9.15. Rezistențele corespunzătoare

celor două lămpi sunt $R_1 = \frac{(U \sqrt{3})^2}{P} =$

$= \frac{208^2}{60} = 721 \Omega$, $R_3 = \frac{208^2}{75} = 577 \Omega$.

Putem considera aceste rezistențe ca făcând parte dintr'un sistem de sarcini trifazat în stea, la care sarcina pe faza II este nulă. Presupunând faza II între-

ruptă, avem $\frac{\bar{E}_{III} \bar{E}_{N'}}{\bar{E}_I \bar{E}_{N'}} = \frac{\bar{Y}_1}{\bar{Y}_2} = \frac{R_3}{R_1} = \frac{577}{721} = 0.8$. Punctul neutru N' se va găsi pe dreapta $E_I E_{III}$. Împărțind-o pe aceasta în raportul 0,8 dela E_{III} către E_I . Dacă trecem la cazul real, faza II întreagă, avem $\frac{\bar{E}_{II} \bar{E}_N}{\bar{E}_{II} \bar{E}_{N'}} = \frac{\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2}{\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + \bar{Y}_3} =$
 $= 0$, rezultă punctul neutru în E_{II} . Vom avea deci $\bar{I}_1 = \frac{120 \sqrt{3}}{721} = 0.288 \text{ A}$

decalat cu 30° înaintea tensiunii E_I ; $I_3 = \frac{120 \sqrt{3}}{577} = 0.360 \text{ A}$ decalat cu 30° în urma tensiunii E_{III} . Curentul pe faza II este rezultanta acestora, $I_2 = 0.504 \text{ A}$ decalat cu 6° înaintea tensiunii E_{II} .

$$9.16. \bar{Y}_1 = \bar{Y}_3 = 0,1 \text{ S}, \bar{Y}_2 = \infty \dots \bar{F}_0 = \frac{\Sigma \bar{E}_i \bar{Y}_i}{\Sigma \bar{Y}_i} = \bar{E}_2 = 100 \angle -120^\circ.$$

$$\bar{I}_1 = (\bar{E}_1 - \bar{E}_0) \bar{Y}_1 = \frac{E}{R} \sqrt{3} \angle 30^\circ = 17,3 \angle 30^\circ \text{ A}; \bar{I}_3 = \frac{E}{R} \sqrt{3} \angle 90^\circ = 17,3 \angle 90^\circ;$$

$$\bar{I}_2 = -\bar{I}_1 - \bar{I}_3 = \frac{3E}{R} \angle -120^\circ = 30 \angle -120^\circ \text{ A}.$$

Rezultă că I_1 este *capacitiv*, I_3 *inductiv*, I_2 în fază. Pentru compensarea sistemului, se va monta în paralel cu sarcina între fazele 1 și 2 o *inductanță*, iar în paralel cu sarcina între fazele 2 și 3 o *capacitate*. Mărimea acestora se calculează din relațiile $\tan 30^\circ = \frac{L\omega}{R} \dots L\omega = \frac{R}{\sqrt{3}} = 5,76 \Omega$ și $\tan 30^\circ = \frac{1}{C\omega R}$.

În acest caz curenții vor fi în fază cu tensiunile, simetrice și echilibrați.

9.17. $\bar{Y}_1 = \bar{Y}_3 = 0,08 - j 0,06 = 0,1 \angle -36^\circ 52' \text{ S}$; $\bar{I}_1 = 17,3 \angle -6^\circ 52' \text{ A}$; $\bar{I}_3 = 17,3 \angle 53^\circ 08' \text{ A}$; $\bar{I}_2 = 30 \angle 203^\circ 04' \text{ A}$. De data aceasta ambii curenți sunt inductivi. Compensarea se face cu ajutorul unor impedanțe capacitive pentru a fi aduși în fază cu tensiunile.

9.18. $\bar{Y}_1 = 0,08 - j 0,06 = 0,1 \angle -36^\circ 52' \text{ S}$, $\bar{Y}_3 = 0,06 - j 0,08 = 0,1 \angle -53^\circ 08' \text{ S}$; $\bar{I}_1 = 17,3 \angle -6^\circ 52' \text{ A}$; $\bar{I}_3 = 17,3 \angle 36^\circ 52' \text{ A}$; $\bar{I}_2 = 30 \angle 195^\circ \text{ A}$.

9.19. $\bar{U}_0 = \frac{E}{\sqrt{3}} \cdot \frac{j C \omega R - 1}{j C \omega R + 2}$. Scriem că $\bar{U}_3 = 0$ adică $\bar{E}_3 - \bar{U}_0 = 0$.

Identificând părțile reale și părțile complexe, găsim $C\omega R = 0$, și $C\omega R = \frac{2}{\sqrt{3}}$; aceste relații trebuind să fie satisfăcute simultan, problema nu este posibilă în condițiile enunțului. Se obține doar o tensiune mai redusă pe o fază. Grafic aceasta se vede imediat.

9.20. Analitic: $\bar{U}_0 = -65,5 - j 5,5 \text{ V}$; $\bar{U}_1 = \bar{E}_1 - \bar{U}_0 = \frac{127}{\sqrt{3}} + 65,5 + j 5,5 = 139,0 + j 5,5 \text{ V} \dots |U_1| = 139 \text{ V}$; $\bar{U}_2 = \bar{E}_2 - \bar{U}_0 = \frac{127}{\sqrt{3}} \angle -120^\circ - \bar{U}_0 = 28,8 - j 58,0 \text{ V}$; $\dots |U_2| = 64,7 \text{ V}$. Se va aprinde lampa de pe faza I (dreapta). Grafic: Avem $\frac{1}{R} = 8 \cdot 10^{-4} \text{ S}$ și $C\omega = 15 \cdot 10^{-4} \text{ S}$. Luăm $10^{-4} \text{ S} =$

$= 3 \text{ mm}$ și $5/\sqrt{3} \text{ V} = 1 \text{ mm}$. $\frac{\overline{E_2 N}}{\overline{E_1 N'}} = \frac{\overline{Y_1}}{\overline{Y_2}} = 1$, rezultă N' la mijloc între E_1 și E_2 ; apoi $\frac{\overline{E_3 N}}{\overline{E_3 N'}} = \frac{\overline{Y_1} + \overline{Y_2}}{\overline{Y_1} + \overline{Y_2} + \overline{Y_3}}$. Rezultă și din diagramă că se va aprinde lampa de pe faza 1, care are tensiunea cea mai mare.

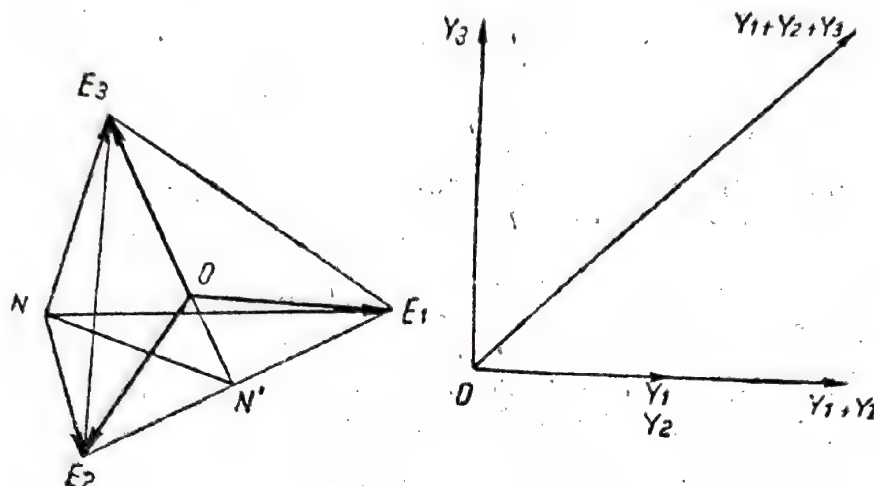


Fig. 9.20

9.21. $\overline{U}_0 = -28,5 + j 7,7 \text{ V}$; $\overline{U}_1 = 67,0 - j 7,7 \text{ V}$ $\therefore |U_1| = 67,4 \text{ V}$; $\overline{U}_2 = 9,5 + j 20,8 \text{ V}$ $\therefore |U_2| = 23 \text{ V}$. Se va aprinde tot lampa de pe faza I. Rezolvarea grafică analoagă cu precedenta.

9.22. $\overline{Y}_1 = \overline{Y}_2 = j C \omega$; $\overline{Y}_3 = j C \omega + g$, în care $g = 1/R$. Cum $\overline{U}_1 + \overline{U}_2 + \overline{U}_3 = 0$ $\therefore \overline{U}_0' = \frac{g}{g + j 3 \omega C} \overline{U}_3$; $\overline{U}_3' = \overline{U}_3 - \overline{U}_0' = \frac{j 3 \omega C}{g + j 3 \omega C} \cdot \overline{U}_3$

iar curentul care se scurge prin R este $\overline{U}_3' g$. Pentru a se anula acest curent se leagă pe nulul alimentării (transformator, alternator) o inductanță, numită *bobină de stingere*. Aceasta echivalează cu un fir neutru între nulul alimentării și nulul sarcinii de admitanță $\overline{Y}_0 = -\frac{j}{L \omega}$.

Vom avea acum

$$\overline{U}_0'' = \frac{g}{g + j \left(3 \omega C - \frac{1}{L \omega} \right)} \overline{U}_3; \quad \overline{U}_3'' = \frac{j \left(3 \omega C - \frac{1}{L \omega} \right)}{g + j \left(3 \omega C - \frac{1}{L \omega} \right)} \overline{U}_3$$

și curentul $\overline{I}_g = \overline{U}_3'' g$. Pentru ca $\overline{I}_g = 0$ trebuie ca $3 \omega C - \frac{1}{L \omega} = 0$ de unde

$L = \frac{1}{3 \omega^2 C}$. În cazul aplicației se găsește: $\overline{U}_0' = 3,64 + j 4,1 \text{ kV}$; $\overline{U}_1' = 13,66 - j 4,1 \text{ kV}$ $\therefore |\overline{U}_1'| = 14,3 \text{ kV}$; $\overline{U}_2' = -12,3 - j 19,1 \text{ kV}$; $|\overline{U}_2'| = 22,7 \text{ kV}$; $\overline{U}_3' = -12,3 + j 10,9 \text{ kV}$ $\therefore |\overline{U}_3'| = 16,4 \text{ kV}$; $\overline{I}_g = -12,3 + j 10,9 \text{ A}$ $L = 1,06 \text{ H}$.

9.23. $\bar{U}_{AB} = 220 \angle 0^\circ \text{ V}$; $\bar{U}_{BO} = 220 \angle -120^\circ = -110 - j190 \text{ V}$; $\bar{U}_{OA} = 220 \angle 120^\circ = -110 + j190 \text{ V}$; $\bar{I}_{AB} = \frac{\bar{U}_{AB}}{\bar{Z}_{AB}} = 6,6 - j8,8 = 11 \angle -53^\circ 04' \text{ A}$; $\bar{I}_{BO} = -9,17 - j15,8 = 18,3 \angle 240^\circ \text{ A}$; $\bar{I}_{OA} = 2,6 + j21,8 = 22 \angle 83^\circ 13' \text{ A}$.

9.24. Se transfigurează triunghiul în stea. Se găsește $Z'_A = Z'_B = 4\Omega$; $Z'_C = 8\Omega$. Rezultă $Z_A = Z'_A + Z''_A = 4 + 1 = 5\Omega \dots Y_A = 0,2 \text{ S}$; $Z_B = 5\Omega \dots Y_B = 0,2 \text{ Sm}$; $Z_C = 9\Omega \dots Y_C = 0,111 \text{ S}$. Apoi $U_A = 120 \text{ V}$; $\bar{U}_B = -60 - j104 \text{ V}$; $\bar{U}_C = -60 + j104 \text{ V}$; Se găsește $\bar{U}_0 = 10,4 - j18 \text{ V}$. Apoi $\bar{I}_A = (\bar{U}_A - \bar{U}_0) Y_A = 21,9 + j3,6 \text{ A}$; $\bar{I}_B = -14,1 - j17,2 \text{ A}$; $\bar{I}_C = 7,8 + j13,6 \text{ A}$. Calculăm căderea de tensiune pe fiecare impedanță a sarcinii (fără linie). Se găsește: $\bar{U}'_A = \bar{Z}'_A \bar{I}_A = 87,5 + j14,4 \text{ V}$; $\bar{U}'_B = -56,4 - j68,8 \text{ V}$; $\bar{U}'_C = -62,4 + j107,8 \text{ V}$. Tensiunea între faze la bornele sarcinii este $\bar{U}_{AB} = \bar{U}'_A - \bar{U}'_B = 143,9 + j83,2 \text{ V}$; $\bar{U}_{BC} = 6 - j176,6 \text{ V}$; $\bar{U}_{CA} = -149,9 + j93,4 \text{ V}$; de aci, curenții în impedanțele reale: $\bar{I}_{AB} = \frac{\bar{U}_{AB}}{\bar{Z}_{AB}} = 14,4 + j8,32 \text{ A}$; $\bar{I}_{BC} = 0,3 - j8,83 \text{ A}$; $\bar{I}_{CA} = -7,5 + j4,67 \text{ A}$. Dacă cele trei impedanțe sunt egale sistemul este simetric, $\bar{U}_0 = 0$ și calculul nu prezintă nicio dificultate.

9.25. Se transfigurează circuitul găsindu-se $\bar{Z}_{10} = jR$, $\bar{Z}_{20} = -jR$, $\bar{Z}_{30} = \alpha R$. Se studiază deplasarea punctului neutru în funcție de α . Se găsește ușor $\bar{V}_0 = (1 - \alpha\sqrt{3}) \bar{V}_3$, luându-se ca origine de fază vectorul $\bar{V}_3 \left(|V| = \frac{|U|}{\sqrt{3}} \right)$,

ceea ce înseamnă că punctul neutru se deplasează dealungul vectorului \bar{V}_3 . Pentru diverse valori pozitive ale lui α , \bar{V}_0 variază de la \bar{V}_3 la $-\infty$. Curenții pe cele trei linii sunt

$$\bar{I}_1 = \left(-\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3} - 2\alpha}{2} \right) \frac{U}{R}; \quad \bar{I}_2 = \left(-\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3} - 2\alpha}{2} \right) \frac{U}{R};$$

$$\bar{I}_3 = \frac{U}{R}. \text{ În cazul particular } \bar{V}_0 = -5 \bar{V}_3; \bar{I}_1 = 100 \angle -100^\circ 52' \text{ A}; \bar{I}_2 = 100 \angle 100^\circ 52' \text{ A}; \bar{I}_3 = 38 \text{ A}.$$

9.26. Se transfigurează circuitul în funcționarea simetrică găsindu-se expresia curenților (modul). Se procedează la fel în funcționarea disimetrică. Se determină deplasarea punctului neutru, care este $\bar{E}_0 = \bar{E}_C$, dacă impedanța întreruptă este \bar{Z}_{AB} . Se determină tensiunile pe fază și curenții. Se găsește $|\bar{I}'_A| = |\bar{I}'_B| = 5,78 \text{ A}$ și $|\bar{I}'_C| = 10 \text{ A}$.

9.27. Curentul din ampermetru se determină cu ajutorul teoremei lui Thévenin:

$$\bar{I}_A = \frac{\bar{E}_{NA} - \bar{E}_{NB}}{\bar{Z}_A + \bar{Z}_{AB}}$$

În care \bar{E}_{NA} și \bar{E}_{NB} sunt tensiunile punctelor neutre ale celor două sarcini și care se calculează cu ajutorul relației deplasării punctului neutru, iar \bar{Z}_{AB} este impedanța rețelei privită din punctele A și B și este :

$$\bar{Z}_{AB} = \frac{1}{\Sigma \bar{Y}_{IA}} + \frac{1}{\Sigma \bar{Y}_{IB}}$$

În cazul numeric se găsește $\bar{I} = 21,95 - j 12,71 \text{ A} = 27,37 \angle -30^{\circ}04' \text{ A}$.

Problema se rezolvă ușor și direct ajungându-se la aceeași relație ca mai sus.

9.28. Problema se rezolvă imediat pe cale grafică. În acest caz este necesar să se construiască exact triunghiul tensiunilor astfel ca sistemul să fie direct. Aceasta se obține dacă, numerotându-se vârfurile triunghiului, cifrele se succed în sensul mersului acelor ceasornicului și în fața fiecărei cifre se așează vectorul respectiv. De exemplu : în fața cifrei 1, se găsește vectorul U_1 . Analitic, se scriu tensiunile care trec prin centrul de greutate și în raport cu acesta se determină deplasarea punctului neutru cu care se determină apoi curenții căutați. Se găsește $\bar{V}_0 = -34,4 - j 25,0 \text{ V}$; $\bar{I}_1 = 667,5 \angle 61^{\circ} \text{ A}$; $\bar{I}_2 = 863,5 \angle 17^{\circ}10' \text{ A}$; $\bar{I}_3 = 1444 \angle 217^{\circ}30' \text{ A}$.

9.29. Puterea aparentă este dată de relația $\bar{S} = \bar{U}_A \bar{I}_A^* + \bar{U}_B \bar{I}_B^* + \bar{U}_C \bar{I}_C^*$, în care $\bar{U}_A = \bar{E}_A - \bar{E}_0$, etc. \bar{E}_0 fiind deplasarea punctului neutru al sarcinii. Se găsește $\bar{E}_0 = \bar{E}_C$. Rezultă $\bar{U}_A = \bar{E}_A - \bar{E}_C$, $\bar{U}_B = \bar{E}_B - \bar{E}_C$, $\bar{U}_C = 0$. Prin transfigurare $\bar{Z}_A = j X_L$, $\bar{Z}_B = -j X_C$, $\bar{Z}_C = 0$. Apoi $\bar{I}_A = -j \frac{\bar{U}_A}{X_L}$, $\bar{I}_B = j \frac{\bar{U}_B}{X_C} I_C = j \left(\frac{\bar{U}_A}{X_L} - \frac{\bar{U}_B}{X_C} \right)$. Rezultă $\bar{S} = 0$, $P = 0$, $Q = 0^*$

9.30. Problema este analoagă cu precedenta. (a) $\bar{I}_A = -j 11 \text{ A}$, $\bar{I}_B = 11 \sqrt{3} \text{ A}$; $\bar{I}_C = -11 \sqrt{3} + j 11 \text{ A}$. (b) Wattmetrul măsoară puterea reală. Deci indicațiile sale vor fi $P = \Re (\bar{U}_{CA} \cdot \bar{I}_B^*) = -1210 \sqrt{3} = -2100 \text{ W}$. Semnul (-) arată că, așa cum este montat wattmetrul va bate invers. Trebuie schimbate conexiunile la bornele de tensiune. (c) $W_1 = \Re (\bar{U}_{AC} \cdot \bar{I}_B^*) = 1210 \sqrt{3} = 2100 \text{ W}$. $W_2 = \Re (\bar{U}_{BC} \cdot \bar{I}_A^*) = -1210 \sqrt{3} = -2100 \text{ W}$. Puterea reală totală absorbită de circuit este $P = W_1 + W_2 = 0$, rezultat analog cu acel din problema 9.29.

9.31. Circuitul dat este echivalent cu un circuit în stea la care impedanța pe faza A este nulă și impedanțele pe celelalte două faze sunt $\bar{Z}_B = \bar{Z}_{AN} + \bar{Z}_{NB} = 8,66 + j 5,00 = 10 \angle 30^{\circ}$ și $\bar{Z}_C = \bar{Z}_{AM} + \bar{Z}_{MC} = 8,66 - j 5,00 = 10 \angle -30^{\circ}$. Luând ca origină de fază tensiunea \bar{U}_{AB} , se deduc tensiunile corespunzătoare pe fiecare fază [relațiile (66)] și se calculează deplasarea punctului neutru. Se găsește $\bar{V}_0 = \bar{V}_A$. Curenții căutați sunt $\bar{I}_B = (\bar{V}_B - \bar{V}_A) \bar{Y}_B = -\bar{U}_{AB} \bar{Y}_B = 7,33 \angle 150^{\circ} \text{ A}$; $\bar{I}_C = (\bar{V}_C - \bar{V}_A) \bar{Y}_C = a \bar{U}_{AB} \bar{Y}_B = 7,33 \angle 150^{\circ} \text{ A}$. Cei doi curenți sunt în fază; $\bar{I}_A = -\bar{I}_B - \bar{I}_C = 14,66 \angle -30^{\circ} \text{ A}$. Tensiunea între punctele M și N este $\bar{U}_{MN} = \bar{Z}_{AM} \bar{I}_C - \bar{Z}_{AN} \bar{I}_B = (\bar{Z}_{AM} - \bar{Z}_{AN}) \bar{I}_C = j 10 \cdot 7,33 \angle 150^{\circ} = 73,3 \angle 240^{\circ} \text{ V}$.

9.32. Se transfigurează triunghiul sarcinilor găsindu-se $\bar{Z}_A = 50 + j 50 \Omega$, $\bar{Z}_b = 50 - j 50 \Omega$, $\bar{Z}_c = 50 + j 0 \Omega$. Pentru a găsi argumentele tensiunilor

^o) A se vedea L. S. Lurie. Puterea aparentă a sistemelor trifazate, Electricestvo 1/1951.

aplicate, se ia tensiunea \bar{U}_{AB} ca origină de fază și se aplică triunghiului relațiile $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, etc. Rezultă $A = 90^\circ$, $B = C = 45^\circ$. Deci tensiunile sunt $\bar{U}_{AB} = 200 \angle 0^\circ$ V, $\bar{U}_{BL} = 141 \angle -135^\circ = -100(1+j)$ V, $\bar{U}_{CM} = 141 \angle 90^\circ = j100\sqrt{2}$ V. Se determină cu relațiile (66) tensiunile pe fază $\bar{U}_A = \frac{100}{3}$

$(2 - j\sqrt{2})$ V, $\bar{U}_B = -\frac{100}{3}(3+j)$ V, $\bar{U}_C = \frac{100}{3}[1+j(1+\sqrt{2})]$ V. Se găsește

$\bar{U}_0 = 5,9 - j20,9$ V. De unde curenții pe linie $\bar{I}_A = (36,37 - j87,98) \cdot 10^{-2}$ A; $\bar{I}_B = -(93,23 + j115,88) \cdot 10^{-2}$ A; $\bar{I}_C = (56,86 + j203,86) \cdot 10^{-2}$ A. (a) $\bar{S}_{AB} = 200$ W. $\bar{S}_{BC} = 100 - j100$ VA, $\bar{S}_{CA} = 100 + j100$ VA. (b) $P = 400$ W. (c) Pentru wattmetrele montate pe faza A și C se găsește $W_1 = 93,74$ W și $W_3 = 306,65$ W.

9.33. Problema se rezolvă ca și precedenta. Se găsește $\bar{U}_{AB} = 200 \angle 0^\circ$ V, $\bar{U}_{BC} = 220 \angle -114^\circ 40'$ V, $\bar{U}_{CA} = 240 \angle 122^\circ 40'$. Din puteri și tensiuni se deduc $\bar{I}_{AB} = 57 \angle -36^\circ 50'$ A, $\bar{I}_{BC} = 97,5 \angle -159^\circ 40'$ A, $\bar{I}_{CA} = 41,6 \angle -122^\circ 40'$ A. Prin aplicarea primei legi a lui Kirchhoff la vârfurile triunghiului se deduce $\bar{I}_A = -68,06 + j69,14$ A; $\bar{I}_B = 137,06 - j0,37$ A; $\bar{I}_C = -69,00 - j68,77$ A. Un wattmetru indică $W_1 = \Re(\bar{U}_{AB} \cdot \bar{I}_B^*) = -14973,2$ W; $W_2 = -7423,57$ W. Se schimbă legăturile la bobina de tensiune. $P = W_1 + W_2 = 22396,77$ W.

9.34. Se ia ca origină de fază tensiunea \bar{U}_{BC} și se deduc celelalte tensiuni între faze, precum și tensiunile pe fază în cazul încărcării simetrice. Față de acestea se deduce apoi defazajul curenților pe linie, defazajul față de tensiunea respectivă fiind dat de $\cos \varphi$ corespunzător. Pentru motorul monofazat se ia în raport cu tensiunea \bar{U}_{BC} . Se găsește $\bar{U}_{AB} = 380 \angle 120^\circ$ V, $\bar{U}_{BC} = 380 \angle 0^\circ$ V, $\bar{U}_{CA} = 380 \angle -120^\circ$ V; $\bar{U}_A = 220 \angle 90^\circ$ V, $\bar{U}_B = 220 \angle -30^\circ$ V; $\bar{U}_C = 220 \angle 210^\circ$ V. (a) deoarece $\cos \varphi_1 = 0,8$, $\therefore \varphi_1 = -36^\circ 50'$; pentru motorul monofazat $\varphi_2 = -31^\circ 50'$. Rezultă curenții absorbiți de motorul trifazat $\bar{I}_A = 21 \angle 53^\circ 10'$ A, $\bar{I}_B = 21 \angle -66^\circ 50'$ A, $\bar{I}_C = 21 \angle 173^\circ 50'$ A. Curenții absorbiți de motorul monofazat $\bar{I}_B'' = -\bar{I}_C'' = 18,7 \angle -31^\circ 50'$ A. Curenții totali absorbiți din linie: $\bar{I}_A, \bar{I}_B = \bar{I}_B' + \bar{I}_B'' = 38,07 \angle -59^\circ 20'$ A; $\bar{I}_C = \bar{I}_C' - \bar{I}_C'' = 48,1 \angle 139^\circ 30'$ A. (b) $W_1 = \Re(\bar{U}_{AB} \bar{I}_A^*) = 3139,4$ W; $W_2 = \Re(\bar{U}_{CB} \cdot \bar{I}_C^*) = 13898$ W, și deci $P = 17\,000$ W. (c) Se aplică metoda celor trei wattmetre. Se găsește $W_1' = \Re(\bar{U}_{BC} \cdot \bar{I}_A^*) = 4788$ VAR; $W_2 = \Re(\bar{U}_{CA} \cdot \bar{I}_B^*) = 5226,9$ VAR; $W_3 = \Re(\bar{U}_{AB} \cdot \bar{I}_C^*) = 17\,229,6$ VAR. Rezultă $Q = 27\,244,5$ VAR.

9.35. (a) Circuitul echivalent, în funcționarea simetrică este dat în fig. 9.35. a

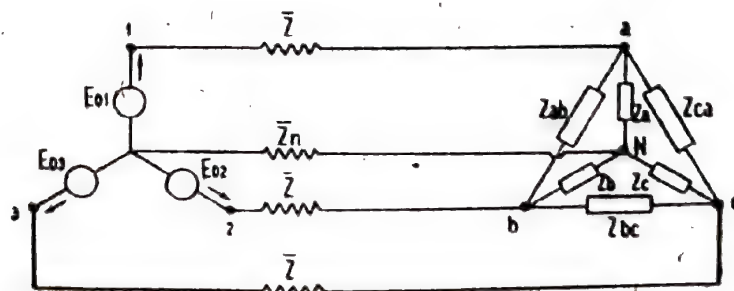


Fig. 9.35. a

La funcționarea simetrică

$$\begin{aligned} Q_{\Delta} &= P_{\Delta} \operatorname{tg} \varphi_{\Delta} = -73,0 \text{ kVAR} \\ Q_Y &= P_Y \operatorname{tg} \varphi_Y = -83,6 \text{ kVAR} \\ Q &= -156,6 \text{ kVAR} \end{aligned}$$

$\therefore S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 325 \text{ kVA}$; $P = 285 \text{ kW}$
 $\therefore K = 0,878$ inductiv $\therefore \varphi = -28^{\circ}36'$. Se calculează apoi, din $P_1 = P/3$, $I_{1a} = 46,8 \text{ A}$ și deci curentul pe fază $I_{1a} = 46,8 \angle -28^{\circ}36'$ A. Tensiunea simplă în stație este $\bar{E}_{01} = \bar{Z} \bar{I}_{1a} + \bar{U}_{01} = 2580 \angle -0^{\circ}12'$ V. Defazajul între \bar{E}_{01} și \bar{I}_{01} este $\varphi' = -28^{\circ}36' - (-0^{\circ}12') = -28^{\circ}24'$ și deci factorul de putere în stație este 0,88 inductiv. Puterea totală în stație $P_s = 318 \text{ kW}$.

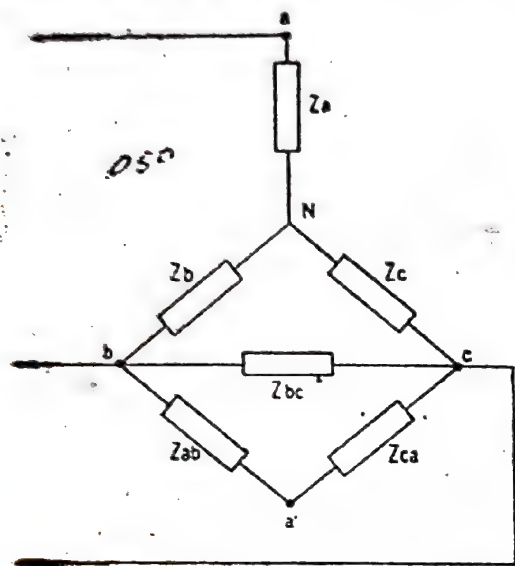


Fig. 9.35 b

(b) Întrerupându-se faza 1, sarcina raportată la punctul P apare sub forma din figura 9. 35b. Se determină impedanțele sarcinilor în stea și în triunghi, din raportul tensiunilor și curenților corespunzătoare sarcinii echilibrate, Se găsește $\bar{Z}_a = \bar{Z}_b = \bar{Z}_c = 43,3 + j 23,6 \Omega$ și $\bar{Z}_{ab} = \bar{Z}_{bc} = \bar{Z}_{ca} = 259,8 + j 126,7 \Omega$. Se calculează impedanța echivalentă între b și c : $\bar{Z}'_{bc} = 173,2 + j 84,6 \Omega$. Se transfigurează triunghiul Nbc , se găsește $\bar{Z}_{ON} = 7,2 + j 4,2 \Omega$, $\bar{Z}_{ob} = \bar{Z}_{oc} = 16,9 + j 15 \Omega$. Impedanțele totale pe cele trei faze sunt $\bar{Z}_1 = 55,6 + j 30,4 \Omega$, $\bar{Z}_2 = \bar{Z}_3 = 22,0 + j 17,6 \Omega$. Se calculează deplasarea punctului neutru la stație găsindu-se $\bar{E}_0 = -15,2 + j 17,6 \text{ V}$.

și, cu ajutorul acestora, curenții din linii: $\bar{I}_1 = 34,6 - j 20,6 \text{ A}$, $\bar{I}_2 = -84,8 - j 35,2 \text{ A}$, $\bar{I}_3 = 14,0 + j 89,7 \text{ A}$, $\bar{I}_0 = -36,2 + j 33,9 \text{ A}$. Tensiunile pe fiecare fază și pe neutru în punctul P sunt (fiecare fază este un dipol): $\bar{U}_1 = 2350,8 + j 13,9 \text{ V}$, $\bar{U}_2 = -956,0 - j 1831 \text{ V}$, $\bar{U}_3 = -1120,0 + j 1744 \text{ V}$, $\bar{U}_0 = 521,5 - j 279,8 \text{ V}$. Tensiunea între neutru și fiecare fază este $\bar{U}_{N1} = \bar{U}_1 - \bar{U}_N = 1829,3 + j 293,7 \text{ V}$, $\bar{U}_{N2} = -1477,5 - j 1551,2 \text{ V}$, $\bar{U}_{N3} = -1641,5 + j 2023,8 \text{ V}$. (c) Diagrama tensiunilor se construiește ușor. (d) Sistemul devine complet desechilibrat. (e) $\bar{S}_1 = (\bar{E}_{10} - \bar{E}_0) \bar{I}_1^* = 89986 + j 52854 \text{ VA}$, $\bar{S}_2 = 187 400 + j 143,600 \text{ VA}$, $\bar{S}_3 = 188 0000 + j 146400 \text{ VA}$. $S_{Total} = 465386 + j 342854 \text{ VA}$; $P = 465,4 \text{ kW}$; $Q = 342,9 \text{ kVAR}$. Indicațiile fiecărui aparat de măsură corespund puterilor active și reactive din fiecare fază.

10. 10.1. Calculul se face analitic sau grafic: Se obține ușor: $3; 3 \angle -60^{\circ}$;

$$1 \angle -60^{\circ}; 1 \angle 240^{\circ}; a; 1; \sqrt{3} \angle -90^{\circ}; \frac{1}{\sqrt{3}} \angle -30^{\circ}.$$

$$10.2. \pm 1; \pm a; \pm \sqrt{a} = \pm 1 \angle 60^{\circ}. \text{ Sau } \pm 1; a; -a = 1 + a^2 = 1 \angle -60^{\circ}; 1 \angle 60^{\circ} = -a^2 = 1 + a; -1 \angle 60^{\circ} = 1 \angle -120^{\circ} = a^2. \text{ Rezultă: } \pm 1; \pm a; \pm a^2$$

10.3. $\bar{I}_h = -1 - j2$; $\bar{I}_d = 10,27 - j6,33$; $\bar{I}_i = 1,27 + j2,33$. Verificarea se face calculându-se curenții cu ajutorul acestor componente. Se găsește $\bar{I}_a = \bar{I}_h + \bar{I}_d + \bar{I}_i = 8 - j6$; etc.

10.4. $\bar{E}_a = 150,4 + j0$; $\bar{E}_b = -75,2 - j206,8$; $\bar{E}_c = -75,2 - j206,8 = -\bar{E}_b$. Se găsește $\bar{E}_h = -j137,9 = 137,9 \angle -90^\circ$; $\bar{E}_d = 75,2 + j68,9 = 102 \angle 42^\circ 30' = \bar{E}_i$.

10.5. $\bar{I}_h = 6,6 + j6,6$ A; $\bar{I}_d = -3,33 + j12,44$ A; $\bar{I}_i = -3,33 + j0,96$ A.

10.6. Calculul se face ușor folosind proprietățile operatorului a . Se găsește $\bar{I}_h = 0$; $\bar{I}_d = 0$; $\bar{I}_i = j100$ A.

10.7. Se ia ca origină de fază unul din vectori, s. ex. \bar{U}_d . Se găsește $\bar{U}_h = -20,3 + j18,6$ V, $\bar{U}_d = 197 - j37$ V, $\bar{U}_i = 44 - j125$ V.

10.8. $\bar{I}_h = -2,33 + j2,33$ A; $\bar{I}_d = 2,32 + j0,05$ A; $\bar{I}_i = 0,012 + j0,633$ A.

10.9. $\bar{I}_h = 0$; $\bar{I}_d = j \frac{\sqrt{3}}{3} \bar{I} = -\bar{I}_i$.

10.10. $\bar{I}_h = 0$; $\bar{I}_d = \frac{\sqrt{3}}{3} \bar{I} \angle 30^\circ$; $\bar{I}_i = \frac{\sqrt{3}}{3} \bar{I} \angle -30^\circ$. În ambele cazuri

\bar{I}_d și \bar{I}_i sunt conjugați, unghiul de simetrie fiind în primul caz 90° și în al doilea caz 30° .

10.11. $\bar{E}_h = 0$; $\bar{E}_d = 50 - j28,9$ V; $\bar{E}_i = 50 + j28,9$ V.

10.12. $\bar{E}_h = 50(1-j)$ V; $\bar{E}_d = 93,5 + j25$ V; $\bar{E}_i = 6,5 + j25$ V.

10.13. Se construiește topograma și se constată că este un sistem invers. Dacă se ia ca origine de fază \bar{I}_1 , atunci $\bar{I}_2 = 50 \angle 60^\circ$ și $\bar{I}_3 = 50 \angle -60^\circ$ de unde $\bar{I}_h = 50 \angle 0$; $\bar{I}_d = 0$; $\bar{I}_i = 50 \angle 0$.

10.14. a) Se construiește triunghiul tensiunilor luându-se ca origine de fază tensiunea $U_1 = 200$ V. Dacă sistemul este direct, laturile triunghiului vor fi $\overline{AB} = -\bar{U}_3$; $\overline{BC} = -\bar{U}_1$; $\overline{CA} = -\bar{U}_2$. Din acest triunghi se calculează $\cos C = \frac{U_1^2 + U_2^2 - U_3^2}{2 U_1 U_2}$ și analog $\cos B$. Se găsește $\hat{C} = 28^\circ 57'$ și $\hat{B} = 46^\circ 24'$.

Rezultă $\bar{U}_1 = 200 \angle 0$; $\bar{U}_2 = 150 \angle 208^\circ 57' = -131,25 - j72,60$; $U_3 = 100 \angle 133^\circ 36' = -68,75 + j72,60$. Apoi $\bar{U}_h = 0$; $\bar{U}_d = 141,866 - j18,042 = 143 \angle -7^\circ 15'$; $\bar{U}_i = 58,134 + j18,042 = 60,9 \angle 17^\circ 15'$. b) Cu ajutorul relațiilor (73) se calculează $\bar{V}_d = 82,5 \angle 82^\circ 45'$ și $\bar{V}_i = 35,1 \angle -72^\circ 45'$. Problema se rezolvă foarte simplu grafic.

10.15. $\bar{V}_1 = 131,2 - j38,5$; $\bar{V}_2 = 32,3 - j75$; $\bar{V}_3 = -68,9 + j61,6$.

10.16. Presupunând faza 3 inversată, sistemul de fluxuri este, luând această fază ca origină: $\bar{\Phi}_1 = \Phi \angle 30^\circ$; $\bar{\Phi}_2 = \Phi \angle -30^\circ$; $\bar{\Phi}_3 = \Phi \angle 0$. Rezultă

$$\bar{\Phi}_h = \frac{2}{3} \Phi \angle 0; \quad \bar{\Phi}_d = \frac{1}{3} \Phi \angle 180^\circ; \quad \bar{\Phi}_i = \frac{2}{3} \Phi \angle 0 \quad \therefore \epsilon_i = 200\%.$$

10.17. Se aplică lema sistemelor de vectori concurenți, având aceleași vârfuri însă origini diferite. Direct, se scriu vectorii celui de al doilea sistem în funcție de vectorii primului sistem și apoi expresia componentei directe sau inverse.

10.18. Luând vectorul \bar{U}_A ca origine de fază, rezultă $\bar{U}_B = a^2 \bar{U}_A$ și $\bar{U}_O = a \bar{U}_A$ cei trei vectori formând un triunghi echilateral. Punând faza C la pământ se obține sistemul desechilibrat $\bar{U}_A = U_A \angle 0^\circ$; $\bar{U}'_B = -\bar{U}_B = U_A \angle 60^\circ$; $\bar{U}'_O =$

$= 0$. Se găsește $\bar{U}'_h = \frac{\bar{U}_A}{\sqrt{3}} \angle 30^\circ$; $\bar{U}'_d = 0$; $\bar{U}'_i = \frac{\bar{U}_A}{\sqrt{3}} \angle -30^\circ$. Dacă se pune

faza B la pământ, $\bar{U}''_h = \frac{\bar{U}_A}{\sqrt{3}} \angle 150^\circ$; $\bar{U}''_d = 0$; $\bar{U}''_i = \frac{\bar{U}_A}{\sqrt{3}} \angle -150^\circ$.

10.19. Tensiunea pe fază este 20 100 V și sistemul este simetric. Se găsește $\bar{E}'_d = \bar{E}_d = 20\,100 \angle 0^\circ$; $\bar{E}'_i = \bar{E}_i = 0$; $\bar{E}'_h = \bar{E}_h - \bar{OO}_1 = -20\,100 \angle -120^\circ = 20\,100 \angle 60^\circ$. Dacă sistemul este conectat în triunghi, ajungem în cazul problemei precedente.

10.20. $\bar{V}_h = 29,8 - j 0,1$; $\bar{V}_d = -22,3 + j 10$; $\bar{V}_i = 12,5 - j 9,9$. Rezolvarea grafică nu prezintă nici o dificultate.

10.21. Se găsește $\bar{U}_d = 58 \angle 9^\circ$ V și $\bar{U}_i = 20 \angle -30^\circ$ V (fig. 10.21).

10.22. Se aplică relațiile (78) și se găsește $\bar{V}_d = 33,4 \angle 99^\circ$; $\bar{V}_i = 11,5 \angle -120^\circ$; $\bar{V}_h = 0$. Apoi $\epsilon_i = 34,75\%$ și $\epsilon_h = 0$.

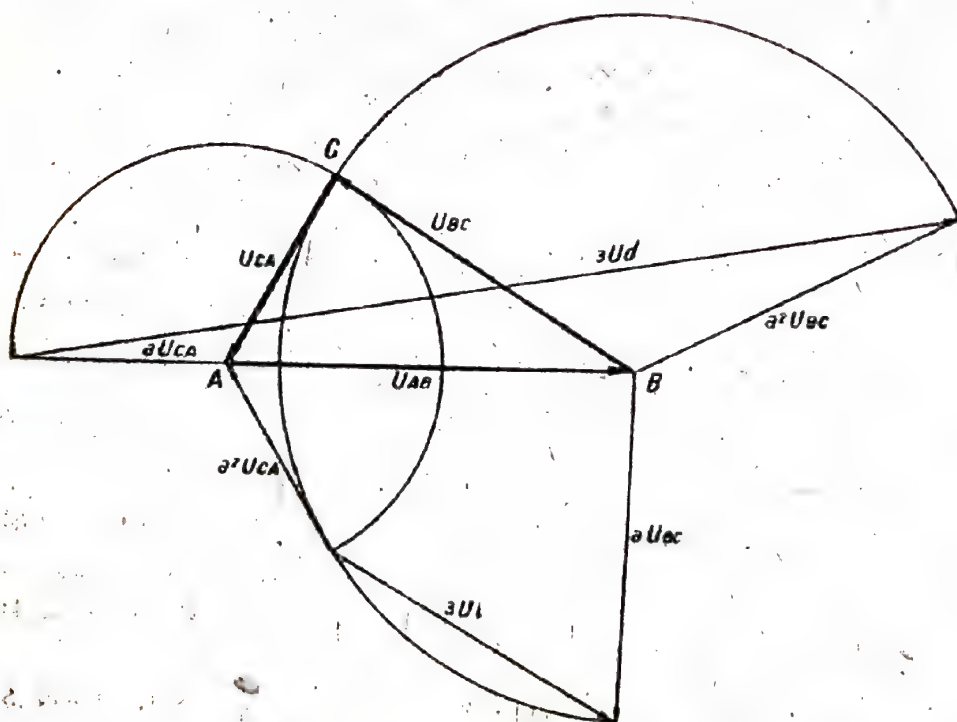


Fig. 10.21

10.23. $\bar{E}_h = 7,5 \angle 57^\circ 45'$; $\bar{E}_d = 15 \angle -23^\circ 15'$; $\bar{E}_i = 7,2 \angle 13^\circ 30'$.

10.24. Se scrie $\bar{V}_d = \frac{1}{3}(\bar{V}_1 + a \bar{V}_2 + a^2 \bar{V}_2) = \frac{1}{2} \bar{V}_1 + j \frac{1}{2\sqrt{3}}(\bar{V}_2 - \bar{V}_3)$ căci $\bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \bar{V}_3 = 0$. Apoi $\overline{AC} + \overline{CD} = \overline{AD} = \bar{V}_2 + \frac{1}{2} \bar{V}_1 = \frac{1}{2}(\bar{V}_2 - \bar{V}_3)$ și $\overline{DF} = j \overline{AD} \operatorname{tg} 30^\circ = j \frac{1}{2\sqrt{3}}(\bar{V}_2 - \bar{V}_3)$. Rezultă $\overline{CF} = \overline{CD} + \overline{DF} = \bar{V}_d$. Analog $\overline{FB} = \overline{DB} - \overline{DF} = \bar{V}_1$.

10.25. Se scrie $R(I_1^2 + I_2^2 + I_3^2) = R\bar{I}_1 \cdot \bar{I}_{1c} + R\bar{I}_2 \bar{I}_{2c} + R\bar{I}_3 \bar{I}_{3c}$. Se scrie apoi curenții în funcție de componentele simetrice și se face calculul ținându-se seama că $a^{-1} = a^2$ și $a^{-2} = a$.

10.26. Se transfigurează sistemul triunghi al sarcinilor într-o stea. Se găsește $\bar{Z}_A = 5,0 + j 11,9 \Omega$; $\bar{Z}_B = 3,6 - j 11,3 \Omega$; $\bar{Z}_C = 12,5 - j 3,9 \Omega$, cu care se calculează impedanțele de calcul $\bar{Z}_h = 7,03 - j 1,10 \Omega$; $\bar{Z}_d = 1,12 + j 3,94 \Omega$; $\bar{Z}_i = -3,14 + j 9,06 \Omega$. Se calculează apoi curenții cu relațiile (81). Se găsește $\bar{I}_d = 0,14 + j 17,45$ A și $\bar{I}_i = 9,96 - j 1,31$ A. Scriind apoi $\bar{S}_d = (\bar{Z}_h \bar{I}_d + \bar{Z}_i \bar{I}_i) \bar{I}_{dc} = \bar{V}_d \cdot \bar{I}_{dc}$ și analog $\bar{S}_i = \bar{V}_i \bar{I}_{ic}$. Se găsește $\bar{S}_d = 3840 + j 30,8$ VA și $\bar{S}_i = 0$, de unde $\bar{S}_T = 3 \bar{S}_d + 3 \bar{S}_i = 11520 + j 92$ VA.

10.27. Se găsește din epură $\bar{V}_h = 0$; $\bar{V}_d = 250 \angle 75^\circ$ V; $\bar{V}_i = 80 \angle 192^\circ$ V; $\bar{I}_h = 2 \angle -90^\circ$ A; $\bar{I}_d = 5,6 \angle 62^\circ$ A; $\bar{I}_i = 3,4 \angle 39^\circ$ A. Se determină $\varphi_d = 75^\circ - 62^\circ = 13^\circ$; $\varphi_i = 153^\circ$ și se găsește $P = 3374$ W; $Q = 1084$ VAR; $S = 3544$ VA. Verificarea se face calculând puterile direct cu elementele date.

10.28. 1^o a) În acest caz $\bar{I}_1 = 0$; $\bar{I}_2 = -\bar{I}_3$ și $|\bar{I}_2| = 520$ A. Rezultă $\bar{I}_d = -\bar{I}_i = \frac{a - a^2}{3} \bar{I}_2$ și $\epsilon_i = 100\%$. b) Curenții absorbiți de la transformator sunt $\bar{A}_1 = 0$; $\bar{A}_2 = -\bar{A}_3$; $|\bar{A}_2| = 520$ A și componentele simetrice au aceeași expresie ca mai sus. Componentele simetrice pe primarul transformatorului sunt $\bar{B}_d = \frac{\bar{A}_d}{k} \angle -30^\circ = \frac{1}{k} \frac{\sqrt{3}}{3} \bar{A}_2 \angle 60^\circ$; analog $\bar{B}_i = \frac{1}{k} \frac{\sqrt{3}}{3} \bar{A}_2 \angle -60^\circ$.

Se găsește $\epsilon_i = 100\%$.

c) Ca mai sus se găsește: $\bar{A}_d = \frac{k}{\sqrt{3}} \bar{B}_2 \angle 120^\circ$; $\bar{A}_i = \frac{k}{\sqrt{3}} \bar{B}_2 \angle -120^\circ$ și $\epsilon_i = 100\%$.

2^o a) $\bar{I}_1 = 0$; $\bar{I}_2 = -\bar{I}_3 = 520$ A. b) $\bar{B}_3 = \frac{1}{k} \frac{\sqrt{3}}{3} \bar{A}_2 = \bar{B}_2$ cu $|\bar{B}_1| = 300$ A = $|\bar{B}_2|$ și $\bar{B}_3 = \frac{2}{k} \frac{\sqrt{3}}{3} \bar{A}_2 \angle 180^\circ$ cu $|\bar{B}_3| = 600$ A. c) $\bar{A}_1 = \bar{A}_2 = \frac{k}{\sqrt{3}} \bar{B}_2 \angle 180^\circ$ cu $|\bar{A}_1| = |\bar{A}_3| = 300$ A și $\bar{A}_2 = 2 \frac{k}{\sqrt{3}} \bar{B}_2$ cu $|\bar{A}_2| = 600$ A.

10.29. Problema se rezolvă grafic construind triunghiul cu laturile U_{AB} , V_A și V_B ; pe latura V_B a acestui triunghi se construiește triunghiul U_{BA}, V_B, V_O . Rezultă $U_{OA} = 230 \text{ V}$; luând ca origine de fază tensiunea U_{AB} , se obține tot pe cale grafică $\bar{V}_h = 18,6 \angle -90^\circ \text{ V}$; $\bar{V}_d = 126,7 \angle -30^\circ \text{ V}$; $\bar{V}_i = 11,3 \angle -150^\circ \text{ V}$; $\bar{U}_h = 0$; $\bar{U}_d = 219,6 \angle -120^\circ$; $\bar{U}_i = 19,6 \angle -60^\circ \text{ V}$.

10.30. Se aplică legile lui Kirchhoff fiecărui sistem de secvență simetric:

$$\bar{U}_d = \bar{Z}_d \bar{I}_d \text{ etc. Se găsește}$$

$$\bar{Z}_d = \bar{Z}_s + \bar{Z}_l + \bar{Z} - \bar{Z}_m; \bar{Z}_i = \bar{Z}_a + \bar{Z}_l + \bar{Z} - \bar{Z}_m; \bar{Z}_h = \bar{Z}_0 + \bar{Z}_l + \bar{Z} + 2\bar{Z}_m + 3\bar{Z}_N - 6\bar{Z}_{mo}, \text{ în care s'a notat } \bar{Z}_m = j\omega M \text{ și } \bar{Z}_{mo} = j\omega M_0.$$

11. 11.1. Sensul curenților fiind cel din figură, \bar{I}_2 dă în fiecare ampermetru: $\bar{I}_{A_1} = -\bar{I}_2 \frac{R + \bar{M}}{R + \bar{Z} + 2\bar{M}}$ și $\bar{I}_{A_2} = -\bar{I}_2 \frac{\bar{Z} + \bar{M}}{R + \bar{Z} + 2\bar{M}}$, iar \bar{I}_3 dă $\bar{I}_{A_1} = -\bar{I}_3 \frac{\bar{Z} + \bar{M}}{R + \bar{Z} + 2\bar{M}}$ și $\bar{I}_{A_2} = -\bar{I}_3 \frac{R + \bar{M}}{R + \bar{Z} + 2\bar{M}}$, curentul total în fiecare ampermetru este suma acestora. Cum $\bar{I}_h = 0$ vom avea $\bar{I}_{A_1} = \frac{1}{3} \left[(a-1)\bar{I}_2 + (a^2-1)\bar{I}_3 \right]$ și $\bar{I}_{A_2} = \frac{1}{3} \left[(a^2-1)\bar{I}_2 + (a-1)\bar{I}_3 \right]$ sau $\frac{1}{3}(a-1) = -\frac{1}{N}(R + \bar{M})$ și $\frac{1}{3}(a^2-1) = -\frac{1}{N}(\bar{Z} + \bar{M})$, în care $N = R + \bar{Z} + 2\bar{M}$; prin împărțire se obține $\frac{R + \bar{M}}{\bar{Z} + \bar{M}} = \frac{a-1}{a^2-1} = -a$, de unde se deduce relația căutată $\bar{Z} = -a^2 R + a\bar{M}$.

11.2. Scriind legea a doua a lui Kirchhoff în circuitul secundar al celor două transformatoare se obține (1) $\bar{E}_1 - \bar{E}_3 = R\bar{I}_2 + \bar{M}(\bar{I}_1 + \bar{I}_2)$ și $\bar{E}_3 - \bar{E}_2 = \bar{Z}\bar{I}_1 + \bar{M}(\bar{I}_1 + \bar{I}_2)$. Înmulțind prima relație cu \bar{Z} și a doua cu R și ținând seama că $\bar{I}_1 + \bar{I}_2 = \bar{I}_M$ se găsește $\bar{I}_M = \frac{\bar{Z}(\bar{E}_1 - \bar{E}_3) + R(\bar{E}_3 - \bar{E}_2)}{\bar{Z}R + \bar{M}(\bar{Z} + R)}$ (2). Scriind tensiunile pe cele trei faze în funcție de componentele lor simetrice, se găsește $\bar{I}_M = \frac{(1-a)(\bar{Z} + aR)}{\bar{Z}R + \bar{M}(\bar{Z} + R)} \bar{E}_d + \frac{(1-a^2)(\bar{Z} + a^2R)}{\bar{Z}R + \bar{M}(\bar{Z} + R)} \bar{E}_i$ (3). Pentru ca aparatul să arate componenta directă, coeficientul lui \bar{E}_i trebuie să fie nul. Rezultă $\bar{Z} = -a^2 R = R \angle 60^\circ$.

11.3. Relația care dă curentul în voltmetru devine $\bar{I}_M = \frac{\bar{Z}(\bar{E}_1 - \bar{E}_3)}{\bar{Z}R + \bar{M}(\bar{Z} + R)}$. Punând $\bar{U}_1 = \bar{E}_3 - \bar{E}_2$, $\bar{U}_2 = \bar{E}_1 - \bar{E}_3$, $\bar{U}_3 = \bar{E}_2 - \bar{E}_1$ și scriind pe $\bar{U}_2 = \bar{E}_1 - \bar{E}_3$ în funcție de componentele simetrice, relația de mai sus devine



$$\bar{I}_M = \frac{\bar{Z}a^2\bar{U}_d + \bar{Z}a\bar{U}_1}{\bar{Z}R + \bar{M}(\bar{Z} + R)} \text{ sau ținând seama de relația dintre } \bar{Z} \text{ și } R \text{ găsită mai}$$

$$\text{sus, } \bar{I}_M = \frac{a^2\bar{U}_d + a\bar{U}_1}{R + M\sqrt{3}|-30^\circ} = \frac{\bar{U}_2}{R + M\sqrt{3}|-30^\circ} \text{ deci o tensiune proporțio-}$$

nală cu $\bar{U}_2 = \bar{E}_1 - \bar{E}_3$. Numeric se găsește $\bar{I}_M = (0,36 + j0,116) \times \bar{U}_2 \times 10^{-3} = 0,38 \cdot 10^{-3} \bar{U}_2 |18^\circ$. Dacă admitem că tensiunea totală este arătată atunci când prin aparat trece un miliamper, atunci, în cazul considerat, aparatul va indica numai 38 % din tensiunea fazei corespunzătoare. În cazul al doilea, dispozitivul alimentat numai cu tensiunea \bar{U}_1 , se găsește, ca mai sus

$$\bar{I}_M = \frac{\bar{U}_1}{(R + \bar{M})|60^\circ + \bar{M}} \text{ sau numeric } \bar{I}_M = (0,225 - j0,279) \bar{U}_1 \times 10^{-3} = 0,36 \times 10^{-3} \bar{U}_1 |51^\circ, \text{ adică numai 36 \% din tensiunea } \bar{U}_1.$$

11.4. Fie \bar{Z} impedanța în serie cu R , legată între fazele 2 și 3 și \bar{Z}_T impedanța secundarului autotransformatorului. Dacă \bar{I}_1 este curentul care circulă prin secundarul autotransformatorului și \bar{I}_2 curentul care circulă prin impedanța $R + \bar{Z}$, atunci curentul care trece prin aparatul de măsură de impedanță \bar{M} este:

$$\bar{I}_M = \frac{\bar{E}_1 - \bar{E}_2}{2} \cdot \frac{1}{\bar{M} + \bar{Z} + \bar{Z}_T} - \frac{\bar{E}_2 - \bar{E}_3}{R + \bar{Z}} \cdot \frac{\bar{Z}}{\bar{M} + \bar{Z} + \bar{Z}_T}$$

punând $\bar{E}_1 - \bar{E}_2 = \bar{U}_3$ și $\bar{E}_2 - \bar{E}_3 = \bar{U}_1$ și scriind aceste mărimi în funcție de componentele simetrice, găsim:

$$\bar{I}_M = - \left(\frac{a}{2} + \frac{\bar{Z}}{R + \bar{Z}} \right) \frac{\bar{U}_d}{\bar{M} + \bar{Z} + \bar{Z}_1} - \left(\frac{a^2}{2} + \frac{\bar{Z}}{R + \bar{Z}} \right) \frac{\bar{U}_1}{\bar{M} + \bar{Z} + \bar{Z}_T}$$

de unde condiția ca \bar{I}_M să măsoare componenta directă a tensiunilor $\left(\frac{a^2}{2} + \frac{\bar{Z}}{R + \bar{Z}} \right) = 0$ sau $\bar{Z} = j \frac{R}{\sqrt{3}}$, adică tocmai aceia indicată pe figură.

11.5. Relația de funcționare (3) obținută în problema 11.2 trebuie să fie satisfăcută în ambele situații Vom avea deci:

$$\bar{I}_M = \frac{(1-a)(\bar{Z} + aR)}{\bar{Z}R + \bar{M}(\bar{Z} + R)} = \frac{(1-a)(\bar{Z}_1 + aR_1)}{\bar{Z}_1R_1 + \bar{M}_1(\bar{Z}_1 + R)} \text{ sau ținând seama de relația}$$

$\bar{Z} = -a^2R$ și $\bar{Z}_1 = -a^2R_1$ obținem relația de condiție $-a^2R + \bar{M}(1-a^2) = -a^2R_1 + \bar{M}_1(1-a^2)$ de unde $R_1 = R - (\bar{M}_1 - \bar{M})(1-a)$. Se găsește $R_1 = 1540 \Omega$.

11.6. Din ecuațiile (1) scrise pentru problema 11.2 se deduce:

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{U}_2(\bar{M} - a^2R) - \bar{U}_1\bar{M}}{\bar{M}R(1-a^2) - a^2R^2} \text{ și } \bar{I}_1 = \frac{\bar{U}_1(R + \bar{M}) - \bar{U}_2\bar{M}}{\bar{M}R(1-a^2) - a^2R^2}.$$

În cazul unui sistem invers, $\bar{U}_2 = a\bar{U}_1$ și se găsește

$$\bar{I}_1 = \bar{U}_1 \frac{R + (1-a)\bar{M}}{\bar{M}R(1-a^2) - a^2R^2} \quad \text{și} \quad \bar{I}_2 = \bar{U}_1 \frac{(a-1)\bar{M} - R}{\bar{M}R(1-a^2) - a^2R^2}$$

Aparatul măsoară deci $\bar{I}_1 + \bar{I}_2 = \bar{I}_M = 0$, aceasta în ambele cazuri.

11.7. Curentul din aparat este dat de relația $\bar{I}_M = \frac{\bar{V}_1}{\bar{Z}_1} - \frac{\bar{V}_2}{\bar{Z}_2} - \frac{\bar{V}_3}{\bar{Z}_3}$.

Identificând cu expresia care ne dă componenta directă, se găsește $Z_A = 3$, o rezistență pură, $\bar{Z}_B = Z_A | 60^\circ$ și $\bar{Z}_C = Z_A | -60^\circ$. Numeric luăm $Z_A = R =$

$$= \frac{380}{\sqrt{3 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}} = 44000 \, \Omega; \bar{Z}_B = (22000 + j 38000) \, \Omega; \bar{Z}_C = 22000 - j 38000 \, \Omega.$$

11.8. Cele trei impedanțe se obțin din relațiile generale ale scurtcircuitelor trifazate, între două faze și o fază la pământ. Se găsește: a) pentru defectul trifazat $\bar{Z}_d = \frac{E_d}{I_d} = \frac{2000}{1000} = 2 \, \Omega$ căci $E_d = E$ și $I_d = I$; b) pentru defectul între două

$$\text{faze } \bar{Z}_d = \frac{E_d}{I_d} = \frac{2000}{1000} = 2 \, \Omega \text{ căci } E_d = E \text{ și } I_d = I; \text{ b) pentru defectul între două}$$

$$\text{faze } \bar{I}_b = \bar{I}_c = (a^2 - a) \frac{E}{\bar{Z}_d + \bar{Z}_i}, \bar{I}_d = -\bar{I}_i = \frac{E}{\bar{Z}_d + \bar{Z}_i}. \text{ Rezultă } \bar{Z}_i = \frac{(a^2 - a)E}{\bar{I}_b}$$

sau numeric $\bar{Z}_i = -j 2,43 \, \Omega$; pentru defectul între o fază și pământ, avem

$$\bar{I}_d = \bar{I}_i = \bar{I}_h = \frac{E}{\bar{Z}_d + \bar{Z}_i + \bar{Z}_h}, \bar{I}_a = \frac{3E}{\bar{Z}_d + \bar{Z}_i + \bar{Z}_h}, \bar{E}_d = \frac{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_h}{\bar{Z}_d + \bar{Z}_i + \bar{Z}_h} E,$$

$$\text{de unde rezultă } \bar{Z}_h = \frac{3E_d}{I_a} - \bar{Z}_d = \left[\frac{3}{\bar{I}_a} - \frac{(a^2 - a)}{I_b} \right] \bar{E}_i. \text{ Numeric, se găsește}$$

$$\bar{Z}_h = 2,7 + j 2,43 \, \Omega.$$

11.9. Montajul echivalează cu un scurtcircuit între două faze și la pământ, cu schema echivalentă din fig. 21. Se calculează componentele simetrice de curent și de tensiune. Cu acestea se calculează apoi \bar{E}_a și $\bar{I}_n = \bar{I}_b + \bar{I}_c$ de unde rezultă relația dată.

11.10. Se determină curentul din voltmetru cu ajutorul impedanțelor de calcul și a componentelor simetrice de tensiune și se exprimă acest curent în funcție de componentele simetrice ale tensiunii. Punând condiția ca, coeficientul lui \bar{V}_i să fie nul, se găsește relația dintre impedanțele fazelor R și T sub forma

$$\bar{Z}_R = a^2 \bar{Z}_T. \text{ Luând } \bar{Z}_R = -j \frac{1}{C\omega}, \text{ rezultă (pe o diagramă) } \bar{Z}_T = \bar{Z}_T | 30^\circ \text{ cu } |\bar{Z}_T| = |\bar{Z}_R|.$$

$$\text{Se obține de aici } (R + jX_L) \left(\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = jX_C \text{ de unde, prin separare, } X_L = \frac{1}{\sqrt{3}} R$$

și $X_C = \frac{2}{\sqrt{3}} R$. Cele două reactanțe sunt independente de valoarea rezistenței voltmetrului și nu depind decât de rezistența inductanței.

11.11. Se scrie $\bar{U}'_1 = R \bar{I}_{31} + \bar{Z} \bar{I}_{12} = R(\bar{I}_{31} - a^2 \bar{I}_{12})$ dar $\bar{I}_1 = \bar{I}_{31} - \bar{I}_{12}$ etc.; rezultă $\bar{I}_1 - \bar{I}_3 = 3 \bar{I}_{31}$ căci $\bar{I}_{12} + \bar{I}_{23} + \bar{I}_{31} = 0$, de unde $\bar{U}'_1 =$

— $\frac{R}{3} (\bar{I}_3 + a \bar{I}_1 + a^2 \bar{I}_2)$. La fel se determină și valorile lui \bar{U}_2, \bar{U}_3 . În cazul ampermetrelor de impedanță \bar{Z}' , se obțin aceleași relații însă factorul de proporționalitate este un vector a cărui modul și argument sunt funcții de R, \bar{Z} și \bar{Z}' .

11.12. Se scrie $\bar{U}_1 = R \bar{I}_{12} + \bar{Z} \bar{I}_{31} = R (\bar{I}_{12} - a^2 \bar{I}_{31})$. Dar $\bar{I}_{12} = \frac{\bar{U}_{12}}{R(1-a^2)}$ și $\bar{I}_{23} = \frac{\bar{U}_{23}}{R(1-a^2)}$; rezultă

$$\bar{U}_1 = (U_{12} - a^2 U_{23}) / (1-a^2). \text{ Dar } \bar{U}_{12} - a^2 \bar{U}_{23} = \frac{3 U_{i12}}{1-a^2}$$

$\therefore \bar{U}_2 = -a \bar{U}_{i12} = -\bar{U}_{i23}$. La fel pentru celelalte tensiuni. În cazul curenților factorul de proporționalitate este un vector funcție de impedanța Z' .

12. 12.1. Reactanța este dată de relația $\bar{X} = j \frac{\varepsilon}{100} \cdot \frac{U_N^2}{S}$, în care U_N este tensiunea nominală în kV și S puterea aparentă în MVA. Numeric se găsește: $\bar{X}_{scI} = j 0,254 \Omega$ și $\bar{X}_{scII} = j 0,58 \times 10^{-3} \Omega$.

$$12.2. \text{ Avem } \varepsilon \% = \frac{U_{sc}}{U_N} \times 100, \text{ rezultă } \varepsilon' \% = \frac{U_{sc}}{U_N} \cdot \frac{U_N}{U'_N} \times 100 = \varepsilon \% \frac{U_N}{U'_N}$$

Numeric se găsește $\varepsilon' = 11,9\%$. $\bar{X}_{sc 132} = j 78 \Omega$; $\bar{X}_{sc 220} = j 218 \Omega$.

12.3. Rezolvarea acestei probleme se poate face asimilându-se sarcina dezechilibrată cu un scurtcircuit între două faze cu o impedanță între ele, la bornele unui alternator. Schema echivalentă (fig. 12.3) conduce la relațiile:

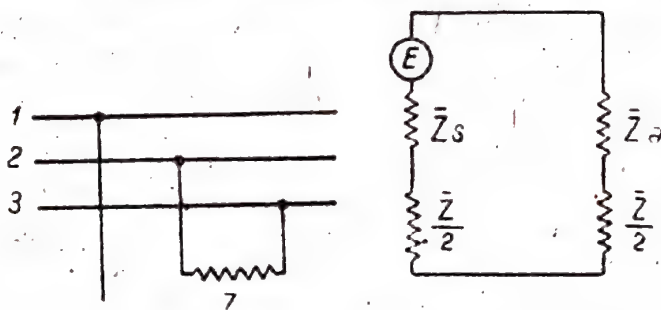


Fig. 12.3.

$$\bar{I}_a = -\bar{I}_i = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}_s + \bar{Z}_a + \bar{Z}} = 1510 - j 3300 \text{ A și } \bar{I}_h = 0. \text{ Curenții pe cele trei}$$

faze sunt $\bar{I}_1 = 0$; $\bar{I}_2 = -5700 - j 2600 \text{ A}$; $\bar{I}_3 = 5700 + j 2600 \text{ A}$. Componentele simetrice ale tensiunilor pe fază sunt $\bar{V}_d = \bar{V}_i + \bar{Z} \bar{I}_d = (\bar{Z} + \bar{Z}_a) \bar{I}_d$ căci $\bar{V}_i = -\bar{Z}_a \bar{I}_i$. Se găsește $\bar{V}_d = 3675 - j 1515 \text{ V}$ și $\bar{V}_i = 495 + j 226,5 \text{ V}$.

Componentele simetrice ale tensiunilor între faze (triunghi) sunt: $\bar{U}_d = -j\sqrt{3} \bar{V}_d = -2640 - j 5600 \text{ V}$; $\bar{U}_i = j\sqrt{3} \bar{V}_i = -344 + j 754 \text{ V}$. Tensiunile la bornele utilizării sunt $\bar{U}_{23} = -2984 - j 4846 \text{ V}$; $\bar{U}_{31} = -4013 + j 4315$; $\bar{U}_{12} = 6997 + j 531 \text{ V}$.

12.4. Rețeaua neavând fir neutru $\bar{I}_h = 0$. Pentru găsirea curenților, se transfigurează triunghiul utilizării în stea. Se găsește: $R_{A'O} = 2,86 \Omega$; $R_{B'O} = 1,42 \Omega$ și $R_{C'O} = 5,72 \Omega$. Componentele simetrice ale acestor rezistențe sunt: $\bar{Z}_h = \frac{10}{3} \Omega$; $\bar{Z}_d = -\frac{1}{3} (0,71 + j 3,72) \Omega$; $\bar{Z}_i = -\frac{1}{3} (0,71 - j 3,72) \Omega$. Din relațiile care ne dau componentele simetrice ale tensiunilor pe faze, în funcție de curenți și impedanțe, ținând seama că sistemul de tensiuni dat este simetric, și deci $\bar{U}_d = 100 \text{ V}$ și $\bar{U}_i = 0 \text{ V}$, se găsesc componentele simetrice ale curenților pe linie $\bar{I}_d = 35 \text{ A}$, $\bar{I}_i = 2,84 + j 13 \text{ A}$; de unde, curenții pe linie, $\bar{I}_A = 37,84 + j 13 \text{ A}$; $\bar{I}_B = -30,17 - j 35,54 \text{ A}$; $\bar{I}_C = -7,67 + j 22,54 \text{ A}$. Construind diagrama se vede că este un sistem direct. Curenții în utilizarea reală (triunghi) se obțin scriind că la aceleași borne avem aceeași cădere de tensiune, atât la stea cât și la triunghi: $\bar{R}_{A'O} \bar{I}_A + \bar{R}_{B'O} \bar{I}_B = \bar{R}_{AB} \bar{J}_{AB}$. Se găsește $\bar{J}_{AB} = 13 - j 3,12 \text{ A}$; $\bar{J}_{BC} = -8,7 + j 7,74 \text{ A}$; $\bar{J}_{CA} = -4,3 - j 4,62 \text{ A}$. Sistemul este invers.

12.5. Reactanța transformatorului este $\bar{X} = j 3,43 \cdot 10^{-3}$. Circuitul dat devine (fig. 12.5.). Componentele simetrice fictive ale rezistențelor sunt: $\bar{Z}_h = 7 \cdot 10^{-3} \Omega$; $\bar{Z}_d = (1,5 + j 2,6) \cdot 10^{-3} \Omega$. $\bar{Z}_i = (1,5 - j 2,6) \cdot 10^{-3} \Omega$. Componentele simetrice ale curenților sunt date de relațiile $\bar{V}_d = (\bar{Z}_h + \bar{Z}_d) \bar{I}_d + \bar{Z}_i \bar{I}_i$ și $\bar{V}_i = \bar{Z}_d \bar{I}_d + (\bar{Z}_h + \bar{Z}_i) \bar{I}_i$, în care $\bar{V}_d = j \frac{\bar{U}_d}{\sqrt{3}} = j 115,5 \text{ V}$, $\bar{U}_i = 0$. Se găsește $\bar{I}_d = 8,94 + j 12,50 \text{ kA}$ și $\bar{I}_i = 5,42 - j 3,07 \text{ kA}$. Curenții căutați în cele

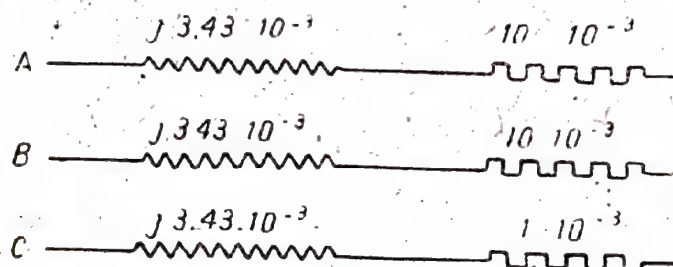


Fig. 12.5

trei faze sunt $\bar{I}_1 = 14,36 + j 9,43 \text{ kA}$; $\bar{I}_2 = 6,30 - j 7,76 \text{ kA}$; $\bar{I}_3 = -20,66 - j 1,67 \text{ kA}$. Sistemul este direct. Puterea absorbită de cuptor este $P = R_1 |\bar{I}_1|^2 + R_2 |\bar{I}_2|^2 + R_3 |\bar{I}_3|^2 = 4390 \text{ kW}$, ceea ce corespunde unei supraîncărcări de 25,43 % a transformatorului.

12.6. Curenții sunt dați de relațiile (83) în care impedanțele de calcul (76) se determină înglobând în impedanțele sarcinii și impedanțele liniei. Sistemul de tensiuni fiind simetric, $\bar{E}_h = \bar{E}_i = 0$ și $\bar{E}_d = \frac{400}{\sqrt{3}} \angle 0$. Cunoscând componentele simetrice ale curenților, curenții pe fază se determină cu ajutorul relațiilor (82). Se găsește $\bar{I}_A = 38,5 - j 8,9 \text{ A}$; $\bar{I}_B = -20,5 + j 16,3 \text{ A}$; $\bar{I}_C = -82,7 + j 43,2 \text{ A}$.

12.7. $E_h = 0$ pentru $\bar{Z}_A \bar{Z}_B + \bar{Z}_B \bar{Z}_C + \bar{Z}_C \bar{Z}_A = 0$, adică atunci, când nu există rezistențe în receptori. Întrucât componentele simetrice ale tensiunilor pe fază \bar{V}_d și \bar{V}_i , depind numai de tensiunile între faze, nu se poate alege \bar{Z}_A , \bar{Z}_B , \bar{Z}_C astfel încât sistemul să se reducă la unul direct sau invers.

12.8. Unghiurile triunghiului format de tensiuni se determină cu relația $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$. Se găsește $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = \hat{C} = 45^\circ$, astfel că vectorii de tensiuni sunt, luând U_{AB} ca origină de fază $\bar{U}_{AB} = 141,4 \angle 0^\circ \text{ V}$, $\bar{U}_{BO} = 200 \angle -135^\circ \text{ V}$; $\bar{U}_{OA} = 141,4 \angle 90^\circ \text{ V}$. (a) Se găsește apoi $\bar{U}_d = 155,7 - j40,8 \text{ V}$ și $\bar{U}_i = 11,0 + j27,5 \text{ V}$. (b) Aplicând relațiile (81), în care $\bar{z}_h = \bar{Z}$, $\bar{z}_d = \bar{z}_i = 0$ se găsește $\bar{I}_d = 5,66 + j3,32 \text{ A}$ și $\bar{I}_i = 1,82 - j0,48 \text{ A}$. (c) $\bar{S} = 3 \bar{U}_d \bar{I}_d^* + 3 \bar{U}_i \cdot \bar{I}_i^* = 3(355 + j297,6) + 3(35,8 + j19,3) = 1172,4 + j950,7 \text{ W}$.

12.9. Prin rezolvarea triunghiului tensiunilor se determină argumentele acestor tensiuni, luându-se ca origină de fază tensiunea \bar{U}_{AB} . Se găsește $\bar{U}_{AB} = 2000 \angle 0^\circ \text{ V}$; $\bar{U}_{BO} = 2300 \angle -115^\circ 50' \text{ V}$; $\bar{U}_{OA} = 2300 \angle 115^\circ 50' \text{ V}$. (a) Componentele simetrice ale tensiunilor sunt $\bar{U}_d = 2196 \angle 0^\circ \text{ V}$ și $\bar{U}_i = 195 \angle 180^\circ \text{ V}$, și, pentru tensiunile pe fază $\bar{V}_d = 1266 \angle 90^\circ \text{ V}$ și $\bar{V}_i = 113 \angle 90^\circ \text{ V}$. Sistemul de sarcini fiind simetric, $\bar{z}_h = \bar{Z}_L = 1 \angle 60^\circ$, $\bar{z}_d = \bar{z}_i = 0$. Aplicând relațiile (83) se găsește $\bar{I}_d = 12,6 + j21,3 \text{ A}$ și $\bar{I}_i = 8,9 + j5,2 \text{ A}$.

(b) $\bar{V}'_d = \bar{V}_d - \bar{z}_h \bar{I}_d = 12,2 + j1245,5 \text{ V}$ și $\bar{V}'_i = j102,7 \text{ V}$.

(c) $\bar{S} = 81.650,8 + j49.042,3 \text{ VA}$.

12.10. Se transfigurează circuitul de utilizare obținându-se apoi impedanțele de calcul ale acestor impedanțe și a liniei: $\bar{z}_h = 2 - j0,41$, $\bar{z}_d = 0,5 + j0,866$, $\bar{z}_i = 0,5 - j0,866$. Luând ca origină de fază f.e.m. E_{BO} și ținând seama de sensul tensiunilor indicat pe figură, f.e.m. respective sunt $\bar{E}_{BO} = 220 \angle 180^\circ \text{ V}$, $\bar{E}_{OA} = 220 \angle 60^\circ \text{ V}$, $\bar{E}_{CA} = 220 \angle -60^\circ \text{ V}$. Componentele simetrice ale acestor forțe electromotoare sunt $\bar{U}_h = \bar{U}_i = 0$, $\bar{U}_d = 220 \angle 180^\circ \text{ V}$. Componentele simetrice ale sistemului în stea corespunzător sunt $\bar{V}_h = \bar{V}_i = 0$, $\bar{V}_d = -j127 \text{ V}$.

(a) Relațiile (83) aplicate dau $\bar{I}_d = -32,7 - j67,8 \text{ A}$ și $\bar{I}_i = -26,5 + j25,8 \text{ A}$. În calculul acestor curenți se va ține seama că \bar{V}_d este componenta simetrică a forței electromotoare și în consecință în coeficientul lui \bar{I}_d din relația (83) trebuie introdusă reactanța sursei $j1,242 \Omega$. Rezultă apoi

$$\bar{I}_A = -59,2 - j42,0 \text{ A}, \bar{I}_B = -51,56 + j26,35 \text{ A},$$

$$\bar{I}_C = -110,66 + j15,65 \text{ A}.$$

(b) $\bar{V}'_d = \bar{V}_d - (\bar{Z}_L + j\bar{X}_s) \bar{I}_d = -119,3 + j14,1 \text{ V}$ și $\bar{V}'_i = -\bar{Z}_L \bar{I}_i = 52,3 + j0,7 \text{ V}$.

Rezultă componentele simetrice ale tensiunilor între faze $\bar{U}'_d = 24,4 + j206,4 \text{ V}$, $\bar{U}'_i = -1,2 + j90,5$ de unde $\bar{U}'_{BO} = 23,2 + j296,9 \text{ V}$, $\bar{U}'_{CA} = 166 - j248 \text{ V}$, $\bar{U}'_{AB} = -89,3 - j49 \text{ V}$.

(c) $W_1 = \Re (\bar{U}'_{AO} \cdot \bar{I}_A^*) = -613,6 \text{ W}$; $W_2 = \Re (\bar{U}'_{BC} \cdot \bar{I}_B^*) = 6641 \text{ W}$.
 $P = 6027,4 \text{ W}$.

12.11. Problema se rezolvă ca și cea precedentă. Se transfigurează triunghiul arcinilor găsimu-se $R_{10} = 3 \Omega$; $R_{20} = 6 \Omega$; $R_{30} = 9 \Omega$, la care se adaugă reactanțele liniei obținându-se $\bar{Z}_1 = 3 + j 0,3 \Omega$, etc. Impedanțele de calcul ale acestora sunt: $\bar{Z}_h = 6 + j 0,3$; $\bar{Z}_d = a(1 + 2a)$; $\bar{Z}_i = a(2 + a)$. Ecuațiile căderilor de tensiune pe fază, în componente simetrice, dau: $\bar{V}_d = (\bar{X}_s + \bar{Z}_h) \bar{I}_d + \bar{Z}_i \bar{I}_i$ și $\bar{V}_i = \bar{Z}_d \bar{I}_d + (\bar{X}_a + \bar{Z}_h) \bar{I}_i$, căci $\bar{I}_h = 0$. Cum $\bar{V}_d = \bar{E} = 1500 \text{ V}$ și $\bar{V}_i = 0$, se găsește $\bar{I}_d = 263,2 - j 45,8 \text{ A}$ și $\bar{I}_i = 73,9 + j 11,2 \text{ A}$. Componentele simetrice ale tensiunilor pe fază vor fi deci $\bar{E}_d = \bar{E} - \bar{X}_s \bar{I}_d = 1454,2 - j 263,2 \text{ V}$ și $\bar{E}_i = -\bar{X}_a \bar{I}_i = 5,6 - j 37,0 \text{ V}$. Componentele simetrice ale tensiunilor între faze sunt date de relațiile (73). Se găsește: $\bar{U}_d = -455,3 - j 2515,8 \text{ V}$ și $\bar{U}_i = 64,0 + j 9,7 \text{ V}$. De unde, $\bar{U}_1 = \bar{U}_{23} = -391,3 - j 2506,1 \text{ V}$; $\bar{U}_2 = \bar{U}_{31} = -1991,4 + j 1702,8 \text{ V}$; $\bar{U}_3 = \bar{U}_{12} = 2382,7 + j 803,3 \text{ V}$. Ca verificare $\Sigma \bar{U} = 0$.

12.12. Componentele simetrice ale impedanțelor sunt $\bar{Z}_h = \frac{1}{3}(20 + j 10) \Omega$;

$\bar{Z}_d = -1,33 - j 4,88 \Omega$; $\bar{Z}_i = 4,88 + j 1,33 \Omega$. Se aplică ecuațiile care dau componentele simetrice ale tensiunilor pe fază în funcție de componentele simetrice ale curenților și impedanțelor. Se găsește: a) $\bar{V}_d = -j 63,5 \text{ V}$; $\bar{V}_i = 0$; $\bar{I}_d = -6,15 - j 3,59 \text{ A}$; $\bar{I}_i = -1 - j 1,98 \text{ A}$; $\bar{I}_{LA} = -7,15 - j 5,57 = 8,3 \angle 218^\circ 30' \text{ A}$; $\bar{I}_x = 2,19 - j 5,28 = 5,71 \angle -67^\circ 30' \text{ A}$; $\bar{I}_{LC} = 4,96 + j 5,41 = 7,34 \angle 47^\circ 30' \text{ A}$. b) $\bar{V}_d = 0$; $\bar{V}_i = j 63,5 \text{ V}$; $\bar{I}_d = -2,01 - j 2,9 \text{ A}$; $\bar{I}_i = 2,06 + j 4,76 \text{ A}$; $\bar{I}_{LA} = 0,05 + j 1,86 = 1,86 \angle 89^\circ 50' \text{ A}$; $\bar{I}_x = -6,7 + j 2,63 = 7,2 \angle 158^\circ 30' \text{ A}$; $\bar{I}_{LC} = -1,66 - j 1 = 1,93 \angle 211^\circ \text{ A}$.

12.13. Problema se rezolvă fără a ține seama de faptul că toate aceste caracteristici sunt date în procente. Se calculează componentele simetrice ale impedanțelor și se găsește:

$$\bar{Z}_h = \frac{200}{3}(1 + j 1)\% ; \bar{Z}_d = -\frac{100}{3}(-0,5 + j 1,866)\% ;$$

$$\bar{Z}_i = -\frac{100}{3}(-0,5 + j 0,134)\% .$$

Se scriu apoi ecuațiile care dau componentele simetrice ale tensiunii pe fază:

$$\bar{V}_h = (\bar{Z}_0 + \bar{Z}_h) \bar{I}_h + \bar{Z}_i \bar{I}_d + \bar{Z}_d \bar{I}_i$$

$$\bar{V}_d = \bar{Z}_d \bar{I}_h + (\bar{Z}_s + \bar{Z}_h) \bar{I}_d + \bar{Z}_i \bar{I}_i$$

$$\bar{V}_i = \bar{Z}_i \bar{I}_h + \bar{Z}_d \bar{I}_d + (\bar{Z}_a + \bar{Z}_h) \bar{I}_i$$

de unde se deduc valorile componentelor simetrice ale curenților. Numeric avem $\bar{V}_h = 0$, $\bar{V}_d = E$; $\bar{V}_i = 0$. Se găsește $\bar{I}_h = E \cdot 10^{-8} (1,5 + j 1,71)$; $\bar{I}_d = E \cdot 10^{-8} (2,07 - j 4,1)$; $\bar{I}_i = E \cdot 10^{-8} (1,63 - j 1,52)$. Componentele simetrice ale tensiunilor pe fază la bornele alternatorului sunt: $\bar{V}'_h = -\bar{Z}_0 \bar{I}_h = E \cdot 10^{-8} (8,55 - j 7,55)$; $\bar{V}'_d = \bar{E} - \bar{Z}_s \bar{I}_d = E \cdot 10^{-8} (-409 - j 207)$; $\bar{V}'_i = -\bar{Z}_a \bar{I}_i = E \cdot 10^{-8} (-45,6 -$

$-j 48,9$). Componentele simetrice ale tensiunilor între faze sunt: $\bar{U}_d = -j \sqrt{3}$
 $V_d' = E \cdot 10^{-3} (-358 + j 850)$; $\bar{U}_t = j \sqrt{3} \bar{V}_t' = E \cdot 10^{-3} (84,5 - j 79)$. Cu aceste
 elemente putem determina tensiunile dintre fază și nul și între faze. Vom avea:
 $\bar{V}_1 = (-54 - j 32)\%$; $\bar{V}_2 = (12 + j 52)\%$; $\bar{V}_3 = (45 - j 23)\%$; $\bar{U}_1 = \bar{U}_{23} =$
 $= (-33 + j 92,5)\%$; $\bar{U}_2 = \bar{U}_{31} = (109,7 - j 13,8)\%$; $\bar{U}_3 = \bar{U}_{12} = (-66,7 -$
 $-j 88,2)\%$. Aceste tensiuni sunt raportate la tensiunea corespunzătoare exci-
 tației de 120%, dată în problemă.

12.14. Schema rețelei este dată în (fig. 12.14. a). Dacă înglobăm impedanțele

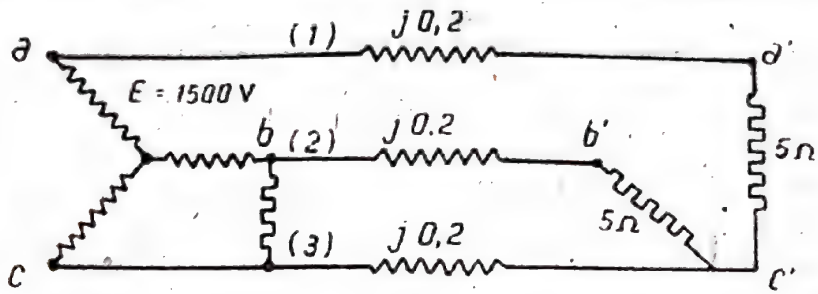


Fig. 12.14. a.

liniei în impedanțele sarcinii, această schemă se transformă după cum se arată
 în (fig. 12.14. b). Se transfigurează triunghiul $b_1c_1(b_2c_2)$ într-o stea, obținându-se
 $b_10 = 2,22 - j 0,01 \Omega$; $c_10 = 0,004 + j 0,09 \Omega$; $(b_2c_2)0 = 0,001 + j 0,11 \Omega$. Cu

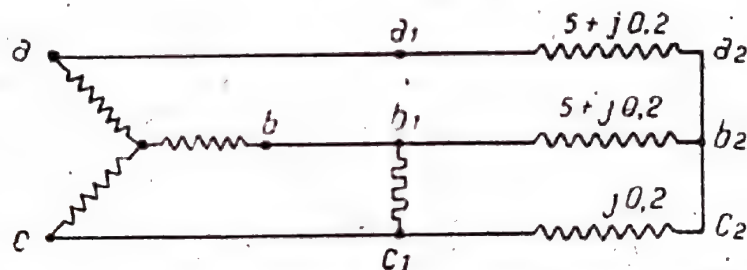


Fig. 12.14. b.

această rețea de utilizare devine (fig. 12.9. c), căreia îi scriem componentele
 simetrice. Vom avea $\bar{S}_h = 2,41 + j 0,13 \Omega$; $\bar{S}_d = 1,33 + j 0,73 \Omega$; $\bar{S}_t = 1,23 -$

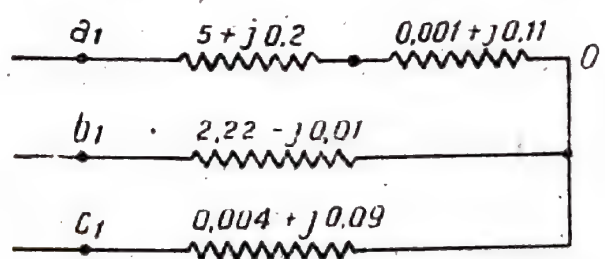


Fig. 12.14. c.

$-j 0,55 \Omega$. Ecuațiile care dau componentele simetrice ale curenților pe linie se
 scriu ușor observând că $\bar{E}_d = E = 1500 \text{ V}$, $\bar{E}_t = 0$ și $\bar{I}_h = 0$. Se găsește
 $\bar{I}_d = 426 - j 130,2 \text{ A}$ și $\bar{I}_t = -77,7 - j 179,6 \text{ A}$. Componentele simetrice ale
 tensiunii pe fază la bornele alternatorului sunt $\bar{V}_d = \bar{E} - \bar{X} \bar{I}_d = 1369,8 - j 426$

V și $\bar{V}_t = -\bar{X}_t \bar{I}_t = -89,8 + j 38,9$ V; iar între faze, $\bar{U}_d = -j \sqrt{3} \bar{V}_d = -737 - j 2369,8$ V și $\bar{U}_t = j \sqrt{3} \bar{V}_t = -67,3 - j 155,4$ V. Rezultă $\bar{U}_1 = \bar{U}_{23} = -804,3 - j 2525,2$ V; $\bar{U}_2 = \bar{U}_{13} = -1515,5 + j 1842,6$ V; $\bar{U}_3 = \bar{U}_{12} = 2319,8 + j 682,6$ V. Pentru găsirea tensiunilor la bornele utilizării, trebuie să găsim curenții reali, deoarece s'a făcut o transfigurare. Avem $\bar{I}_1' = 348,3 - j 309,8$ A; $\bar{I}_2' = -131,4 - j 281,3$ A; $\bar{I}_3' = -216,9 + j 591,1$ A. Se scrie egalitatea tensiunilor între aceleași două puncte pe stea și pe triunghi. Avem $\bar{I}_1'' = 47,6 - j 16,6$ A; $\bar{I}_2'' = -56,6 - j 114,8$ A; $\bar{I}_3'' = 104,2 + j 98,2$ A. Examinând schema vedem imediat că avem: $\bar{I}_c = \bar{I}_1'' = 47,6 - j 16,6$ A; $\bar{I}_b = \bar{I}_2'' = -56,6 - j 114,8$ A și cum $\Sigma \bar{I}_a = 0$... $\bar{I}_a = 9,0 + j 131,4$ A. Căderea de tensiune la utilizare, pe fază, este $\bar{V}_a = \bar{I}_a \bar{Z}_a = 45 + j 659$ V; $\bar{V}_b = \bar{I}_b \bar{Z}_b = -283 - j 574$ V; $\bar{V}_c = \bar{I}_c \bar{Z}_c = 0$. Tensiunea la bornele utilizării va fi $\bar{U}_A = \bar{V}_b - \bar{V}_c = -283 - j 574$ V; $\bar{U}_B = \bar{V}_c - \bar{V}_a = -45 - j 659$ V; $\bar{U}_C = \bar{V}_a - \bar{V}_b = 328 + j 1173$ V.

12.15. Din datele problemei deducem impedanțele alternatorului. Găsim $\bar{Z}_s = 0,484 + j 1,157 \Omega$; $\bar{Z}_a = 0,621 + j 1,163 \Omega$; $\bar{Z}_0 = 2,045 + j 2,650 \Omega$; impedanțele celor trei rețele fictive sunt $\bar{Z}_d = 0,684 + j 2,557 \Omega$; $\bar{Z}_t = 0,821 + j 2,563 \Omega$; $\bar{Z}_0 = 2,445 + j 3,250 \Omega$. [Impedanțele transformatorului au fost recalculate în raport cu joasa tensiune, înmulțindu-se cu raportul $\left(\frac{6}{30}\right)^2$]. Problema

se rezolvă ca și cum scurtcircuitul ar fi fost pe faza 1. La urmă rezultatul se înmulțește cu a pentru a obține faza 3. Se găsește $\bar{I}_1 = 0$ A; $\bar{I}_2 = 0$ A; $\bar{I}_3 = 726 + j 922$ A.

12.16. Problema se rezolvă ca și în cazul precedent, ea tratându-se ca în cazul unui scurtcircuit între fazele 2 și 3 și rezultatul rotindu-se apoi cu 120° în urmă, adică înmulțindu-se cu a^2 . Se obține $\bar{I}_1 = 98,3 - j 72,2$ A; $\bar{I}_2 = 0$ A; $\bar{I}_3 = 80,9 + j 118,7$ A.

12.17. Schema echivalentă a alternatorului este (fig. 12.17. a). Relațiile

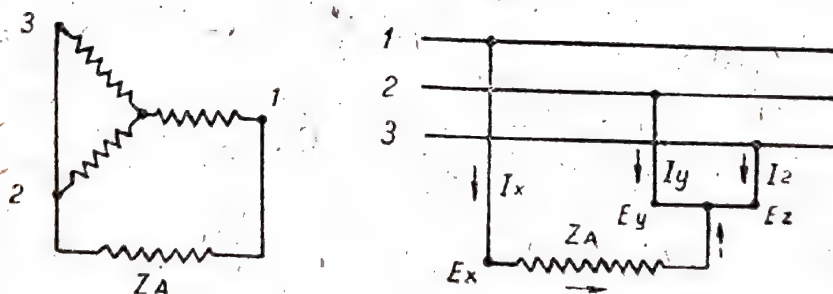


Fig. 12.17 a.

de condiție ale acestui circuit sunt: $\bar{I}_x + \bar{I}_y + \bar{I}_z = 0$ și $\bar{E}_y = \bar{E}_x = \bar{E}_z + \bar{Z}_A \bar{I}_x$, de unde rezultă imediat $\bar{I}_h = 0$. Componentele simetrice ale tensiunilor sunt $\bar{E}_d = \bar{E}_t = -\frac{1}{3} \bar{Z}_A \bar{I}_x$.

Componentele simetrice ale curenților sunt $\bar{I}_d = \frac{1}{3} \left[(a-1) \bar{I}_v + (a^2-1) \bar{I}_z \right]$
 și $\bar{I}_i = \frac{1}{3} \left[(a^2-1) \bar{I}_v + (a-1) \bar{I}_z \right]$, de unde se obține $\bar{I}_d + \bar{I}_i = -(\bar{I}_v + \bar{I}_z) = \bar{I}_\alpha$.

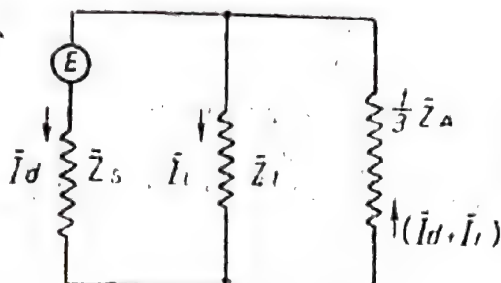


Fig. 12.17 b.

Rezultă $\bar{E}_d = \bar{E}_v = -\frac{\bar{Z}_A}{3} (\bar{I}_d + \bar{I}_i)$ care se poate traduce prin schema echivalentă din fig. 12.17 b, din care se deduce ușor expresia componentelor simetrice ale curenților:

$$\bar{I}_d = \frac{3\bar{Z}_\alpha + \bar{Z}_A}{\bar{Z}_s(3\bar{Z}_\alpha + \bar{Z}_A) + \bar{Z}_\alpha \bar{Z}_A} \bar{E}_\lambda, \quad \bar{I}_i = \frac{-\bar{Z}_A \bar{E}_\lambda}{\bar{Z}_s(3\bar{Z}_\alpha + \bar{Z}_A) + \bar{Z}_\alpha \bar{Z}_A}$$

Spre verificare se scrie $\bar{I}_A = \bar{I}_d + \bar{I}_i$. Curenții pe cele trei faze sunt:

$$\bar{I}_x = \frac{3\bar{Z}_\alpha}{\bar{Z}_s(3\bar{Z}_\alpha + \bar{Z}_A) + \bar{Z}_\alpha \bar{Z}_A} \bar{E}_\lambda, \quad \bar{I}_v = \frac{3a^2\bar{Z}_\alpha + (a^2-a)\bar{Z}_A}{\bar{Z}_s(3\bar{Z}_\alpha + \bar{Z}_A) + \bar{Z}_\alpha \bar{Z}_A} \bar{E}_\lambda;$$

$$\bar{I}_z = \frac{3a\bar{Z}_\alpha - (a^2-a)\bar{Z}_A}{\bar{Z}_s(3\bar{Z}_\alpha + \bar{Z}_A) + \bar{Z}_\alpha \bar{Z}_A} \bar{E}_\lambda.$$

În cazul aplicației numerice se găsește: $\bar{I}_x = 314 - j790$ A; $\bar{I}_v = -1265 + j289$ A; $\bar{I}_z = 586 + j500$ A;

12.18. Problema este analoagă cu problema 12.3 cu deosebirea că sarcinile sunt legate pe fazele 1 și 2. Ea se poate rezolva direct (un bun exercițiu). Rezultatele se pot obține și din rezultatele problemei mai sus indicate în care fazele se rotesc cu 120° înainte, adică se înmulțesc rezultatele cu a . Se găsește:

$$\bar{U}_1 = \bar{U}_{BC} = 5689 - j161 \text{ V}; \quad \bar{U}_2 = \bar{U}_{CA} = -1468 - j5895 \text{ V}; \quad \bar{U}_3 = \bar{U}_{AB} = -4221 + j5734 \text{ V}.$$

12.19. Schema rețelei este dată în fig. 12.19, a și ea corespunde unui

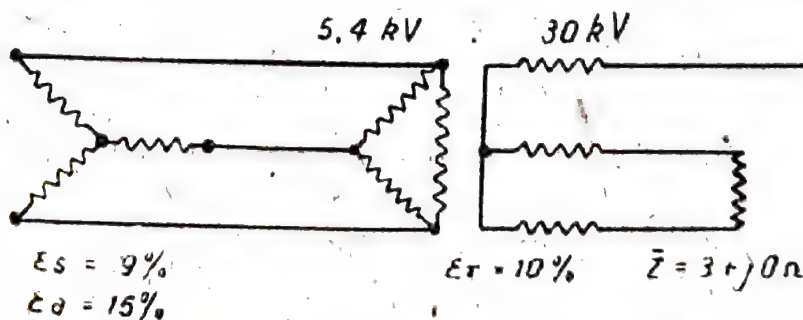


Fig. 12.19, a.

scurtcircuit cu arc între două faze. Rețeaua de secvență directă (fig. 12.19, b).

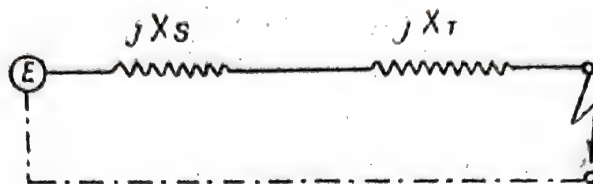


Fig. 12.19, b.

În care s'a luat ca tensiune de referință tensiunea secundară a transformatorului și unde $X_s = \frac{\varepsilon_s}{100} \cdot \frac{U^2}{S} = 5,4 \Omega$ și $X_T = 9 \Omega$. Rețeaua de secvență inversă (fig. 12.19, c) în care $X_a = 4,5 \Omega$ și $X_T = 9 \Omega$. Rezultă $\bar{Z}_d = j 14,4 \Omega$ și $\bar{Z}_i = j 13,5 \Omega$. Componentele simetrice ale curenților sunt $\bar{I}_d = -$, $\bar{I}_i = 65,9 - j 612,5$ A. Tre-când dela transformator la alternator, componenta directă de curent se rotește cu

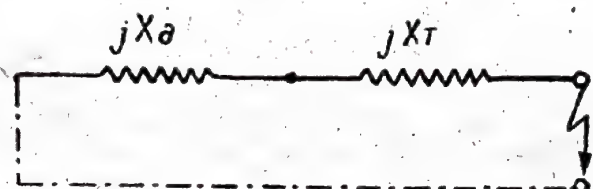


Fig. 12.14, c.

($+ 30^\circ$) iar componenta inversă cu ($- 30^\circ$) și valoarea se înmulțește cu raportul de transformare. Se găsește: $\bar{I}'_d = 2020 - j 2770$ A; $\bar{I}'_i = 1382 + j 3130$ A. Pentru calculul componentelor simetrice ale tensiunii trebuie recalculate reactanțele alternatorului la tensiunea acestuia. Se găsește: $X'_s = 0,175 \Omega$ și $X'_a = 0,146 \Omega$. De unde $\bar{E}_d = 2625 - j 354$ V; $\bar{E}_i = 456 - j 202$ V. Puterea aparentă debi-tată de alternator pe defect este $\bar{S}_T = 3 (\bar{E}_d \bar{I}'_{dc} + \bar{E}_i \bar{I}'_{ic}) = 18,84 + j 14,52$ MVA, al cărui modul este $S = 23,78$ MVA, adică un surplus de putere de $\frac{23,78 - 15}{15} \cdot 100 = 58,5\%$.

12.20. Suntem în cazul unui scurtcircuit bifazat la pământ, cu arc. În cazul de față, impedanța arcului trebuie combinată cu impedanța de punere la pământ a alternatorului. Vom avea $\bar{Z} = 10 + j 10 \Omega$. Problema se tratează prin metoda cunoscută și se găsește: $\bar{I}_d = 170 - j 3924$ A; $\bar{I}_i = - 162 + j 3908$ A; $\bar{I}_h = - 8 + j 16$ A; $\bar{E}_d = \bar{E}_i = \bar{E}_h = \bar{I}_i \bar{Z}_a = 676 - j 246$ V, de unde $\bar{S} = 0$. Aceasta înseamnă că rezistența de punere la pământ a alternatorului, „suflă arc”.

12.21. Impedanța de defect poate fi considerată ca o impedanță în paralel la bornele B'C' ale sarcinii. Se reduc aceste impedanțe și se transfigurează circuitul triunghi obținut. Se calculează curenții folosind relațiile (81). Se face apoi repa-riția în laturile triunghiului și pe defect. Se calculează apoi tensiunea la borne. A se compara rezultatele cu acelea obținute cu ajutorul calculului matri-cial (problema 17,25).

12.22. Defectul corespunde unui scurtcircuit trifazat la pământ. După cum s'a arătat în problema 10.30, $\bar{Z}_d = \bar{Z} - \bar{Z}_m = j 0,8 \Omega$ și $\bar{Z}_h = \bar{Z} + 2 \bar{Z}_m = j 2 \Omega$. Se găsește $\bar{I}_h = j 790$ A, $\bar{I}_d = - j 2770$ A, $\bar{I}_i = j 1980$ A; $\bar{U}_{h1} = \bar{U}_d = - \bar{U}_i = 1580$ V. Aparatele indică valorile eficace ale curenților și tensiunii

corespunzătoare modulelor mărimilor ce se obțin prin compunerea componentelor simetrice. Se găsește $I_0 = 2370$ A, $I_A = 0$, $I_B = I_C = 4220$ A, $U_A = 4740$ V. Tensiunea $U_A > E_{faz}$. Acest fapt se explică prin apariția forțelor electromotoare de inducție datorite fazelor B și C: $\bar{E}_m = -(\bar{I}_B + \bar{I}_C) \bar{Z}_m = 1048$ V.

12.23. Se calculează reactanțele respective și se construiesc cele trei rețele: rețeaua de secvență directă (a), inversă (b) și homopolară (c) (fig. 12.23).

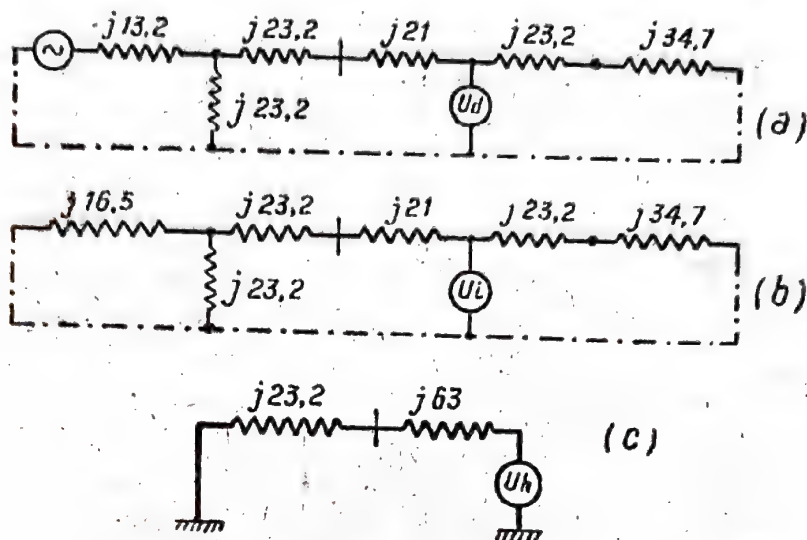


Fig. 12.23

Se reduc aceste reactanțe obținându-se $\bar{X}_d = j 28 \Omega$; $\bar{X}_i = j 28,1 \Omega$; $\bar{X}_h = j 86,2 \Omega$. Pentru a găsi curenții de scurtcircuit în diversele cazuri de defecte se cuplează aceste reactanțe așa cum s'a arătat în § 12.3. Se găsește: a) $\bar{I}_h = \bar{I}_d = \bar{I}_i = 0,465$ kA; $\bar{I}_1 = 1,4$ kA; $\bar{I}_2 = \bar{I}_3 = 0$. b) $\bar{I}_d = 2,33$ kA; $\bar{I}_i = -1,75$ kA; $\bar{I}_h = -0,58$ kA; $\bar{I}_1 = 0$; $\bar{I}_2 = -0,98 - j 3,73$ kA; $\bar{I}_3 = -0,98 + j 3,73$ kA; c) $\bar{I}_h = 0$; $\bar{I}_d = -\bar{I}_i = 2,05$ kA; $\bar{I}_1 = 0$; $\bar{I}_2 = -\bar{I}_3 = -j 3,56$ kA. d) $\bar{I}_d = \bar{I}_1 = 3,5$ kA; $\bar{I}_i = \bar{I}_h = 0$; $\bar{I}_2 = a^2 \bar{I}_1$; $\bar{I}_3 = a \bar{I}_1$.

12.24. Se calculează reactanțele respective, și se construiesc rețelele de secvență directă și inversă, circuitul neavând o rețea de secvență nulă. Reducându-se aceste rețele se găsește $\bar{Z}_d = j 18,66 \Omega$ și $\bar{Z}_i = j 19,95 \Omega$. Se găsește a) $\bar{I}_h = \bar{I}_d = \bar{I}_i = 0,556$ kA; $\bar{I}_1 = 1,668$ kA; $\bar{I}_2 = \bar{I}_3 = 0$. b) $\bar{I}_h = -0,521$ kA; $\bar{I}_d = 1,165$ kA; $\bar{I}_i = -0,644$ kA; $\bar{I}_1 = 0$; $\bar{I}_2 = -0,7815 - j 1,568$ kA; $\bar{I}_3 = -0,7815 + j 1,568$ kA. c) $\bar{I}_h = 0$; $\bar{I}_d = -\bar{I}_i = 0,9$ kA; $\bar{I}_1 = 0$; $\bar{I}_2 = -\bar{I}_3 = -j 1,56$ kA. d) $\bar{I}_h = \bar{I}_i = 0$; $\bar{I}_d = 1,855$ kA; $\bar{I}_1 = 1,855$ kA; $\bar{I}_2 = a^2 \bar{I}_1$; $\bar{I}_3 = a \bar{I}_1$.

Problema se poate continua cu aflarea distribuției curenților de scurtcircuit în rețea, pe toate fazele, precum și tensiunile în diversele puncte ale rețelei. Astfel, pentru cazul (b) curenții debitați de diverși alternatori sunt: Alternatorul A: $\bar{I}_1 = 1,217 + j 1,815$ kA; $\bar{I}_2 = -j 3,63$ kA; $\bar{I}_3 = -1,217 + j 1,815$ kA; Alternatorul B: $\bar{I}_1 = 0,353$ kA; $\bar{I}_2 = -1,244 - j 3,15$ kA; $\bar{I}_3 = -1,244 + j 3,15$ kA. Alternatorul C: $\bar{I}_1 = -0,21$ kA; $\bar{I}_2 = -2,52 - j 4,66$ kA; $\bar{I}_3 = -2,52 + j 4,66$ kA.

12.25. (a) $\bar{I}_w = 3550$ A; $\bar{I}_v = \bar{I}_s = 0$; (b) $\bar{I}_w = 0$; $\bar{I}_v = 2400 - j 2800$ A; $\bar{I}_s = -2400 - j 2800$ A; (c) $\bar{I}_w = 0$; $\bar{I}_v = -\bar{I}_s = -j 2500$ A. $\bar{V}_w = j 56340$ V; $\bar{V}_v = 40630 - j 27300$ V; $\bar{V}_s = -38500 - j 27300$ V.

12.26. (a) $\bar{I}_x = 3180 \text{ A}$; $\bar{I}_y = \bar{I}_z = 0$; (b) $\bar{I}_x = 0$; $\bar{I}_y = -1509 - j 2970 \text{ A}$; $\bar{I}_z = -1509 + j 2970 \text{ A}$; (c) $\bar{I}_x = 0$; $\bar{I}_y = -j 2950 \text{ A}$; $\bar{I}_z = j 2950 \text{ A}$.

12.27. Cuptorul poate fi echivalat cu un scurt circuit între două faze cu o impedanță. Gradul de desimetrie este

$$\frac{|\bar{V}_i|}{|\bar{V}_d|} = \frac{|-\bar{Z}_i \bar{I}_i|}{|\bar{E} - \bar{Z}_d \bar{I}_d|}$$

Punând \bar{S}_3 puterea de scurt circuit, \bar{S}_0 puterea cuptorului, \bar{Z} impedanța cuptorului și \bar{U} tensiunea rețelei, se poate scrie

$$\bar{S}_3 = \frac{U^2}{\bar{Z}_d} \text{ și } \bar{S}_0 = \frac{U^2}{\bar{Z}} \therefore U^2 = \bar{S}_0 \bar{Z} \therefore \bar{S}_3 = \frac{\bar{Z}}{\bar{Z}_d} \bar{S}_0 \therefore \bar{Z}_d = \bar{Z} \frac{\bar{S}_0}{\bar{S}_3}$$

Luând $\bar{Z}_d \approx \bar{Z}_i$ (ceiace corespunde realității) se obține $\bar{I}_d = -\bar{I}_i = \frac{\bar{E}}{2\bar{Z}_d + \bar{Z}}$

$= \frac{\bar{E} \bar{S}_3}{2\bar{S}_0 \bar{Z} + \bar{S}_3 \bar{Z}}$. Înlocuind în expresia gradului de disimetrie se obține

$$\frac{|\bar{V}_i|}{|\bar{V}_d|} = \frac{|\bar{S}_0|}{|\bar{S}_3| + |\bar{S}_0|} = \frac{2,5}{40 + 2,5} = 5,9\%$$

12.28. Schema echivalentă este a unui scurtcircuit al unei faze la pământ cu arc (fig. 21). Se găsește: $\bar{I}_d = \bar{I}_i = \bar{I}_h = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}}$. Apoi $\bar{E}_d = \bar{E} - \bar{Z}_s \bar{I}_d = (\bar{Z}_0 + \bar{Z}_a + 3\bar{Z}_L) \frac{\bar{E}}{\bar{Z}}$; $\bar{E}_i = -\bar{Z}_a \frac{\bar{E}}{\bar{Z}}$; $\bar{E}_h = -\bar{Z}_0 \frac{\bar{E}}{\bar{Z}}$. Se calculează: $\bar{S}_h = 3\bar{E}_h \bar{I}_h$ etc. și făcând suma se găsește relația din enunț.

12.29. Sistemul este echivalent cu acela al unei sarcini nesimetrice, alimentată cu o sursă trifazată simetrică, dar de putere limitată. Se neglijează impedanțele conductorilor. Ecuațiile sistemului sunt:

$$\begin{aligned} \bar{E}_d &= (\bar{Z}_h + \bar{Z}_s) \bar{I}_d + \bar{Z}_i \bar{I}_i \\ \bar{E}_i &= \bar{Z}_d \bar{I}_d + (\bar{Z}_h + \bar{Z}_a) \bar{I}_i = 0 \end{aligned}$$

din care se calculează componentele simetrice ale curentului și apoi curenții pe fază. Pentru a găsi tensiunile la bornele alternatorului se scriu componentele simetrice ale tensiunii: $\bar{V}_d = \bar{E} - \bar{Z}_s \bar{I}_d$; $\bar{V}_i = -\bar{Z}_a \bar{I}_i$; $\bar{V}_h = -\bar{Z}_0 \bar{I}_h = 0$ și, ținând seama de relațiile (68), se deduce: $\bar{U}_1 = \bar{U}_{23} = j\sqrt{3}(-\bar{V}_d + \bar{V}_i)$; $\bar{U}_2 = \bar{U}_{31} = ja\sqrt{3}(-a\bar{V}_d + \bar{V}_i)$; $\bar{U}_3 = \bar{U}_{12} = ja\sqrt{3}(-\bar{V}_d + a\bar{V}_i)$. Numeric se găsește: $\bar{Z}_s = j 2 \Omega$; $\bar{Z}_a = j 3 \Omega$; $\bar{Z}_h = 4 + j \Omega$; $\bar{Z}_d = 1 + j 2 \Omega$; $\bar{Z}_i = 1 \Omega$; $\bar{I}_d = 35 - j 30,5 \text{ A}$; $\bar{I}_i = -11,3 + j 16,9 \text{ A}$; $\bar{I}_1 = 23,7 - j 13,6 = 27,3 \angle -29^\circ 50' \text{ A}$; $\bar{I}_2 = -52,9 - j 33,4 = 62,56 \angle 218^\circ 20' \text{ A}$; $\bar{I}_3 = 27,3 + j 46,8 = 54,18 \angle 59^\circ 0' \text{ A}$; $\bar{U}_d = -121 - j 276 \text{ V}$; $\bar{U}_i = -58,8 + j 88 \text{ V}$; $\bar{U}_1 = -179,8 - j 188 = 260 \angle 226^\circ 15' \text{ V}$; $\bar{U}_2 = -225,3 + j 147,9 = 270 \angle 146^\circ 25' \text{ V}$; $\bar{U}_3 = 405,0 + j 40,1 = 407 \angle 5^\circ 40' \text{ V}$.

12.30. Problema este echivalentă cu un scurtcircuit al unei faze la pământ (fig. 21). Se găsește $\bar{I}_h = \bar{I}_d = -\bar{I}_i = j 0,74$. Din $\bar{E}_d = \bar{E} - \Sigma \Delta \bar{E}_d$; etc. se găsește $\bar{E}_d = 0,26$; $\bar{E}_i = -0,222$; $\bar{E}_h = -0,037$. Pentru al doilea alternator se ia $\bar{E}'_d = 0,26 \angle -30^\circ$. De aici $\bar{E}_b = \bar{E}_h + a^2 \bar{E}'_d + a \bar{E}_i = -0,056 - j 0,41693$; $\bar{E}'_b = \bar{E}_h + a^2 \bar{E}'_d + a \bar{E}_i = -0,1509 - j 0,32203$. Rezultă $\bar{E}_b - \bar{E}'_b = 0,0949 - j 0,0949 = 0,133809 \angle -45^\circ$. La fel $\bar{E}_c = -0,056 + j 0,41693$; $\bar{E}'_c = 0,074 + j 0,45203$ și $\bar{E}_c - \bar{E}'_c = -0,130 - j 0,0351 = 0,1346 \angle 195^\circ 10'$.

12.31. Triunghiul format din forțele electromotoare E date în serie cu impedanțele respective se poate transfigura într-o stea la care razele sunt formate din forțe electromotoare egale cu $E/\sqrt{3}$ în serie cu impedanțele echivalente rezultând din transfigurare. Aceasta se poate arăta ușor scriind că diferențe de potențial la borne este aceeași atât în montajul triunghi cât și în acela stea. (A se demonstra). Tensiunile date sunt $\bar{E}_{AB} = 220 \angle 0^\circ$, $\bar{E}_{BC} = 220 \angle -120^\circ$, $\bar{E}_{CA} = 220 \angle 120^\circ$, având componentele simetrice: $\bar{E}_d = 220 \angle 0^\circ$ și $\bar{E}_i = 0$. Componentele simetrice ale sistemului stea corespunzător sunt $\bar{E}'_d = 127 \angle -30^\circ$ și $\bar{E}'_i = 0$. Impedanțele date pot fi scrise $\bar{Z}_{AB} = 1 \angle 60^\circ \Omega$, $\bar{Z}_{BC} = 0,2 \angle 60^\circ \Omega$, $\bar{Z}_{CA} = 1 \angle 60^\circ \Omega$. Prin transfigurare rezultă $\bar{Z}_A = 0,455 \angle 60^\circ \Omega$, $\bar{Z}_B = 0,091 \angle 60^\circ \Omega = \bar{Z}_C$. Se deduce $\bar{Z}_h = 0,212 \angle 60^\circ \Omega$, $\bar{Z}_d = \bar{Z}_i = 0,121 \angle 60^\circ \Omega$. Sarcina are impedanța $\bar{Z} = 2 \angle 60^\circ \Omega$. Ecuațiile circuitului sunt $\bar{E}'_d = (\bar{Z}_h + \bar{Z}) \bar{I}_d + \bar{Z}_i \bar{I}_i$ și $0 = \bar{Z}_d \bar{I}_d + (\bar{Z}_h + \bar{Z}) \bar{I}_i$, de unde rezultă $\bar{I}_d = -j 57,5$ A și $\bar{I}_i = j 3,2$ A. Componentele simetrice ale tensiunii la borne sunt $\bar{V}_d = \bar{E}'_d - \bar{Z}_h \bar{I}_d + \bar{Z}_i \bar{I}_i = 100,8 - j 57,6$ V și $\bar{V}_i = -(\bar{Z}_h \bar{I}_i + \bar{Z}_d \bar{I}_d) = -5,5 + j 3,2$ V. Se deduc componentele simetrice ale tensiunilor între faze la bornele transformatorului $\bar{U}_d = \bar{V}_d \sqrt{3} \angle 30^\circ = 200,8 - j 0,9$ V și $\bar{U}_i = \bar{V}_i \sqrt{3} \angle -30^\circ = -5,5 + j 9,6$ V. Rezultă tensiunile căutate $\bar{U}_{AB} = 195,3 + j 8,7$ V, $\bar{U}_{BC} = -106,7 - j 183,0$ V, $\bar{U}_{CA} = -88,6 + j 174,3$ V.

12.32. (a) Sistemul de tensiuni dat corespunde sistemului în triunghi incomplet $\bar{E}_{AB} = 120 \angle 180^\circ$, $\bar{E}_{BC} = 120 \angle 0^\circ$; $\bar{E}_{CA} = 0$, având componentele simetrice $\bar{E}_d = -60 + j 34,64$ V și $\bar{E}_i = -60 - j 34,64$ V. Componentele pe fază sunt $\bar{E}'_d = -20 - j 34,7$ V și $\bar{E}'_i = 20 - j 34,7$ V. Se transfigurează sarcina găsindu-se $Z = 15 \Omega$ pe fază, care cu rezistența liniei dă $R = 20 \Omega$. Se găsește $\bar{Z}_h = 20 \Omega$, $\bar{Z}_d = \bar{Z}_i = 0$. Aplicând relațiile (81) rezultă $\bar{I}_d = 2 \angle -120^\circ$ A și $\bar{I}_i = 2 \angle -60^\circ$ A; (b) $\bar{I}_A = j 3,46$ A, $\bar{I}_B = 0$, $\bar{I}_C = -j 3,46$ A.

(c) Se determină în prealabil componentele simetrice ale tensiunilor la borne pe fază din $\bar{V}_d = \bar{E}'_d - R_L \bar{I}_d$, etc., din care se deduc apoi componentele simetrice ale sistemului triunghi. Se obține $\bar{U}_{AB} = 52 \angle 90^\circ$ V, $\bar{U}_{BC} = 52 \angle 90^\circ$, $\bar{U}_{CA} = 104 \angle -90^\circ$ V.

(d) $P = \Re (3 \bar{V}_d \bar{I}_d^* + 3 \bar{V}_i \bar{I}_i^*) = 360$ W.

12.33. (a) Luând ca origină de fază tensiunea \bar{U}_{AB} și ținând seamă de factorii de putere dați, se găsește $\bar{I}_{AB} = 70,7 - j 70,7$ A, $\bar{I}_{BO} = -188 - j 17,9$ A, $\bar{I}_{OA} = 117,3 + j 88,6$ A. Componentele simetrice ale acestor curenți sunt $\bar{I}_d = 66,1 - j 123,5$ A și $\bar{I}_i = 4,6 + j 52,8$ A. Componentele simetrice ale curenților din linii sunt $\bar{I}_d = j \sqrt{3} \bar{I}_d = -212,7 - j 114,4$ A și $\bar{I}_i = j \sqrt{3} \bar{I}_i = -91,4 + j 8,0$ A.

(b) Combinând componentele simetrice se găsește $\bar{I}_A = 36,6 + j 159,3$ A, $\bar{I}_B = 258,7 - j 52,8$ A, $\bar{I}_O = -304,1 - j 106,4$ A.

Atențiune la vectorul principal al sistemului liniar.

(c) $P_1 = \Re(\bar{U}_{AO} \bar{I}_A^*) = 26324$ W, $P_2 = \Re(\bar{U}_{BO} \bar{I}_B^*) = 18502$ W $P = P_1 + P_2 = 44826$ W.

12.34. Se consideră sistemul de tensiuni ca o stea incompletă. Componentele simetrice ale tensiunii sunt $\bar{E}_d = 13,7 + j 63,5$ V și $\bar{E}_i = 13,7 - j 63,5$ V.

Deasemenea sarcina este considerată ca o stea nesimetrică cu $Z_A = Z_C = 15,5$ și $Z_B = 0,5 \Omega$. Rezultă $\bar{Z}_h = 10,5$, $\bar{Z}_d = 2,5 - j 4,33 \Omega = \bar{Z}_i^*$.

Scriind ecuațiile sistemului rezultă $\bar{I}_d = -1,95 + j 9,0$ A și $\bar{I}_i = \bar{I}_d^*$. Puterea absorbită de instalație este

$$P_1 = 3 \Re[\bar{E}_d \cdot \bar{I}_d^* + \bar{E}_i \cdot \bar{I}_i^*] = 3268,7 \text{ W.}$$

sau ținând seama de precizia contorului $P_1 = 3,3$ kW. Energia consumată lunar este $W_1 = 660$ kWh. Costul alimentării cu electricitate a instalației este 82,50 lei.

În al doilea caz, sistemul este simetric. Rezultă $P_2 = 6,1$ kW și deci o utilizare de 110 ore. Costul alimentării cu electricitate în acest caz este 96,50 lei, adică un spor de 4,85 % în schimb timpul de utilizare s'a redus aproape la jumătate astfel că, în același timp s'a dublat producția, ceea ce este un avantaj care compensează sporul de cheltuială.

PARTEA IV

13. 13.1. Curentul tranzitoriu este $i = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right)$. Trebuie să avem $i = \frac{999}{1000} \frac{E}{R}$ se deduce $t = \frac{L}{R} \ln 1000$. Numeric $t = 0,05$ s.

13.2. Ca mai sus. Se găsește $t = 0,032$ s.

13.3. Se presupune întreaga capacitate concentrată la mijlocul cablului. Circuitul devine un condensator în serie cu o rezistență, alimentat de o forță electromotivă alternativă. Rezistența este egală cu jumătate din rezistența cablului. Se aplică principiul suprapunerii efectelor, studiind încărcarea produsă de fiecare armică. Pentru studiul curentului de încărcare se aplică relațiile (86) și (87). Se găsește:

$$i_1 = I_1 \cos(\omega t + \psi + \varphi_1) + I_3 \cos(3\omega t + \psi + \varphi_3) + \frac{1}{RC\omega} \left[I_1 \sin(\psi + \varphi_1) + \frac{1}{3} I_3 \sin(\psi + \varphi_3) \right] e^{-\frac{t}{RC}} \text{ în care:}$$

$$I_1 = \frac{E_1}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2 \omega^2}}}$$

$$\lg \varphi_1 = \frac{1}{\omega CR}$$

$$I_2 = \frac{E_2}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{3 C^2 \omega^2}}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{1}{3 \omega C R}$$

Numeric se găsește, pentru maximum de curent, ce se produce pentru $\psi = 0$:

$$i = 197,5 \cos(\omega t + 76^\circ 06') + 22,4 \cos(3\omega t + 53^\circ 07') + 788,8 e^{-3850 t}.$$

13.4. Problema se rezolvă ca și precedenta. Se găsește $I_{(0)\max} = \frac{E}{R} \cos \psi =$

$$= 14700 \text{ A}; I_p = \frac{4,2}{\sqrt{2}} = 2,97 \text{ A}. \frac{i_{(0)\max}}{I_p} = 4940. \text{ Constanta de timp a circui-}$$

tului este $\tau = RC = 0,94 \cdot 10^{-6} \text{ s}$, adică $\frac{50 T \cdot \tau}{T} = 47 \cdot 10^{-6}$ dintr'o perioadă.

13.5. Înainte de variația inductanței $i = \frac{10}{\sqrt{2}} \sin(\omega t - 45^\circ)$. Rezultă

$i_0 = -5 \text{ A}$. După variația inductanței $i_p = 5 \sin(\omega t - 60^\circ)$. Rezultă $i_{p0} = -4,34 \text{ A}$. Deci curentul transitoriu $i = 5 \sin(\omega t - 60^\circ) - 0,66 e^{-181,5 t} \text{ A}$.

Variația curentului se stabilește ușor.

13.6. Problema se rezolvă ca și precedenta. Se găsește:

$$i = 11,35 \cos(\omega t - 45^\circ) - 1,07 e^{-314 t} \text{ A}.$$

13.7. Se găsește:

$$u = 2000 \sin(\omega t + 45^\circ) - 7,0 e^{-314 t} \text{ V}.$$

13.8. Linia fii id perfect simetrică și bine izolată, poate fi studiat ca un circuit monofazat pentru fiecare fază în parte. Circuitul va fi format din cele trei impedanțe în serie, care sunt închise pe sursa de curent alternativ. Se găsește $R = 42,1 \Omega$ și $L = 0,416 \text{ H}$. De unde, aplicându-se teoria cunoscută se găsește $i_{\max} = 493 \text{ A}$ și $t = 4,55 \times 10^{-2} \text{ s}$.

13.9. Se utilizează relația (85) ¹⁰. Se găsește $i = \frac{E}{Z_2} \sin(\omega t + \psi - \varphi_2) +$

$$+ E \left[\frac{\sin(\psi - \varphi_1)}{Z_1} - \frac{\sin(\psi - \varphi_2)}{Z_2} \right] e^{-\frac{R_2}{L} t} = \frac{10}{\sqrt{5}} \sin(\omega t + \psi - 26^\circ 34') +$$

$$+ 10 \left[\frac{\sin(\psi - 45^\circ)}{\sqrt{2}} - \frac{\sin(\psi - 26^\circ 30')}{\sqrt{5}} \right] \times e^{-690 t}.$$

²⁰ Tensiunea la bornele inductanței fiind $e_L = L \frac{di}{dt}$, rezultă că maximum acestei tensiuni va fi în același timp cu maximum curentului. Se calculează

$\left(\frac{di}{dt} \right)_{t=0}$ și se găsește ecuația:

$$\sin \psi = \frac{Z_2}{Z_1} \cos \varphi_2 \sin(\psi - \varphi_1),$$

$$\text{sau numeric} \quad \sin \psi = \sqrt{2} \sin(\psi - 45^\circ),$$

de unde: $\psi = 90^\circ$. Rezultă:

$$u = -\frac{EL\omega}{Z_2} \sin(\omega t - \varphi_2) - ER_2 \left[\frac{\cos \varphi_1}{Z_1} - \frac{\cos \varphi_2}{Z_2} \right] e^{-\frac{R_2}{L} t} =$$

$$- \frac{1000}{\sqrt{5}} \sin(\omega t - 26^\circ 30') - 600 e^{-690 t}.$$

Maximul acestei valori se poate determina grafic. El este cu suficientă aproximație, pentru $t = \frac{\pi}{2\omega} + \frac{\varphi_2}{\omega} = \frac{7}{75}$ s. De unde $U = -\frac{1000}{\sqrt{5}}$ V deoarece termenul exponențial este $2,9 \cdot 10^{-27}$, deci neglijabil. Curba se construiește ușor.

13.10. Aplicându-se relația (85) se găsește imediat :

$$i = \frac{E}{R} + \frac{E}{R} [\cos \varphi \sin (\psi - \varphi) - 1] e^{-\frac{R}{L} t} \text{ în care } \operatorname{tg} \varphi = \frac{L \omega}{R}.$$

$$13.11. i = \frac{E}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \sin (\omega t + \psi - \varphi) + \frac{E}{R} [1 - \cos \varphi \sin (\psi - \varphi)] \times \\ \times e^{-\frac{R}{L} t} \text{ în care } \operatorname{tg} \varphi = L \omega / R.$$

13.12. Se aplică relația (85). Curentul debitat de sursă este :

$$i = E \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \left(1 - e^{-\frac{R_1 R_2}{L_1 (R_1 + R_2)} t} \right),$$

iar curenții în cele două impedanțe :

$$i_1 = i \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{E}{R_1} \left(1 - e^{-\frac{R_1 R_2}{L_1 (R_1 + R_2)} t} \right)$$

$$i_2 = i \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{E}{R_2} \left(1 - e^{-\frac{R_1 R_2}{L_1 (R_1 + R_2)} t} \right).$$

13.13. Problema comportă două părți distincte :

a) încărcarea condensatorului C_1 , la închiderea întrerupătorului tensiunea trecând de la U_1 la U ; b) descărcarea condensatorului C_2 . Se aplică relațiile (86), (87) și (88). Se găsește :

$$a) q_1 = C_1 U \left(1 - \frac{C_2}{C_1 + C_2} e^{-\frac{t}{R_1 C_1}} \right) = 0,15 (1 - 0,2 e^{-4t}) \text{ C.}$$

$$i_1 = \frac{U}{R_1} \cdot \frac{C_2}{C_1 + C_2} e^{-\frac{t}{R_1 C_1}} = 0,12 e^{-4t} \text{ A.}$$

$$u_1 = U \left[1 - \frac{C_2}{C_1 + C_2} e^{-\frac{t}{R_1 C_1}} \right] = 3000 (1 - 0,2 e^{-4t}) \text{ V.}$$

$$b) q_2 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} U e^{-\frac{t}{R_2 C_2}} = 0,12 e^{-5t} \text{ C.}$$

$$i_2 = -\frac{U}{R_2} \cdot \frac{C_1}{C_1 + C_2} e^{-\frac{t}{R_2 C_2}} = -0,024 e^{-5t} \text{ A}$$

$$u_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} U e^{-\frac{t}{R_2 C_2}} = 600 e^{-5t} \text{ V.}$$

13.14. a) Inchizând întrerupătorul, fiecare condensator se va descărca pe rezistența respectivă cu care este șuntat. Aplicând relațiile indicate în problema precedentă se găsește :

$$i_1 = -\frac{U}{R_1} \cdot \frac{C_2}{C_1 + C_2} e^{-\frac{t}{R_1 C_1}} = -0,2 e^{-2t} \text{ A.}$$

$$i_2 = -\frac{U}{R_2} \cdot \frac{C_1}{C_1 + C_2} e^{-\frac{t}{R_2 C_2}} = -e^{-5t} \text{ A.}$$

b) Curentul din rezistențe se obține adăugând curentului permanent curentul de descărcare al condensatorilor care este de același sens. Se găsește :

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2} = 0,5 \text{ A}$$

și deci :

$$i_{R_1} = 0,5 + 0,2 e^{-2t} = 0,5 (1 + 0,4 e^{-2t}) \text{ A.}$$

$$i_{R_2} = 0,5 (1 + 2 e^{-5t}) \text{ A.}$$

c) Curentul tranzitoriu debitat de pilă est :

$$i_p = 0,5 (1 + 0,4 e^{-2t} + 2 e^{-5t}) \text{ A}$$

d) Se găsește ușor :

$$u_1 = 2000 (1 - e^{-2t}) \text{ V.}$$

$$u_2 = 1000 (1 - e^{-5t}) \text{ V}$$

13.15. La încărcare, deoarece :

$$\Omega' = 3873, \delta = 5000, \operatorname{tg} \alpha' = 0,7746 \dots \alpha' = 1,032 \text{ rad.},$$

se aplică relația (90) și se găsește :

$$u_1 = 120 - 98,4 e^{-5000t} \operatorname{sh} (3873t + 1,032) \text{ V.}$$

Curba tensiunii libere are un maxim (negativ) pentru $t = 0$, ceea ce se deduce prin anularea derivatei.

La descărcare :

$$\Omega' = j 866, \delta = 500, \operatorname{tg} \alpha = 1,732 \dots \alpha = 1,047 \text{ rad.}$$

se aplică relația (91) și se găsește :

$$u_2 = 138 e^{-500t} \sin (866t - 1,047)$$

Tensiunea se anulează pentru :

$$t = \frac{k}{866} \pi - \frac{1,047}{866}$$

și are maximele la :

$$t = \frac{k\pi}{866}$$

Curba se reprezintă ușor.

13.16. La încărcare :

$$\Omega' = j 866, \delta = 500, \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3} \dots \alpha = 60^\circ = 1,047 \text{ rad.}$$

se aplică relația (91) și se găsește :

$$u_1 = 120 - 138 e^{-500t} \sin(866t + 1,047) \text{ V.}$$

Zerourile și maximele tensiunii libere au loc la aceleași timpuri ca în cazul problemei precedente. Tensiunea la bornele condensatorului va porni de la valoarea zero și va oscila în jurul tensiunii de 120 V până la stabilirea regimului permanent. Maximul tensiunii este la timpul $\frac{\pi}{866}$ și are valoarea 139,8 V, adică

o supratensiune de 17%. Se poate calcula după câte oscilații tensiunea la bornele condensatorului nu diferă decât cu 10^{-3} din tensiunea la bornele bateriei. Se găsesc patru oscilații.

La descărcare :

$$\Omega' = 49900, \delta = 50000, \operatorname{tg} h \alpha' = 0,998 \therefore \alpha' = 3,5 \text{ rad.}$$

se aplică relația (90) și se găsește :

$$u_2 = 7,61 e^{-50000t} \operatorname{sh}(49900t + 3,5) \text{ V.}$$

Curba tensiunii are un maxim foarte apropiat de zero.

Curba variației tensiunii la bornele condensatorului se construiește ușor.

13.17. Se determină curentul de încărcare al condensatorului cu ajutorul relației (87). Deasemenea la descărcare. Se calculează energia disipată în rezistență la încărcare și energia disipată în rezistența respectivă la descărcare. Găsindu-se aceeași valoare $\frac{1}{2} CE^2$. Se deduce că randamentul este de 50%. Randamentul nu poate fi mărit.

13.18. Se aplică relațiile (87) și (88) și se găsește :

$$i_2 = i_3 = \frac{1}{R_2 + R_3} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_1 e^{-\frac{t}{(R_2 + R_3)C}} \quad \text{și}$$

$$u = U_2 - \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_1 e^{-\frac{t}{(R_2 + R_3)C}}$$

Numeric se găsește $i_2 = i_3 = 0,05 e^{-t} \text{ A}$; $u = 5500 - 1000 e^{-t} \text{ V}$; $i'_2 = 0,075 e^{-t} \text{ A}$

13.19. Se deduce tensiunea u_0 la bornele rezistenței de $1 \text{ M}\Omega$, pornind de la relația (88). Se găsește astfel pentru primul interval $i_a = k U_0 e^{-\frac{t}{RC}} = k \cdot 10 e^{-10t}$. Pentru al doilea interval, q_0 corespunde la timpul $t = 0,05 \text{ s}$. Se găsește $i' = -k U_0 e^{-\frac{t_1 - t}{RC}}$ și deci curentul total este $i_a = k U_0 \left(1 - e^{-\frac{t_1}{RC}} \right) e^{-\frac{t}{RC}}$. Numeric $i_a = k \cdot 10 (1 - \sqrt{e}) e^{-10t} = -k \cdot 6,49 e^{-10t} \text{ mA}$. În cazul micșorării intervalului se găsește: $i_a = k \cdot 10 e^{-10t} \text{ mA}$ și $i_a = -k \cdot 0,51 e^{-10t} \text{ mA}$.

13.20. Se pornește de la relația (85) și se ține seama că valoarea curentului dintr-o perioadă este valoarea i_0 pentru perioada următoare la timpul $t = t_n$. Se găsește :

$$\begin{aligned} \text{pentru } 0 \leq t \leq t_1 & \quad i = 5 (1 - e^{-10^3 t}) \text{ A} \\ \text{pentru } t_1 \leq t \leq 2t_1 & \quad i = 5 [-e^{-10^3 t} + e^{-10^3 (t - t_1)}] \text{ A} \\ \text{pentru } 2t_1 \leq t \leq 3t_1 & \quad i = 5 [1 - e^{-10^3 t} + e^{-10^3 (t - t_1)} - e^{-10^3 (t - 2t_1)}] \text{ A} \\ \text{pentru } 3t_1 \leq t \leq 4t_1 & \quad i = 5 [-e^{-10^3 t} + e^{-10^3 (t - t_1)} - \\ & \quad - e^{-10^3 (t - 2t_1)} + e^{-10^3 (t - 3t_1)}] \text{ A. etc.} \end{aligned}$$

13.21. Se procedează ca și în cazul precedent, găsindu-se :
pentru $0 \leq t \leq t_1$.

$$i = 4 \left(1 - e^{-\frac{1}{3} 10^3 t} \right) \text{ A ;}$$

pentru $t_1 \leq t \leq t_1 + t_2$.

$$i = 4 \left[-e^{-\frac{1}{3} 10^3 t} + e^{-\frac{1}{3} 10^3 (t - t_1)} \right] \text{ A ;}$$

pentru $t_1 + t_2 \leq t \leq t_1 + t_2 + t_3 = T$,

$$i = 4 \left[1 - e^{-\frac{1}{3} 10^3 t} + e^{-\frac{1}{3} 10^3 (t - t_1)} - e^{-\frac{1}{3} 10^3 (t - t_1 - t_2)} \right] \text{ A ;}$$

pentru $T \leq t \leq T + t_2$

$$i = 4 \left[-e^{-\frac{1}{3} 10^3 t} + e^{-\frac{1}{3} 10^3 (t - t_1)} - e^{-\frac{1}{3} 10^3 (t - t_1 - t_2)} + e^{-\frac{1}{3} 10^3 (t - t_1 - t_2 - t_3)} \right] \text{ A.}$$

13.22. Se procedează ca și în cazul problemei 13.19. Problema se poate rezolva prin suprapunerea efectelor, curba impuls fiind presupusă ca rezultanta a două curbe de salt U_1 , decalate cu t_1 și cu amplitudinea de sens contrar. Se aplică relația (85) și se scrie tensiunea la bornele inductanței L_1 . Se găsește, pentru inter-

valul $0 < t < t_1$, $i_a = k U_1 e^{-\frac{R_1}{L_1} t} = k 10 e^{-20 t} \text{ mA}$; pentru intervalul $t > t_1$,

$i_a = -k U_1 \left(e^{\frac{R_1}{L_1} t} - 1 \right) e^{-\frac{R_1}{L_1} t_1} = -k 63,89 e^{-20 t} \text{ mA}$. Dacă $t_1 = 0,01 \text{ s}$, se găsește $i_a = k U_1 e^{-20 t}$ și $i_a = -k 2,214 e^{-20 t} \text{ mA}$.

13.23. Se procedează ca în cazul precedent și se găsește : a) $T = 0,2 \text{ s}$, pentru $0 \leq t \leq 0,1 \text{ s}$, $u_\theta = -3,38 \cos(31,4 t - 57^\circ 30') + 1,82 e^{-20 t} \text{ mV}$; pentru $0,1 \leq t \leq \infty$, $u_\theta = 15,2 e^{-20 t} \text{ mV}$. b) $T = 0,02 \text{ s}$ pentru $0 \leq t \leq 0,1 \text{ s}$, $u_\theta = -4 \cos(314 t - 86^\circ 20') + 0,255 e^{-20 t} \text{ mV}$; pentru $0,1 \leq t \leq \infty$, $u_\theta = 0,566 e^{-20 t} \text{ mV}$.

13.24. a) $T = 0,2 \text{ s}$, pentru $0 \leq t \leq 0,05 \text{ s}$, $u_\theta = 3,38 \sin(31,4 t - 57^\circ 30') - 1,55 e^{-20 t} \text{ mV}$; pentru $0,05 \leq t \leq \infty$, $u_\theta = 3,795 e^{-20 t} \text{ mV}$. b) $T = 0,02 \text{ s}$, pentru $0 \leq t \leq 0,005 \text{ s}$, $u_\theta = 4 \sin(314 t - 86^\circ 28') - 0,0163 e^{-20 t} \text{ mV}$; pentru $0,005 \leq t \leq \infty$, $u_\theta = 0,2657 e^{-20 t} \text{ mV}$.

13.25. a) $t_1 = 0,1 \text{ s}$; pentru $0 \leq t \leq 0,1 \text{ s}$, $u_\theta = 2(e^{-20 t} - 1) \text{ mV}$; pentru $0,1 \leq t \leq \infty$, $u_\theta = -12,74 e^{-20 t} \text{ mV}$. b) $t_1 = 0,01 \text{ s}$; pentru $0 \leq t \leq 0,01 \text{ s}$, $u_\theta = 20(e^{-20 t} - 1) \text{ mV}$; pentru $0,01 \leq t \leq \infty$, $u_\theta = -4,4 e^{-20 t} \text{ mV}$.

13.26. În relația (86) se pune condiția ca $(q_0 - q_{p0}) = 0$ sau $q_{p0} = 0$ deoarece $q_0 = 0$; de unde rezultă $\psi = 90^\circ - \varphi$, care este condiția cerută. Diagrama se

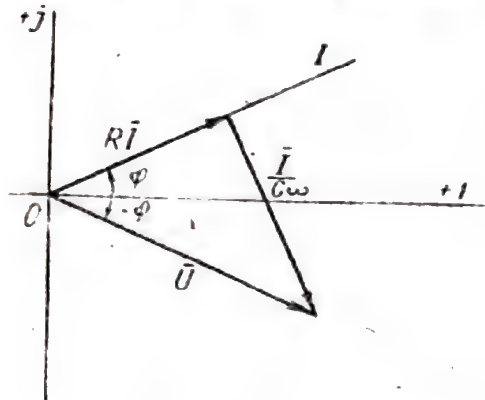


Fig. 13.26

construiește ținând seama de convenția făcută (V. § 3.1) și se obține fig. 13.26. Când tensiunea este dată sub a doua formă, atunci:

$$\psi = -\varphi \text{ și diagrama este aceeași } \left(\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{RC\omega} \right).$$

13.27. În relația (85) se face $i_p = 0$ și se găsește $\psi = \varphi$, în primul caz, și $\psi = 90^\circ + \varphi$, în al doilea caz $\left(\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega}{R} \right)$. Diagrama este dată în fig. 13.27, pentru ambele cazuri.

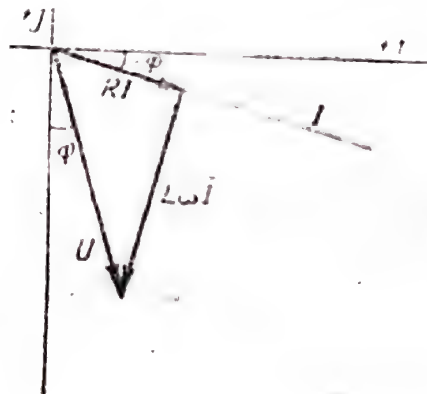


Fig. 13.27

13.28. a) Se aplică relația (85). Condițiile impuse corespund lui $\psi = 105^\circ$. Se găsește ușor $i = 10 \sin(\omega t + 105^\circ) - 19,66 \cdot e^{-3,18 \cdot 10^{-3} t}$. A. b) Se pune condiția $i_0 - i_{p0} = 0$. Rezultă $\psi = 45^\circ$.

13.29. Se găsește ușor cu ajutorul relației (85): $i_1 = 15 \sin(\omega t + 37^\circ) + 6 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$; $i_2 = 15 \sin(\omega t + 37^\circ) - 9 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$; $i_3 = 30 \sin(\omega t + 37^\circ) - 3 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$; $\tau = 4,25 \text{ ms}$.

13.30. Legile lui Kirchhoff dau: $i_1 = i_2 + i_3$; $u = u_c + Ri_2$; $Ri_2 = L \frac{di_2}{dt}$. Rezolvând acest sistem și punând condițiile că la $t = 0$, $i_2 = 0$, $u_c = 0$, se găsește $i_1 = \frac{-U}{p_1 - p_2} \left[\left(\frac{1}{L} + \frac{p_1}{r} \right) e^{p_1 t} - \left(\frac{1}{L} + \frac{p_2}{r} \right) e^{p_2 t} \right]$.

$$i_2 = \frac{U}{R(p_1 - p_2)} (p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t})$$

$$i_3 = \frac{U}{L(p_1 - p_2)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t})$$

$$u_C = U - \frac{U}{(p_1 - p_2)} (p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t})$$

În care p_1 și p_2 sunt rădăcinile ecuației caracteristice ale ecuației diferențiale în i_3 . Numeric se găsește $i_1 = 2 \cdot 10^{-2} \cdot 98 e^{-9900 t} = 1,96 e^{-9900 t}$ A; $i_2 = 2 \cdot 10^{-2} (-e^{-100 t} + 99 e^{-9900 t})$ A; $i_3 = 2 \cdot 10^{-2} (e^{-100 t} - e^{-9900 t})$ A; $u_C = 186 - 2 (-e^{-100 t} + 99 e^{-9900 t})$ V.

13.31. Procedând ca mai sus se găsește :

$$u_C = U + \frac{U}{p_1 - p_2} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t})$$

În care :

$$p_1, p_2 = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\frac{1}{4R^2C^2} - \frac{1}{LC}}$$

Găsirea curenților și calculul numeric nu prezintă nici o dificultate.

13.32. p_1 și p_2 având aceleași valori ca în problema 13.31. se găsește :

$$i_2 = \frac{U}{R} \left(1 + \frac{p_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} + \frac{p_1}{p_2 - p_1} e^{p_2 t} \right);$$

$$i_1 = \frac{U}{R} \left(\frac{p_1}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} + \frac{p_2}{p_2 - p_1} e^{p_2 t} \right)$$

și $i_1 = i_2 + i_3$. Mai departe calculul nu prezintă nici o dificultate.

13.33. Se aplică relația (85) la închiderea circuitului pe baterie, releul nefiind scurt-circuitat. Se găsește $I_1 = 0,25 (1 - e^{-55,6t})$. La scurtcircuitarea releului, curentul este $i_2 = 0,25 e^{-116,5 t}$. Se calculează timpul până când $i_1 = 0,15$ A, găsindu-se $t_1 = 0,0163$ s. Se calculează timpul până când $i_2 = 0,05$ A găsindu-se $t_2 = 0,0138$ s. Dacă conectarea se produce în momentul când $i_1 =$

0,15 A și lama a fost atrasă, atunci $i_2' = \frac{\ln 3}{116,5} = 0,00944$ s. Cum $t_1 > t_2'$

rezultă că timpul între două comutări este $2 t_1 = 0,0326$ s astfel că pe secundă se fac 30,7 comutări.

13.34. Curentul care se stabilește în circuit este $i = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right)$,

iar energia ce se acumulează în câmpul magnetic este dată de $dW = L i di$. Din expresia curentului se calculează di , apoi se integrează în timp dela 0 la ∞ . Se găsește $\frac{1}{2} \frac{E^2}{R^2} L$. În momentul inițial $W = 0$.

13.35. Se scrie curentul permanent în circuit înainte de shuntarea rezistenței inductive Nr. 2. Aceasta constituie valoarea momentului inițial la timpul $t = 0$ a regimului tranzitoriu. Punând condiția ca acest curent să fie maxim, se determină defazajul ψ . După shuntare, apar regimuri tranzitorii în cele două rezistențe. Curentul din shunt este $i_3 = i_1 - i_2$. La sfârșitul regimului tranzitoriu trebuie să rămână în circuit curentul permanent din bobina 1. Calculul nu prezintă nicio dificultate.

13.36. Problema este analoagă cu precedenta. Se găsește $i = 9,21$ A.

13.37. Problema corespunde descărcării unui condensator (C) pe o rezistență (R_0). Se găsește $t = 207$ s și $Q = 0,1$ Cal.

13.38. Când întrerupătorul este închis, prin circuitul $U R_1 R_2 R_3 K$ circulă curentul $I_0 = \frac{U}{R_1 + R_2 + R_3}$. Curentul prin condensator, bobină și rezistența

R este egal cu zero. Tensiunea la bornele condensatoarelor C_1 și C_2 este respectiv :

$U_{c10} = U - R_1 i_0 = (R_2 + R_3) i_0$; $U_{c20} = U - (R_1 + R_2) i_0 = R_3 i_0$
(ca verificare, polaritățile celor doi condensatori fiind ca în figură $U_{c10} - U_{c20} = R_2 i_0$).

După deschiderea întrerupătorului K se produce regimul tranzitoriu, însă în primul moment tensiunile condensatorilor sunt respectiv U_{c10} și U_{c20} .

Ecuatiile integro-diferențiale ale procesului tranzitoriu care se produce după deschiderea întrerupătorului sunt, pentru fiecare din cele 3 circuite independente :

$$R_2 i_1 + (S_1 + S_2) \int i_1 dt - S_1 \int i_3 dt = 0 \quad \left(S_1 = \frac{1}{C_1}, S_2 = \frac{1}{C_2} \right)$$

$$L \frac{di_2}{dt} + R_4 i_2 - R_4 i_3 = 0$$

$$- S_1 \int i_1 dt - R_4 i_2 + (R_1 + R_4) i_3 + S_1 \int i_3 dt = U.$$

Intrucât

$$S_1 \int (i_1 - i_3) dt = S_1 \int_0^t (i_1 - i_3) dt - U_{c10}$$

și

$$S_2 \int i_2 dt = S_2 \int_0^t i_2 dt + U_{c20}.$$

ecuațiile integrodiferențiale devin :

$$R_2 i_1 + (S_1 + S_2) \int_0^t i_1 dt - S_1 \int_0^t i_3 dt = U_{c10} - U_{c20} = R_2 i_0$$

$$L \frac{di_2}{dt} + R_4 i_2 - R_4 i_3 = 0$$

$$- S_1 \int_0^t i_1 dt - R_4 i_2 + (R_1 + R_4) i_3 + S_1 \int_0^t i_3 dt = U - U_{c10} = R_1 i_0$$

În momentul inițial (pentru $t = 0$)

$$R_2 i_0 = R_2 i_0; L \left(\frac{di_2}{dt} \right)_0 + R_4 i_{20} - R_4 i_{30} = 0; - R_4 i_{20} + (R_1 + R_4) i_{30} = R_1 i_0$$

Intrucât $i_{20} = i_{10} = 0$ avem $i_{10} = i_0$; $i_{20} = 0$; $i_{20} = -\frac{R_1}{R_1 + R_4} i_0$;

$$\left(\frac{di_2}{dt}\right)_0 = \left(\frac{di_1}{dt}\right)_0 = \frac{R_4}{L} (i_{30} - i_{20}) = \frac{R_1 R_4}{L (R_1 + R_4)} i_0$$

Tensiunea între contactele întrerupătorului

$$U_R(t) = U_{c2} + L \frac{di_2}{dt} = U - R_1 i_3 - R_2 i_1$$

iar pentru momentul inițial :

$$\begin{aligned} U_R(0) &= U_{c0} + L \left(\frac{di_2}{dt}\right)_0 = R_3 i_0 + \frac{R_1 R_4}{R_1 + R_4} i_0 = \\ &= \frac{R_1 R_4 + R_4 R_3 + R_3 R_1}{R_1 + R_4} i_0 \end{aligned}$$

13.39. Înainte de închiderea întrerupătorului $i_0 = i_3 = \frac{U}{R_2 + R_3 + R_4}$

$$U_{s10} = i_0 (R_2 + R_3) \frac{S_1}{S_1 + S_2}; \quad U_{s20} = i_0 (R_2 + R_3) \frac{S_2}{S_1 + S_2}$$

în care $S_1 = \frac{1}{C_1}$ și $S_2 = \frac{1}{C_2}$.

După închiderea întrerupătorului, ecuațiile integro-diferențiale

$$R_2 i_2 = S_1 \int_0^t (i_4 - i_2) dt + U_{s10};$$

$$L \frac{di_3}{dt} + R_3 i_3 = S_2 \int_0^t (i_4 - i_3) dt + U_{s20} + R_1 (i_4 - i_3)$$

$$L \frac{di_3}{dt} + R_3 i_3 + R_2 i_2 + R_4 i_4 = U.$$

Pentru momentul inițial $i_{20} = i_0 \frac{(R_2 + R_3)S_1}{R_2(S_1 + S_2)}$; $i_{40} = i_0$; $i_{10} = i_{40} - i_{30} = 0$;

$$\left(\frac{di_3}{dt}\right)_0 = i_0 \frac{R_2 S_2 - R_3 S_1}{L(S_1 + S_2)}; \quad \left(\frac{dU_{s2}}{dt}\right)_0 = S_2 i_{10} = 0.$$

13.40. Dacă tensiunea între electrozii eclatorului G crește încet, curenții care trec prin ramurile schemei în acest timp pot fi neglijăți. La $t = 0$, când ten-

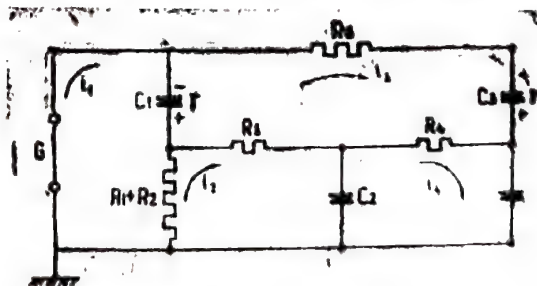


Fig. 13.40.

siunea între electrozi a atins valoarea γ volți, același tensiune apare și între armăturile condensatoarelor C_1 și C_2 , legate în paralel cu eclatorul. Tensiunea între

armăturile condensatoarelor C_2 și C_4 care sunt legate în paralel cu ramura $R_1 + R_2$, care este parcursă de un curent neglijabil, poate fi considerată în acest moment egală cu zero. În momentul în care se produce descărcarea, impedanța ramurei eclatorului devine practic egală cu zero. Partea schemei, așezată la dreapta eclatorului, poate fi reprezentată ca în figura 13.40. Ecuațiile integrodiferențiale pot fi stabilite prin metoda circuitelor independente.

$$\begin{aligned} (R_1 + R_2) i_1 + S_1 \int_0^t i_1 dt - (R_1 + R_2) i_2 - S_1 \int_0^t i_3 dt &= -U_{c1}(0) = \gamma \\ - (R_1 + R_2) i_1 + (R_1 + R_2 + R_3) i_2 + S_2 \int_0^t i_2 dt - R_3 i_3 - S_2 \int_0^t i_4 dt &= U_{c2}(0) = 0 \\ - S_1 \int_0^t i_1 dt - R_3 i_2 + (R_3 + R_4 + R_6) i_3 + (S_1 + S_3) \int_0^t i_3 dt - R_4 i_4 &= \\ &= U_{c1}(0) - U_{c3}(0) = \gamma - \gamma = 0 \\ - S_2 \int_0^t i_2 dt - R_4 i_3 + R_6 i_4 + (S_2 + S_4) \int_0^t i_4 dt &= U_{c2}(0) + U_{c4}(0) = 0 \end{aligned}$$

în care $S_k = \frac{1}{C_k}$.

Pentru determinarea valorilor inițiale ale curenților independenți se face $t = 0$ în ecuațiile de mai sus. Se obține sistemul:

$$\begin{aligned} (R_1 + R_2) (i_1 - i_2) &= \gamma \\ (R_1 + R_2) (i_2 - i_1) + R_3 (i_2 - i_3) &= 0 \\ R_3 (i_3 - i_2) + R_4 (i_3 - i_4) + R_6 i_3 &= 0 \\ R_4 (i_4 - i_3) &= 0 \end{aligned}$$

Rezolvând aceste ecuații, se obține

$$i_1(0) = \frac{\gamma}{R_1 + R_2} + \frac{\gamma}{R_3} + \frac{\gamma}{R_6}; \quad i_2(0) = \frac{\gamma}{R_3} + \frac{\gamma}{R_6}; \quad i_3(0) = \frac{\gamma}{R_6}; \quad i_4(0) = \frac{\gamma}{R_6}.$$

13.41. (a) Aplicând relațiile (91) se obține

$$i = \frac{E}{Z} \left\{ \cos(\omega t + \psi - \varphi) + \frac{e^{-\delta t}}{\Omega L} \left[\sqrt{\frac{L}{C}} \cos(\psi - \varphi) \sin(\Omega t - \alpha) + \frac{\sin(\psi - \varphi)}{C\omega} \sin \Omega t \right] \right\}$$

și relația analoagă pentru tensiunea la bornele condensatorului.

Se vede din aceste relații că nu poate exista un unghi care să anuleze simultan ambele funcții $\cos(\psi - \varphi)$ și $\sin(\psi - \varphi)$.

(b) Aceiași concluzie ca și în cazul precedent.

13.42. Problema se rezolvă aplicând relațiile (91). Un caz particular interesant este acela pentru care $R \ll \omega L$ *).

*) Vezi I. S. Antoniu, Chestiuni speciale de Electrotehnică, București 1952, pag. 421.

13.43. (a) Ecuațiile diferențiale ale circuitului se obțin folosind metoda circuitelor independente. Se găsește sistemul

$$\begin{aligned} 15 i - 10 i_1 + L \frac{di}{dt} &= 0 \\ -10 i + 30 i_2 &= 110 \end{aligned}$$

care rezolvat dă curenții din cele trei ramuri ale circuitului $i = 3,14 (1 - e^{-9,72 t})$, $i_1 = 4,65 - 1,05 e^{-9,72 t}$, $i_2 = i_1 - i = 1,51 + 2,09 e^{-9,72 t}$.

(b) Se scrie ecuația diferențială numai pentru bucla circuitului. Se găsește $i = 3,14 e^{-12,5 t}$.

13.44. (a) Se aplică metoda circuitelor independente, găsindu-se expresia curenților i_2 din inductanță. (b) Se aplică aceeași metodă la trei bucle: una cuprinzând sursa, a doua cuprinzând rezistența inductivă și a treia cuprinzând capacitatea. Se aleg aceste circuite astfel ca curențul din inductanță să apară direct și nu ca o combinație de doi curenți.

Notă. Problema se rezolvă mai ușor cu ajutorul calculului operațional.

13.45. Se ia ca necunoscută tensiunea la bornele ultimului condensator, în serie cu rezistența. Se obține ecuația diferențială

$$1 \cdot 10^{-12} \frac{d^3 u}{dt^3} + 6 \cdot 10^{-8} \frac{d^2 u}{dt^2} + 6 \cdot 10^{-4} \frac{du}{dt} + u = 100 \sqrt{2} \cos \omega t.$$

Pe de altă parte $i_s = \frac{1}{2} i_c = C \frac{du}{dt}$. Integrând ecuația diferențială de mai sus și punând condiția că la $t = 0$ toți curenții sunt nuli, se găsește:

$$i_s = -58,9 e^{p_1 t} + 4,0 e^{p_2 t} + 19,5 e^{p_3 t} + 50 \cos (\omega t - 45^\circ) \text{ mA}$$

în care $p_1 = -10^4$ și $p_{2,3} = 10^4 \frac{-5l \pm \sqrt{21}}{2}$.

Notă. Problema se rezolvă mai ușor cu ajutorul calculului operațional.

14. 14.1. Pierderea într'un condensator este echivalentă cu o rezistență legată la bornele acestuia și a cărei valoare este dată de relația:

$$\operatorname{tg} \delta = RC \omega.$$

Schema echivalentă a circuitului este dată de fig. 14.1. Se aplică metoda cantităților complexe. Impedanța generalizată este:

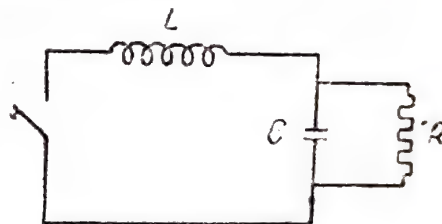


Fig. 14.1

$$\bar{Z} = pL + \frac{R}{pC} \cdot \frac{1}{R + \frac{1}{pC}}$$

care egalată cu zero dă:

$$\bar{p}^2 RC + \bar{p}L + R = 0.$$

de unde rezultă δ și Ω . Se găsește $R = 1250 \Omega$; $\delta = 400$; $\Omega = 300$ și deci:

$$i = I e^{-400 t} \cos (300 t + \psi).$$

14. 2. a) *Fruntea undei.* Se aplică relația (86) deducându-se elementele din datele problemei. Dacă se ia $e = E \cos(\omega t + \psi)$ se găsește tensiunea l. bornele condensatorului

$$u = \frac{E}{C\omega Z_1} \left[\sin(\omega t + \psi + \varphi_1) - \sin(\psi + \varphi_1) e^{-\frac{1}{RC}t} \right].$$

Cum efectul de supratensiune este maxim când u_p este maxim la $t = 0$, se găsește

$u_{pe \text{ max}}$ pentru $\psi + \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ și se găsește

$$u = -\frac{E}{C\omega Z_1} \left(\cos \omega t + e^{-\frac{1}{RC}t} \right)$$

în care $\bar{Z}_1 = R - j \frac{1}{C\omega}$. Valoarea maximă rezultă făcând în relația obținută $t = T_f$.

Numeric se găsește:

$$|U_s| \cong 1000 \text{ kV}$$

b) *Coadă undei.* Având de-a face cu un regim liber, se aplică calculul cu cantități complexe. Impedanța complexă generalizată este:

$$\bar{Z} = L\bar{p}^2 + \bar{p}\rho + \frac{1}{C}$$

De unde rezultă:

$$(\delta^2 - \Omega^2)L - \rho\delta + \frac{1}{C} = 0$$

$$-2\delta\Omega L + \rho\Omega = 0.$$

Pentru ca să nu fie oscilantă coada undei trebuie ca $\Omega = 0$. Rezultă:

$$LC\delta^2 - \rho C\delta + 1 = 0$$

rezultă:

$$\rho = L\delta + \frac{1}{C\delta}.$$

Pentru determinarea lui δ se pornește dela:

$$u'_1 = U_s e^{-\delta t}$$

în care $u' = \frac{1}{2} U_s$ la $t = T_c$. Se găsește:

$$\delta = \frac{\ln 2}{T_c}$$

și deci :

$$\rho = L \frac{\ln 2}{T_c} + \frac{T_c}{C \ln 2}$$

Numeric $\delta = 13863$ și $\rho = 2110,3 \Omega$.

14.3. Se calculează în prealabil elementele caracteristice ale transformatorului. Din proba de scurtcircuit, se deduce $(R_1 + k^2 R_2) I_1^2 = P_k$, de unde $R_1 = 238 \Omega$ și $R_2 = 24,1 \Omega$ în ipoteza bișnuită $R_1 \cong k^2 R_2$. Din relația $U_k = (X_1 + k^2 X_2) I_1$, se deduce $L_1 = 3,29$ H și $L_2 = 0,33$ H, în aceeași ipoteză $X_1 \cong k^2 X_2$. Din relația $\sigma = 1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}$, luând $\sigma = \epsilon_k = 0,17$ rezultă $M = 0,95$ H.

Ecuatiile regimului liber al transformatorului (scrise în cantități complexe) fiind :

$$R_1 \bar{I}_1 + \bar{p} L_1 \bar{I}_1 + \bar{p} M \bar{I}_2 = 0$$

$$R_2 \bar{I}_2 + \bar{p} L_2 \bar{I}_2 + \bar{p} M \bar{I}_1 = 0$$

eliminând pe \bar{I}_2 și înlocuind cu datele numerice se obține ecuația :

$$\bar{p}^2 + 855 \bar{p} + 31048 = 0$$

având rădăcinile $p' = -36$ și $p'' = -814$.

Curenții tranzitorii în transformator sunt *) :

$$i_1 = i_{p1} + I_1' e^{p't} + I_1'' e^{p''t}$$

$$i_2 = i_{p2} + m' I_1' e^{p't} + m'' I_1'' e^{p''t}$$

în care :

$$m' = -\frac{R_1 + p'L}{p'M}, \quad m'' = -\frac{R_1 + p''L}{p''M}$$

$$I_1' = \frac{1}{m'' - m'} \left[m'' (i_{10} - i_{p10}) - (i_{20} - i_{p20}) \right]$$

$$I_1'' = \frac{1}{m' - m''} \left[m' (i_{10} - i_{p10}) - (i_{20} - i_{p20}) \right]$$

Se face ipoteza, verificată în practică, că transformatorul nu modifică factorul de putere. În acest caz :

$$i_{10} = 5,25 \sqrt{2} \sin(\omega t - 45^\circ 30')$$

$$i_{20} = 23,2 \sqrt{2} \sin(\omega t - 45^\circ 30')$$

$$i_{p1} = 2,63 \sqrt{2} \sin(\omega t - 36^\circ 50')$$

$$i_{p2} = 11,6 \sqrt{2} \sin(\omega t - 36^\circ 50')$$

*) Vezi Ion S. Antoniu, Chestiuni speciale de Electrotehnică, București 1952, pag. 452.

și rezultă :

$$\begin{aligned} i_{10} &= -5,3 \text{ A} & i_{20} &= -16,7 \text{ A} \\ i_{p10} &= -2,24 \text{ A} & i_{p20} &= -6,95 \text{ A} \end{aligned}$$

de unde, făcând toate calculele, se găsește :

$$\begin{aligned} i_1 &= 2,63 \sqrt{2} \sin(\omega t - 36^\circ 50') - 2,8 e^{-30 t} - 0,272 e^{-814 t} \\ i_2 &= 11,6 \sqrt{2} \sin(\omega t - 36^\circ 50') - 9,75 e^{-30 t} - 0,0008 e^{-814 t} \end{aligned}$$

14.4. Se folosesc cantitățile complexe. Se găsește $\delta = 0$ și $\Omega^2 = \frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2 C}$.

Se pune condiția ca, la $t = 0$, $\frac{Q}{C} = \left(L_1 \frac{di_1}{dt} \right)_{t=0}$.

Se găsește $i = \frac{Q}{C\Omega(L_1 + L_2)} \sin \Omega t$.

14.5. Problema se studiază în același mod, tensiunea la bornele condensatorului variind după legea de descărcare a unui condensator pe o rezistență [Relația (86)].

14.6. Se folosesc cantitățile complexe.

Se obțin ecuațiile

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 \left[R_1 + \bar{p} L_1 + \frac{1}{\bar{p} C} \right] + \bar{p} M \bar{I}_2 &= 0 \\ \bar{I}_2 \left[R_2 + \bar{p} L_2 \right] + \bar{p} M \bar{I}_1 &= 0 \end{aligned}$$

de unde rezultă $\delta = \frac{1}{2} \frac{R_1'}{N_1}$ și $\Omega = \sqrt{\frac{1}{C N_1} - \delta^2 + \frac{R_1 R_2}{N_1 L_2}}$,

în care s'a notat $N_1 = L_1 - \frac{M^2}{L_2}$ și $R_1' = R_1 + R_2 \frac{L_1}{L_2}$.

14.7. Impedanța operațională a circuitului fiind :

$$Z(p) = R + pL + \frac{1}{G + pC},$$

îmaginea curentului este :

$$i = \frac{U}{p} \frac{Cp + G}{Lp^2 + (CR + GL)p + GR + 1} = 10 \frac{p + 4}{p(p^2 + 10p + 124)}.$$

Pentru a afla ori înalul se aplică teorema dezvoltării lui Heaviside (formula de transformare 11 din tabel). Se găsește :

$$\begin{aligned} i &= \frac{40}{124} + \frac{e^{-5t}}{2j} \left[\frac{-1 + j10}{-5 + j10} e^{j10t} - \frac{-1 - j10}{-5 - j10} e^{-j10t} \right] = \\ &= 0,323 + 0,904 e^{-5t} \sin(10t - 0,36) \text{ A.} \end{aligned}$$

14.8. Impedanța operațională este

$$Z(p) = R_1 + \frac{R_2}{pC} \cdot \frac{1}{R_2 + \frac{1}{pC}} + R_3 + pL = \frac{6p^2 + 3420p + 2,21 \cdot 10^6}{2p + 10^3}$$

și imaginea curentului:

$$\mathcal{E}i = \frac{40(2p + 10^3)}{p(6p^2 + 3420p + 2,21 \cdot 10^6)}$$

Aplicând aceeași relație de transformare ca în problema precedentă se găsește:

$$i = 1,8 \cdot 10^{-2} + 1,68 \cdot 10^{-2} e^{-285t} \sin(537t + 1,163) \text{ A.}$$

14.9. Problema se poate rezolva fie prin transformarea lui Laplace, fie prin cantități complexe. Prin a doua metodă se determină regimul liber, egalându-se cu zero impedanța generalizată și înlocuindu-se \bar{p} prin valoarea sa. Se găsește $\delta = 1100$ și $\Omega = 0$. Prin condiții de limită se deduc apoi $A = I \cos \phi = 1/1100i$. Cunoscând curentul transitoriu i , se scrie tensiunea la bornele condensatorului. și se pune condiția ca aceasta să fie egală cu 50 V. Se găsește $t = 7,258 \cdot 10^{-4} \text{ s.}$

Pentru rezolvarea problemei cu ajutorul transformării lui Laplace, se determină curentul din rezistența R_2 cu ajutorul legilor lui Kirchhoff. Apoi se aplică transformarea lui Laplace, găsindu-se același rezultat.

Să se compare metodele.

14.10. Aplicându-se transformarea lui Laplace ecuației diferențiale a circuitului dat și ținând seama că imaginea funcției impuls este egală cu unitatea, se găsește

$$i = \frac{B_0}{L} e^{-\frac{L}{R}t}. \text{ Se presupune } i(0) = 0.$$

$$14.11. i = -\frac{B_0}{CR^2} e^{-\frac{t}{CR}}.$$

14.12. Se utilizează fie cantitățile complexe fie calculul operațional. Se obține.

$$U_{c1} = U \frac{C_2}{C_1 + C_2} e^{-\frac{t}{R(C_1 + C_2)}} \text{ și } U_{c2} = U \left[1 - \frac{C_2}{C_1 + C_2} e^{-\frac{t}{R(C_1 + C_2)}} \right]$$

În cazul particular se găsește $U_{c1} = 0,5 U e^{-500t} \text{ V}$ și $U_{c2} = U(1 - 0,5 e^{-500t}) \text{ V.}$

14.13. Fie prin cantități complexe, fie prin calculul operațional se găsește

$$i_2 = \frac{U}{R} \left(1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{\alpha_1 t} - \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{\alpha_2 t} \right);$$

$$i_3 = \frac{U}{R} \frac{\alpha_1 \alpha_2 L}{(\alpha_1 - \alpha_2) R} (e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}); i = i_1 + i_2; \text{ în care}$$

$$\alpha_{1,2} = -\frac{3R}{2L} \pm \frac{R}{2L} \sqrt{5}.$$

Expresia curenților poate fi exprimată prin funcții hiperbelice. A se efectua.
 14.14. Se aplică metoda circuitelor independente și calculul operațional.
 Se găsește fără dificultate:

$$(a) \quad i_1 = 30 - 10 e^{-20t} - 20 e^{-80t} \text{ A}; \quad i_2 = 30 - 20 e^{-20t} - 10 e^{-80t} \text{ A}; \\ i_3 = 10 e^{-20t} - 10 e^{-80t} \text{ A}.$$

$$(b) \quad \text{Calculând } \frac{di_3}{dt} = 0 \text{ se găsește } t = 23.10^{-3} \text{ s. } i_{3 \max} = 4,73 \text{ A}.$$

$$(c) \quad W = \int_0^{\infty} R_3 i_3^2 dt = 9 \text{ jouli}$$

14.15. Impedanța operațională este:

$$Z(p) = \frac{(R_1^2 C_1 C_3 + R_1 R_3 C_1 C_3)p^2 + (2R_1 C_3 + R_1 C_1 + R_3 C_3)p + 1}{p(R_1 C_1 p + 1)C_3}$$

numeric se găsește:

$$i_3 = -2,42 e^{-9,8t} - 0,93 e^{-127,8t} \text{ A}.$$

Ceilalți curenți se găsesc cu ajutorul legilor lui Kirchhoff. Se găsește:

$$i_1 = -0,26 e^{-9,8t} - 4,25 e^{-127,8t} \text{ A}.$$

$$i_2 = 2,68 e^{-9,8t} + 3,32 e^{-127,8t}.$$

Tensiunile se determină cu relația $u_c = \frac{1}{C} \int_0^t i dt$ găsindu-se

$$u_{c1} = 26,8 e^{-9,8t} + 33,2 e^{-127,8t}$$

$$u_{c3} = 120 - 123,6 e^{-9,8t} + 3,6 e^{-127,8t}.$$

ținând seama că la $t = 0$ $u_{c0} = 0$.

14.16. Curenții se obțin aplicând legile lui Kirchhoff circuitului:

$$i_2 = i_1 + i; \quad Ri + L \frac{di}{dt} - R_1 i_1 = 0$$

$$U = R_2 i_2 + Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i_2 dt$$

pe care le rezolvăm cu ajutorul calculului operațional. Se găsește:

$$i = \frac{UR_1 e^{-\delta t}}{\Omega' L(R_1 + R_2)} \text{sh } \Omega' t$$

în care:

$$\delta = \frac{b}{2a}, \quad \Omega' = \frac{1}{2a} \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$a = LC(R_1 + R_2), \quad b = CR_1 R_2 + CRR_2 + CRR_1 + L, \quad c = R + R_1$$

Dacă $b^2 - 4ac < 0$, punând $j\Omega = \Omega'$

$$i = \frac{UR_1 e^{-\delta t}}{\Omega L(R_1 + R_2)} \sin \Omega' t.$$

Dacă $b^2 - 4ac = 0$,

$$i = \frac{UR_1 t e^{-\delta t}}{L(R_1 + R_2)}$$

Ceilalți curenți se deduc imediat. Numeric se găsește $b^2 - 4ac = 4,21 > 0$ deci curentul prin inductanță este aperiodic $i = 3,9 \cdot 10^{-2} e^{-286t} \text{ sh } 163 t$.

14.17. Aplicându-se legile lui Kirchhoff, scrise în operațional, se găsește :

$$\mathfrak{L}i_1 = \mathfrak{L}i_2 + \mathfrak{L}i_3$$

$$\mathfrak{L}u = R_1 \mathfrak{L}i_1 + R_2 \mathfrak{L}i_2$$

$$R_2 \mathfrak{L}i_2 = \frac{\mathfrak{L}i_3}{Cp}$$

se găsește :

$$\mathfrak{L}u_c = \frac{\mathfrak{L}u}{1 + \frac{R_1}{R_2} + R_1 Cp}$$

de unde :

$$u_c = \frac{U \sqrt{2} \sin(\omega t + \psi - \varphi)}{\sqrt{\left(\frac{R_1 + R_2}{R_2}\right)^2 + (\omega C R_1)^2}} - \frac{U \sqrt{2} \sin(\psi - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau}}}{\sqrt{\left(\frac{R_1 + R_2}{R_2}\right)^2 + (\omega C R_1)^2}}$$

în care

$$\tau = \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2} \quad \text{și} \quad \text{tg } \varphi = - \frac{\omega C R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

curenții se deduc apoi ușor.

14.18. Se determină pe aceeași cale curentul debitat de sursă. Se găsește :

$$i_1 = A \left[\sqrt{R_2^2 + (\omega L)^2} \sin(\omega t + \psi - \alpha + \beta) - \frac{R_2^2 \sin(\psi - \alpha) e^{-\frac{t}{\tau}}}{R_1 + R_2} \right]$$

în care :

$$A = \frac{U \sqrt{2}}{\sqrt{(R_1 R_2)^2 + \omega^2 L^2 (R_1 + R_2)^2}}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\omega L(R_1 + R_2)}{R_1 R_2}, \quad \text{tg } \beta = \frac{\omega L}{R_2}, \quad \tau = \frac{L(R_1 + R_2)}{R_1 R_2}$$

Restul calculului este simplu. Numeric se găsește :

$$i = 0,6 \sin (\omega t + \psi - 25^{\circ}42') - 0,27 \sin (\psi - 77^{\circ}11') e^{-1,4 \cdot 10^{-2} t}$$

Regimul permanent se stabilește direct dacă $\psi = \alpha = 77^{\circ}11'$.

14.13. Aceeași metodă. Se găsește :

$$i = 7,22 \sin (314 t + 43^{\circ}50') + 8,3 e^{-100 t} \sin (153 t - 37^{\circ}20') \text{ A}$$

$$u_c = 346 \sin (314 t - 46^{\circ}10') - 412 e^{-100 t} \sin (153 t - 37^{\circ}20') \text{ V.}$$

14.20. Ecuațiile operaționale ale circuitului sunt

$$\mathcal{E}E = (R_1 + pL_1) \mathcal{E}i_1 + p M \mathcal{E}i_2$$

$$0 = (R_2 + pL_2) \mathcal{E}i_2 + p M \mathcal{E}i_1$$

care rezolvate dau :

$$i_1 = \frac{R}{E_1} \left(1 - \frac{R_2 L_1}{R_1 L_2 + R_2 L_1} e^{-\frac{R_1 R_2}{R_1 L_2 + R_2 L_1} t} \right)$$

$$i_2 = - \frac{ME}{R_1 L_2 + R_2 L_1} e^{-\frac{R_1 R_2}{R_1 L_2 + R_2 L_1} t}$$

făcând $t = 0$

$$\therefore i_1 = \frac{EL_2}{R_1 L_2 + R_2 L_1} \text{ și } i_2 = - \frac{EM}{R_1 L_2 + R_2 L_1}$$

în contradicție cu ipoteza făcută. Această se datorează faptului că, din cauza cuplajului perfect apar forțe electromotoare de inducție reziduale.

14.21. Ecuațiile operaționale sunt analoage cu acelea din problema precedentă. Soluția, în cazul general este

$$i_1 = \frac{U}{R_1} \left[1 + \frac{R_1 + L_1 (1 - K^2) \alpha_2}{L_1 (1 - K^2) (\alpha_1 - \alpha_2)} e^{\alpha_1 t} - \frac{R_1 + L_1 (1 - K^2) \alpha_1}{L_1 (1 - K^2) (\alpha_1 - \alpha_2)} e^{\alpha_2 t} \right]$$

și o relație analoagă, pentru i_2 , în care

$$\alpha_{1,2} = - \frac{R_1 L_2 + R_2 L_1}{2 L_1 L_2 (1 - K^2)} \pm \sqrt{\frac{(R_1 L_2 + R_2 L_1)^2}{4 L_1^2 L_2^2 (1 - K^2)^2} - \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2 (1 - K^2)}}$$

: În cazul numeric se găsește :

pentru $K=1$, $i_1 = 5 (1 - 0,25 e^{-50 t})$ A, $i_2 = - 1,77 e^{-50 t}$ A și $W = \int_0^{\infty} R_2 i_2^2 dt = 0,315$ jouli; pentru $K = 0,8$, $i_1 = 5 (1 - 0,5 e^{-55 t} - 0,5 e^{-501 t})$ A, $i_2 = - 3,6 e^{-55 t} + 3,6 e^{-501 t}$ A și $W = 785$ jouli.

14.22. Se utilizează calculul operațional. Imaginea tensiunii aplicate este $U(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} u dt = \frac{\alpha U}{p(p + \alpha)}$. Aplicând metoda circuitelor independente în operațional se găsește :

$$i_o = [2,51 e^{-5 t} - 25,5 e^{-150 t} \cos (278 t + 11^{\circ}30')] 10^{-2} \text{ A.}$$

14.23. Ecuațiile de funcționare sunt :

$$L \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i_1 dt + \frac{1}{\Gamma} \int_0^t (i_1 + i_2) dt = 0$$

$$L \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i_2 dt + \frac{1}{\Gamma} \int_0^t (i_1 + i_2) dt = 0$$

cu condițiile inițiale pentru $t = 0$, $i_1 = i_2 = 0$, $\frac{di_1}{dt} = \frac{E}{L}$ și $\frac{di_2}{dt} = 0$.

Aplicând calculul operațional, sistemul se transformă într'un sistem algebric în p care se rezolvă în raport cu imaginile curenților căutați. Se găsește :

$$i_1 = \frac{E}{2} \left[\sqrt{\frac{C}{L}} \sin \frac{t}{\sqrt{LC}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{L}{C} + \frac{2L}{\Gamma}}} \sin \left(\sqrt{\frac{1}{LC} + \frac{1}{L\Gamma}} t \right) \right]$$

$$i_2 = \frac{E}{2} \left[\sqrt{\frac{C}{L}} \sin \frac{t}{\sqrt{LC}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{L}{C} + \frac{2L}{\Gamma}}} \sin \left(\sqrt{\frac{1}{LC} + \frac{1}{L\Gamma}} t \right) \right].$$

14.24. După deschiderea circuitului se poate scrie :

$$(R + r) i + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i dt = U_b$$

sau operațional :

$$(R + r) \mathfrak{L}i + Lp [\mathfrak{L}i - i(0)] + \frac{\mathfrak{L}i}{pC} = \mathfrak{L}U_b$$

de unde, aplicând transformarea lui Carson :

$$\mathfrak{L}i = \frac{U_b + pL(0)}{R + r + pL + \frac{1}{pC}}$$

cum $i(0) = U_b/r$, tensiunea la contacte se poate scrie :

$$\mathfrak{L}U_K = \mathfrak{L}i \cdot \left(R + \frac{1}{pC} \right) = U_b \frac{R + \frac{L}{Cr} + pL \frac{R}{r} + \frac{1}{pC}}{R + r + pL + \frac{1}{pC}},$$

care este egală cu U_b când $(L/Cr) = r$ și $(R/r) = 1$.

14.25. Scriind în circuitele ABm (i_1), BCn (i_2) și mnD (i_3) legile lui Kirchhoff sub forma operațională :

$$\left(\frac{1}{pC_1} + r_1 \right) \mathfrak{L}i_1 - r_1 \mathfrak{L}i_3 = U_{AB}(p) - \frac{I_1(0)}{jC_1 \omega}$$

$$\left(\frac{1}{pC_2} + r_2\right) \mathcal{L}i_2 - \frac{1}{pC_2} \mathcal{L}i_3 = U_{BO}(p) - \frac{I_2(0) - I_3(0)}{j\omega C_2}$$

$$\left(r_1 + r_3 + \frac{1}{pC_2} + pL_3\right) \mathcal{L}i_3 - r_1 \mathcal{L}i_1 - \frac{1}{pC_2} \mathcal{L}i_2 = pL_3 I_3(0) - \frac{I_3(0) - I_2(0)}{jC_2 \omega},$$

$U_{AB}(p)$ și $U_{BO}(p)$ sunt imaginile funcțiilor date $U_{AB}(t)$ și $U_{BO}(t)$ pentru $t > 0$. Se presupune că pentru $t < 0$ nu există decât sistem direct de tensiuni, deci $I_3(0) = 0$. Rezolvând sistemul de ecuații se obține :

$$\mathcal{L}i_3 = \frac{\left(\frac{U_{AB} - \frac{I_1(0)}{j\omega C_1}}{r_1 + (1/pC_1)}\right) r_1 + \frac{(U_{BO}/pC_2) + [I_2(0)/j\omega C_2] r_2}{r_2 + (1/pC_2)}}{\frac{r_1}{\left(r_1 + \frac{1}{pC_1}\right) pC_1} + \frac{r_2}{\left(r_2 + \frac{1}{pC_2}\right) pC_2} + r_3 + pL_3}$$

Expresia imaginii tensiunii la bornele releului este :

$$\mathcal{L}U_3 = \mathcal{L}i_3 (r_3 + pL_3).$$

14.26. Tensiunea rețelei este : $U_1 = 82 \cos \omega t$; $U_2 = 82 \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right)$;

$U_3 = 82 \cos \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right)$. Fenomenul tranzitoriu care ia naștere la scurtcircuit

este determinat de tensiunile $-\frac{I_1(0)}{j\omega C_1}$ și $-\frac{I_2(0)}{j\omega C_2}$, care există la bornele condensatorilor la $t = 0$. Tensiunea la bornele deschise ale filtrului este egală cu suma tensiunilor $U_{r_1}(p) + U_{c_2}(p)$:

$$U_{r_1}(p) = -\frac{I_1(0)}{j\omega C_1} \cdot \frac{r_1}{r_1 + \frac{1}{pC_1}}$$

$$U_{c_2}(p) = \frac{I_2(0)}{j\omega C_2} - \frac{I_2(0)}{j\omega C_2} \cdot \frac{\frac{1}{pC_2}}{r_2 + \frac{1}{pC_2}} = \frac{I_2(0)}{j\omega C_2} \cdot \frac{r_2}{r_2 + \frac{1}{pC_2}}$$

de unde tensiunea căutată :

$$U(p) = -\frac{I_1(0)}{j\omega C_1} \cdot \frac{p}{p + \frac{1}{r_1 C_1}} + \frac{I_2(0)}{j\omega C_2} \cdot \frac{p}{p + \frac{1}{r_2 C_2}}$$

Cum $p/(p + a) \doteq e^{-at}$ (transformarea lui Carson), rezultă :

$$U(t) = -\frac{I_1(0)}{j\omega C_1} e^{-\frac{t}{r_1 C_1}} + \frac{I_2(0)}{j\omega C_2} e^{-\frac{t}{r_2 C_2}}$$



Dar $\bar{U}_{AB} = \sqrt{3} \bar{U}_A e^{j30^\circ}$ și $\bar{U}_{BO} = \sqrt{3} \bar{U}_A e^{-j90^\circ}$, cum $\bar{U}_A = \bar{U}_A|_0 = 82 \text{ V}$,

$$\text{rezultă } \bar{U}(t) = -41 \sqrt{3} e^{-j30^\circ} \left[e^{-\frac{314}{\sqrt{3}} t} - j \sqrt{3} e^{-\sqrt{3} \cdot 314 t} \right];$$

$$\therefore U_{t=0} = -123 \text{ V}; U_{t=0,01} = -10 \text{ V}; U_{t=0,02} = -1,5 \text{ V}.$$

14.27. Circuitul echivalent al unui scurtcircuit bifazat la pământ este dat de fig. 22. În cazul problemei de față această schemă este dată în fig. 14.27, în care $Z_1(p)$, $Z_2(p)$, $Z_0(p)$ sunt impedanțele operaționale de secvență directă, inversă

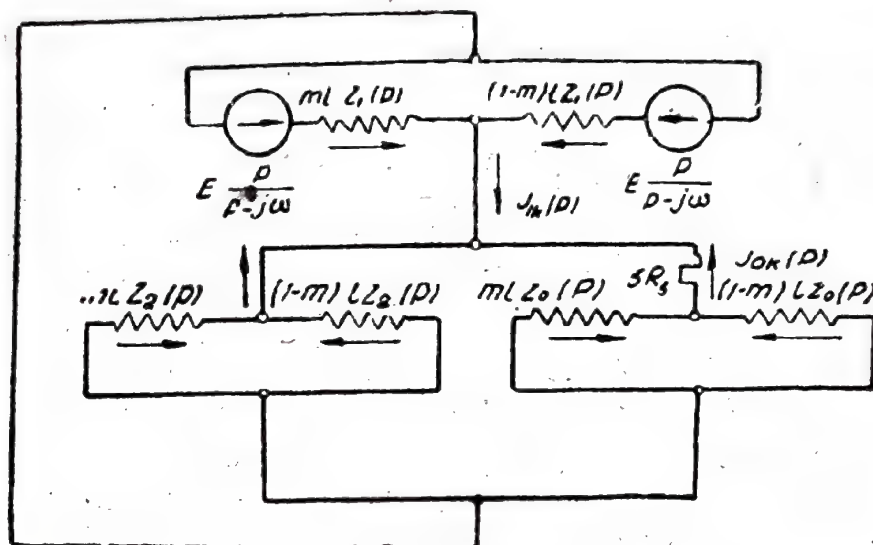


Fig. 14.27

și homopolară pe unitatea de lungime. Avem: $Z_1(p) = Z_2(p) = r_1 + p \frac{x_1}{\omega}$
 $Z_0(p) = r_0 + p \frac{x_0}{\omega}$, în care x_1 , x_0 , r_1 , r_0 sunt reactanțele și rezistențele liniei de transport pe unitatea de lungime. Componentele simetrice ale curentului în defect

$$\text{sunt: } \begin{aligned} \bar{I}_{1k} &= \frac{\bar{E} p [Z_1(p) + Z_0(p) + 3R']}{m(1-m)l(p-j\omega) Z_1(p) [Z_0(p) + 2Z_0(p) + 6R']}, \\ \bar{I}_{2k} &= \frac{\bar{E} p [Z_0(p) + 3R']}{m(1-m)l(p-j\omega) Z_1(p) [Z_1(p) + 2Z_0(p) + 6R']}, \\ \bar{I}_{0k} &= \frac{\bar{E} p}{m(1-m)l(p-j\omega) Z_1(p) [Z_1(p) + 2Z_0(p) + 6R']}, \end{aligned}$$

în care $R' = R/[m(1-m)l]$. Ținând seama de expresiile impedanțelor operaționale, originalele componentelor simetrice ale curentului de scurtcircuit sunt:

$$\bar{I}_{1k} = \frac{\bar{E}}{m(1-m)l} \left[\frac{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_0 + 3R'}{\bar{Z}_1(\bar{Z}_1 + 2\bar{Z}_0 + 6R')} e^{j\omega t} - \frac{1}{2\bar{Z}_1} e^{-\frac{\omega r_1}{x_1} t} - \frac{1}{2(\bar{Z}_1 + 2\bar{Z}_0 + 6R')} e^{-\frac{\omega(r_1 + 2r_0 + 6R')}{x_1 + 2x_0} t} \right]$$

$$\bar{I}_{2k} = \frac{\bar{E}}{m(1-m)l} \left[\frac{\bar{Z}_0 + 3R'}{\bar{Z}_1(\bar{Z}_1 + 2\bar{Z}_0 + 6R')} e^{j\omega t} - \frac{1}{2\bar{Z}_1} e^{-\frac{\omega r_1}{r_1} t} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2(\bar{Z}_1 + 2\bar{Z}_0 + 6R')} e^{-\frac{\omega(r_1 + 2r_0 + 6R')}{x_1 + 2x_0} t} \right] \\ \bar{I}_{0k} = - \frac{\bar{E}}{m(1-m)l} \cdot \frac{e^{j\omega t} - e^{-\frac{\omega(r_1 + 2r_0 + 6R')}{x_1 + 2x_0} t}}{\bar{Z}_1 + 2\bar{Z}_0 + 6R'}$$

în care $\bar{Z}_1 = r_1 + jx_1$ și $\bar{Z}_0 = r_0 + jx_0$. Curenții pe cele trei faze se calculează cu ajutorul relațiilor (71).

14.28. Problema se poate rezolva fie cu cantități complexe, fie cu ajutorul calculului operațional. Ecuațiile se obțin scriind a doua lege a lui Kirchhoff circuitului format din fazele A și B în serie. Se găsește

$$R\mathcal{L}i_a + pL\mathcal{L}i_a - R\mathcal{L}i_b - pL\mathcal{L}i_b = \mathcal{L}u_{ab}$$

sau

$$R(\mathcal{L}i_a - \mathcal{L}i_b) + pL(\mathcal{L}i_a - \mathcal{L}i_b) = \mathcal{L}u_{ab}$$

Se procedează la fel și pentru celelalte faze, pentru care se ține seama de decalajul tensiunii. Se găsește până la urmă

$$i_a = \frac{U\sqrt{2}}{\sqrt{3}\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \left[\sin(\omega t + \psi - \varphi) - \sin(\psi - \beta) e^{-\frac{t}{\tau}} \right]$$

în care $\text{tg } \beta = \frac{\sqrt{3}L\omega + R}{L\omega + \sqrt{3}R}$, $\tau = \frac{L}{R}$, ψ este un parametru arbitrar al tensiunii și $\text{tg } \varphi = \frac{L\omega}{R}$.

14.29. Sistemul de ecuații al problemei este

$$Ri_a - L \frac{di_b}{dt} = U\sqrt{2} \sin(\omega t + \psi) \quad (1); \quad Ri_a - u_c = -U\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \psi - \frac{4\pi}{3}\right) \quad (2);$$

$$i_a + i_a + C \frac{du_c}{dt} = 0 \quad (3). \text{ Se folosesc cantitățile complexe și se rezolvă. Se găsește}$$

$$i_b = \mathfrak{I} \sin\left(\omega t + \psi - \frac{\pi}{6}\right) - \mathfrak{I} \left[\frac{\omega'}{\omega} \left(\frac{1}{3} \sin \psi + \frac{1}{2\sqrt{3}} \cos \psi \right) \sin \omega' t + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \psi \cos \omega' t \right] e^{-\delta t},$$

$$\text{în care } \delta = \frac{1}{2RL} = \frac{\omega}{2\sqrt{3}}; \quad \omega' = \omega \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}; \quad \mathfrak{I} = \sqrt{2}\omega CU = \sqrt{2}\sqrt{3} \frac{U}{R}.$$

Expresii analoage se găsesc și pentru i_b și i_c . Problema se poate rezolva și cu ajutorul calculului operațional.

14.30. $\Phi(p) = a_0 + a_1 e^{-p\tau_1} + a_2 e^{-p\tau_2} + \dots + a_n e^{-p\tau_n}$ (transf. Carson). Dacă $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_n = a$ și $\tau_n - \tau_{n-1} = \dots = \tau_2 - \tau_1 = \tau$

adică salturile se produc după intervale de timp egale, atunci $\Phi(p) = a \frac{1}{1 - e^{-p\tau}} = \frac{a}{2} \left(1 + \coth p \frac{\tau}{2} \right)$.

14.31. Direct (fig. 14.31, a): pentru $0 \leq t \leq T_u - T_1$, $U = \frac{u_m}{T_u - T_1} t$,

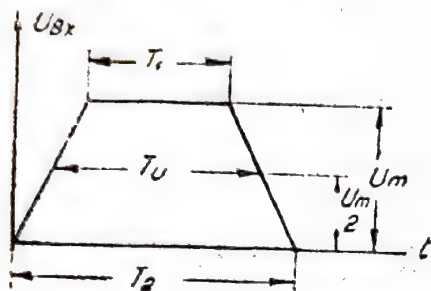


Fig. 14.31 a

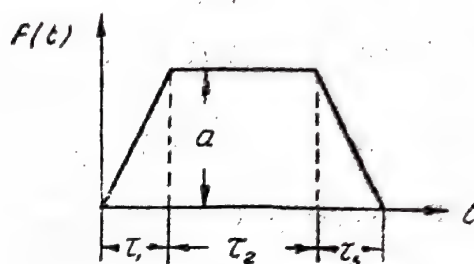


Fig. 14.31 b

pentru $T_u - T_1 \leq t \leq T_u$, $U = u_m$; pentru $T_u \leq t \leq 2T_u - T_1$, $U = \frac{u_m}{T_u - T_1} (2T_u - T_1 - t)$ pentru $2T_u - T_1 \leq t \leq \infty$, $U = 0$.

Prin utilizarea funcției impuls (transformarea Carson) (fig. 14.31, b) $\Phi(p) = \frac{a}{\tau_1 p} [1 - e^{-p\tau_1} - e^{-p(\tau_1 + \tau_2)} + e^{-p(2\tau_1 + \tau_2)}]$.

14.32. Ecuațiile diferențiale ale galvanometrului balistic sunt: ecuația mecanică

$$K \frac{d^2 \theta}{dt^2} + A \frac{d\theta}{dt} + B\theta = \Phi_0 i$$

ecuațiile electrice $L \frac{di}{dt} + Ri + \Phi_0 \frac{d\theta}{dt} = \frac{q}{C}$ (1);

$i = -\frac{dq}{dt}$ (2). Condițiile inițiale sunt $\theta(0) = 0$; $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{t=0} = 0$; $i(0) = 0$. Se

neglijă $L \frac{di}{dt}$ față de Ri . Se utilizează calculul operațional. Se elimină iq și

xi și se rezolvă în raport cu θ . Se găsește $\theta = \frac{\Phi_0 Q_0}{\sqrt{BK'}} e^{-\frac{A}{2N} t} \sin \left(\sqrt{\frac{B}{K'} - \frac{A^2}{4K^2}} t \right)$,

în care $K' = K + \Phi_0^2 C$.

14.33. Se alege un sens pozitiv pentru curent și pentru deviație. K fiind momentul de inerție a fiecărui cadru, λ coeficientul de torsiune a firului și k , constanta de proporționalitate a galvanometrului, ecuațiile de mișcare ale fiecărui cadru sunt:

$$K \frac{d^2 \alpha_1}{dt^2} = ki - c\alpha_1 \quad (1)$$

$$K \frac{d^2 \alpha_2}{dt^2} = ki - c\alpha_2 \quad (2)$$

și ecuația electrică a circuitului

$$-k \frac{d\alpha_1}{dt} - k \frac{d\alpha_2}{dt} = Ri \quad (3)$$

(a) Eliminând curentul i între aceste ecuații se obține

$$K \frac{d^2(\alpha_1 + \alpha_2)}{dt^2} - \frac{2k^2}{R} \frac{d(\alpha_1 + \alpha_2)}{dt} + c(\alpha_1 + \alpha_2) = 0 \quad (4)$$

Scăzând ecuațiile (1) și (2) se obține

$$K \frac{d^2(\alpha_1 - \alpha_2)}{dt^2} + c(\alpha_1 - \alpha_2) = 0 \quad (5)$$

Din ecuațiile (4) și (5) se obțin cele două deviații. Ecuațiile se rezolvă cu ajutorul calculului operațional. Punând $\Omega = \sqrt{\frac{c}{k} - \frac{k}{k^2 R^2}}$ și ținând seama de condițiile inițiale că la $t = 0$, $\alpha_1 = \alpha_0$ și $\alpha_2 = 0$ iar $\frac{d\alpha_1}{dt} = \frac{d\alpha_2}{dt} = 0$, se obține

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_0 \varepsilon^{-\frac{k^2}{RK} t} \left[\frac{k^2}{RK\Omega} \sin \Omega t + \cos \Omega t \right]; \quad \alpha_1 - \alpha_2 = \alpha_0 \cos \sqrt{\frac{c}{K}} t$$

de unde

$$\alpha_1 = \frac{\alpha_0}{2} \left\{ \varepsilon^{-\frac{k^2}{RK} t} \left[\frac{k^2}{KR\Omega} \sin \Omega t + \cos \Omega t \right] + \cos \sqrt{\frac{c}{K}} t \right\}$$

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_0}{2} \left\{ \varepsilon^{-\frac{k^2}{RK} t} \left[\frac{k^2}{KR\Omega} \sin \Omega t + \cos \Omega t \right] - \cos \sqrt{\frac{c}{K}} t \right\}$$

Discuția ecuațiilor se face în raport cu diversele constante ale circuitului.

(b) Cunoscând valorile lui α_1 și α_2 , din (3) se deduce valoarea curentului

$$i = \frac{kc}{KR\Omega} \varepsilon^{-\frac{k^2}{RK} t} \sin \Omega t$$

(c) La $t = 0$, $\alpha_1 = \alpha_0$ și $\alpha_2 = -\alpha_0$, rezultă

$$\alpha_1 = -\alpha_2 = \alpha_0 \cos \sqrt{\frac{c}{K}} t \quad \text{și} \quad i = 0$$

Galvanometrele funcționează ca și cum fiecare ar fi în circuit deschis.

Dacă la $t = 0$ $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_0$, atunci

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_0 \varepsilon^{-\frac{k^2}{RK} t} \left[\frac{k^2}{KR\Omega} \sin \Omega t + \cos \Omega t \right]$$

și

$$i = \frac{2kc\alpha_0}{KR\Omega} \varepsilon^{-\frac{k^2}{RK} t} \sin \Omega t.$$

14.34. Curentul inițial când mișcarea este uniformă și produsă de un efort exterior, este $I_0 = \frac{B l v_0}{R}$. După ce bara a fost lăsată liberă, ecuațiile circuitului sunt $i' = -\frac{dq}{dt}$; $B l v = R (i + i') + L \frac{d(i+i')}{dt}$; $q = C B l v$; $m \frac{dv}{dt} = -B l i$, din care se deduce, prin eliminarea lui v , q și i' , ecuația care dă curentul din bară

$$m' L \frac{d^2 i}{dt^2} + m' R \frac{di}{dt} + B^2 l^2 i = 0$$

în care s'a notat $m' = m + C B^2 l^2$. Condițiile inițiale de funcționare sunt: la $t = 0$, curentul în conductorul EF nu poate avea variații instantanee și deci $(i + i')_0 = I_0 = \frac{m'}{m} i_0 \therefore i_0 = \frac{m}{m'} I_0$ apoi $\left(\frac{di}{dt}\right)_0 = 0$. Utilizând calculul operațional, se obține expresia curentului. În cazul particular al problemei

$$\frac{1}{2} C R^2 I_0^2 = \frac{1}{2} L I_0^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m \frac{R^2 I_0^2}{B^2 l^2},$$

ecuația devine

$$2 L \frac{d^2 i}{dt^2} + 2 R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0$$

din care rezultă

$$i = \frac{I_0}{\sqrt{2}} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin\left(\frac{R}{2L}t + \frac{\pi}{4}\right)$$

și

$$v = v_0 e^{-\frac{R}{2L}t} \cos \frac{R}{2L} t.$$

14.35. Fie k factorul de proporționalitate între fem și viteza mașinii. Ecuațiile de funcționare ale sistemului sunt:

$$J_1 \frac{d\omega_1}{dt} = -k i_1; J_2 \frac{d\omega_2}{dt} = -k i_2; k \omega_1 = r i_1 + R i;$$

$k \omega_2 = r i_2 + R i$; $i_1 + i_2 = i$. Utilizând calculul operațional și ținând seama că $\omega_1(0) = \omega_2(0) = \omega_0$, dacă se elimină curenții între aceste ecuații se obține

$$[J_1 (r+2R) r p + k^2 (r+R)] \mathcal{L}\omega_1 - k^2 R \mathcal{L}\omega_2 = J_1 (r+2R) r \omega_0$$

$$[J_2 (r+2R) r p - k^2 (r+R)] \mathcal{L}\omega_2 + k^2 R \mathcal{L}\omega_1 = J_2 (r+2R) r \omega_0$$

Eliminând acum între acestea pe $L\omega_2$, respectiv pe $L\omega_1$, se obține

$$[J_1 J_2 (r+2R) r p^2 + (J_1 + J_2) k^2 (r+R) + k^4] \mathcal{L}\omega_1 = [J_1 J_2 (r+2R) r p + J_2 k^2 (r+R) - J_1 2k^2 R] \omega_0$$

și

$$[J_1 J_2 (r+2R) r p^2 + (J_1 + J_2) k^2 (r+R) + k^4] \mathcal{L}\omega_2 = [-J_1 J_2 (r+2R) r p - J_2 k^2 (r+R) + J_1 k^2 R] \omega_0$$

din care se deduce imaginea vitezelor și care sunt de forma $\mathfrak{L}\omega = \frac{ap+b}{p^2+dp+f}$ a cărui original se găsește ușor. Cunoscând imaginile vitezele, din ecuațiile $J(p\mathfrak{L}\omega - \omega_0) = -k\mathfrak{L}i$ se deduc imaginile curenților și deci expresiilor acestora. În cazul particular numeric se găsește: $\omega_0 = 31,4$, $k = 3,82$ și ecuațiile devin:

$$(1005 p^2 + 6631 p + 213) \mathfrak{L}\omega_1 = 31,4 (1005 p - 700) \\ (1005 p^2 + 6631 p + 213) \mathfrak{L}\omega_2 = 31,4 (-1005 p - 766).$$

Calculând se găsește: $\omega_1 = 34,6 e^{-0,57t} - 3,5 e^{-0,03t}$ rad/s; $\omega_2 = 34,7 e^{-0,57t} - 3,6 e^{-0,03t}$ rad/s; $i_1 = 1185 e^{-0,57t} - 0,55 e^{-0,03t}$ A; $i_2 = 1485 e^{-0,57t} - 0,71 e^{-0,03t}$ A; $i = 2670 e^{-0,57t} - 1,26 e^{-0,03t}$ A.

Nolă. Este interesant a se studia problema ținând seama și de induc-tanța L a mașinilor presupusă aceeași pentru ambele mașini. Ca date numerice, se va lua mai întâi $L = 10^{-3}$ H și apoi $L = 0.05$ H.

14.36. La un moment dat, forța electromotoare a mașinii este $e = \frac{U - k\omega}{R}$. Bilanțul energetic dă $U i dt = R i^2 dt + L i di + J \omega d\omega$

sau $U = R i + L \frac{di}{dt} + k\omega$, căci $J \frac{d\omega}{dt} = k i$. Eliminând pe i între aceste ecua-ții se obține:

$$L \frac{d^2\omega}{dt^2} + R \frac{d\omega}{dt} + \frac{k^2}{J} \omega = \frac{kU}{J}$$

care se integrează cu ajutorul calculului operațional fără dificultate. Curențul este dat de ecuația

$$L \frac{di}{dt} + R i + \frac{k^2}{J} \int i dt = U$$

care deasemenea se integrează ușor cu ajutorul calculului operațional.

Cantitatea totală de electricitate este dată de relația $q = \int_0^t i dt$ pentru $t = \infty$. Se va observa că în aceste condiții mașina funcționează ca un condensator.

14.37. Ecuațiile de funcționare ale sistemului sunt $J \frac{d\omega}{dt} = -k i_1$;

$k\omega = r i_1 + R i$; $i_2 = -C R \frac{di}{dt}$; $i = i_1 + i_2$. Se elimină între aceste ecuații i_1 , i_2 și ω și se obține ecuația (în operațional):

$$J C R r p^2 \mathfrak{L}i + (J R + J r + k^2 C R) p \mathfrak{L}i + k^2 \mathfrak{L}i = J k \omega_0$$

din care se deduce imaginea curențului i și apoi originalul acestuia, după care se determină toate celelalte mărimi căutate. Pentru verificarea bilanțului ener-getic se scrie că totalitatea căldurii disipate în rezistențele sistemului este egală cu suma energiei cinetice a mașinii plus energia electrică a condensatorului

$$R \int_0^\infty i^2 dt + r \int_0^\infty i_1^2 dt = \frac{1}{2} J \omega_0^2 + \frac{1}{2} C k^2 \omega_0^2$$

În cazul aplicației numerice: $\omega_0 = \frac{2\pi n_0}{60} = 94,3$ $k = 2,35$ și se găsește $i = 21,8(e^{-0,5t} - e^{-202,10^4 t})$ A, etc.

14.38. Ecuațiile sistemului sunt :

$$J \frac{d\omega}{dt} = -k i_1; \quad k\omega = r i_1 + R i + \frac{q_1}{C_1}; \quad i_1 + i_2 = i; \quad i_2 = -CR \frac{di}{dt} - \frac{C}{C_1} i;$$

$i = \frac{dq_1}{dt}$, din care rezultă ecuația operațională care determină imaginea curentului i :

$$CR r p^2 \mathfrak{L} i + \left[\frac{C + C_1}{C_1} r + R + \frac{k^2 CR}{J} \right] p i + \left[\frac{1}{C_1} + \frac{k^2}{J} \frac{C + C_1}{C_1} \right] \mathfrak{L} i = k \omega_0$$

Rezolvarea problemei se face ca și în cazul precedent.

14.39. Se scrie ecuația tensiunilor mașinii în perioada tranzitorie :

$$U = Ri + L \frac{di}{dt} + k \omega$$

deoarece $E = k\omega$. A doua ecuație se obține scriind bilanțul energetic al sistemului în aceeași perioadă

$$U i dt = R i^2 dt + d \left(\frac{1}{2} L i^2 \right) + d \left(\frac{1}{2} J \omega^2 \right), \quad (A)$$

din aceste două ecuații rezultă :

$$i = \frac{J}{k} \cdot \frac{d\omega}{dt}, \quad (B)$$

care introdusă în relația (A) dă ecuația diferențială în ω , care rezolvă problema. Se utilizează calculul operațional, obținându-se :

$$\omega = \frac{U}{k} \left[1 - \varepsilon^{-\delta t} \left(\operatorname{ch} \Omega' t + \frac{\delta}{\Omega'} \operatorname{sh} \Omega' t \right) \right] \quad (C)$$

în cazul regimului aperiodic și

$$\omega = \frac{U}{k} \left[1 - \varepsilon^{-\delta t} \left(\cos \Omega t + \frac{\delta}{\Omega} \sin \Omega t \right) \right] \quad (D)$$

în cazul regimului oscilant.

Introducând una din aceste valori în relația (B) se găsește pentru curenți :

$$i = \frac{U}{L \Omega'} \varepsilon^{-\delta t} \operatorname{sh} \Omega' t.$$

sau :

$$i = \frac{U}{L \Omega} \varepsilon^{-\delta t} \sin \Omega t$$

Numeric se găsește :

a) $i = 4460 \varepsilon^{-60t} \operatorname{sh} 53,6 t$

b) $i = 1320 \varepsilon^{-1,2t} \sin 3,63 t.$

Construirea curbelor nu prezintă nici o dificultate.

Constanta k se determină din relațiile (C) sau (D) pentru $t = \infty$, sau pe considerații fizice.

14.40. Ecuațiile de funcționare sunt $L \frac{di}{dt} + Ri + e = \frac{1}{2} U_n \frac{ei}{\omega} = M_{st} + J \frac{d\omega}{dt}$. Excitația fiind constantă $e = k\omega$ și $k\omega n = U_n - R I_n \therefore k = 126$. Se introduc valorile numerice și se aplică calculul operațional. Se elimină ei și se găsește

$$\begin{aligned}\omega &= 2,3 + 2,9 e^{-1,2t} - 0,6 e^{-0,92t} = \\ &= 2,3 + (2,3 \operatorname{ch} 2,36 t + 3,5 \operatorname{sh} 2,36 t) e^{-3,56 t} \text{ rad/s} \\ i &= 2,14 - 55,6 e^{-1,2t} + 55,7 e^{-0,92t} = \\ &= 2,14 + (0,7 \operatorname{ch} 2,36 t - 111,3 \operatorname{sh} 2,36 t) e^{-3,56 t} \text{ kA}\end{aligned}$$

Este interesant a se construi curbele de variație a curentului și a se da interpretarea fizică.

14.41. Condensatorul fiind încărcat are la borne tensiunea E . Constantele de integrare ale ecuațiilor (107) și (108) se determină pentru condițiile de limită: pentru $x=0$, $\varphi_{u_{x=0}} = \varphi_{u_0}$ pentru $x=X$, $\varphi_{u_{x=X}} = 0$. Făcând în (108) $x=0 \therefore A = \varphi_{u_0}$. Făcând în ambele ecuații $x=X$ și ținând seama de a doua condiție de limită, rezultă $B = -\varphi_{u_0} \frac{\operatorname{ch} \alpha X}{\operatorname{sh} \alpha X}$ și deci ecuațiile sistemului sunt

$$\varphi_u = \varphi_{u_0} \frac{\operatorname{sh} \alpha (X-x)}{\operatorname{sh} \alpha X} \quad (a)$$

$$\varphi_i = \frac{\varphi_{u_0}}{\beta} \frac{\operatorname{ch} \alpha (X-x)}{\operatorname{sh} \alpha X} \quad (b)$$

u_0 fiind tensiunea la capătul liniei, necunoscută. La condensator

$$i_0 = -C_K \frac{du_0}{dt}, \text{ de unde } \varphi_{i_0} = -p C_K \varphi_{u_0} + C_K E, \text{ căci } u_0(0) = E.$$

$$\text{Făcând în (b) } x=0 \text{ se obține } \varphi_{i_0} = \frac{u_0}{p} \frac{\operatorname{ch} \alpha X}{\operatorname{sh} \alpha X} \therefore \varphi_{u_0} = \frac{EC_K \beta \operatorname{sh} \alpha X}{\operatorname{ch} \alpha X + p C_K \beta \operatorname{sh} \alpha X}$$

de unde $\varphi_u = El \sqrt{1c} \frac{\operatorname{sh} \alpha (X-x)}{\alpha X \operatorname{sh} \alpha X + \gamma \operatorname{ch} \alpha X}$ în care $\gamma = \frac{cX}{C_K}$. Căutând originalul acestei funcții *) se găsește

$$u = 4E \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\cos \beta_s \sin \beta_s \frac{X-x}{X}}{2\beta_s + \sin 2\beta_s} \cos \frac{\beta_s}{X \sqrt{1c}} t.$$

14.42. Condițiile inițiale ale problemei sunt $u_{t=0} = U$ și $i_{t=0} = 0$, iar condițiile limită, $u_{x=0} = 0$ și $i_{x=X} = 0$ pentru $t > 0$. Constantele de integrare se determină ușor și sunt $A = -\frac{U}{p}$ și $B = \frac{U \operatorname{sh} \alpha X}{p \operatorname{ch} \alpha X}$. Ecuațiile de funcționare ale circuitului sunt

$$\begin{aligned}\varphi_u &= \frac{U}{p} \left[1 - \frac{\operatorname{ch} \alpha (X-x)}{\operatorname{ch} \alpha X} \right] \\ \varphi_i &= -\frac{U}{p\beta} \cdot \frac{\operatorname{sh} \alpha (X-x)}{\operatorname{ch} \alpha X},\end{aligned}$$

*) A se vedea M. I. Contorovlei, Operaționale iscislenie i nestacionarnâie iavlenia v electriciesbih țepiax, Moscova 1949, pag. 79.

a căror originale sunt

$$u = \frac{4}{\pi} U \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{\cos\left(\frac{2s+1}{2} \cdot \frac{X-x}{X} \pi\right) \cos\left(\frac{2s+1}{2X\sqrt{lc}} \pi t\right)}{2s+1}$$

$$i = -\frac{4}{\beta\pi} U \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{\sin\left(\frac{2s+1}{2} \cdot \frac{X-x}{X} \pi\right) \sin\left(\frac{2s+1}{2X\sqrt{lc}} \pi t\right)}{2s+1}$$

15.15.1. (a) Rezistența statică $R_s = \frac{U}{i} = \frac{1}{A\sqrt{u}}$

(b) Rezistența dinamică $R_o = \frac{du}{di} = \frac{2}{A3\sqrt{u}} = \frac{2}{3\sqrt{A^2 i}}$

(c) $u_0 = Ri + \left(\frac{i}{A}\right)^{2/3}$

15.2. Ecuația diferențială de funcționare a bobinei este $RL + N \frac{d\Phi}{dt} = U^*$, care se integrează prin metoda obișnuită cunoscându-se expresia lui Φ . Constanta de integrare se determină scriind că, la $t = 0$, $i_0 = 0$ și $i_p = \frac{U}{R} = 2 \text{ A}$. Se găsește $i = 2 \left(1 - e^{-\frac{10}{9}t}\right) / \left(1 - 1,05 e^{-\frac{10}{9}t}\right)$.

15.3. Din cauza simetriei curenților în laturile opuse sunt egali și $i_3 = i_0 + i_1$.

(a) Pentru $i_7 = 0 \dots i_1 = i_2 = i \dots U_{ab} = U_{ac}$; rezultă $u = Ri_2 = Ri$, de unde $i = \left(\frac{\alpha}{R}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} = 0,01 \text{ A}$ iar $u_0 = U + Ri = 20 \text{ V}$.

(b) Se scriu legile lui Kirchhoff circuitelor abd și $acbd$ și se obține $u_0 = R(i_1 + i_2) + \alpha i_1^\beta = 2R(i_1 + i_0) + R_0 i_0$. Diferențiind în raport cu u_0 , scriind că $\frac{di_0}{du_0} = 0$ și rezolvind sistemul se găsește $i_1 = \left(\frac{R}{\alpha\beta}\right)^{\frac{1}{\beta-1}} = 0,0025 \text{ A}$; $i_0 = \frac{\alpha i_1^\beta R i_1}{R + R_0} = 0,002 \text{ A}$; $i_2 = i_0 + i_1 = 0,0045 \text{ A}$ și $u = 2Ri_2 + R_0 i_0 = 9,5 \text{ V}$.

15.4. Ecuația diferențială a circuitului este $v(i) + \frac{1}{C} \int i dt = E$ care prin

*) Vezi I. S. Antoniu, Chestiuni speciale de electrotehnică, București 1952, pag. 133.

separare de variabile și integrare dă

$$\frac{t}{C} = \int_{E-v(i)-E_{ct}}^{E-v(i)-E_{co}} \frac{d[E-v(i)]}{i}$$

Integrala reprezintă suprafața cuprinsă între curba $1/i$ trasată în funcție de $E-v(i)$ pentru $E-v(i)$ dela zero la valoarea lui v corespunzătoare E_{ct} , tensiunea la bornele condensatorului la timpul t . Efectuarea integralei se face conform schemei din fig. 15.4.

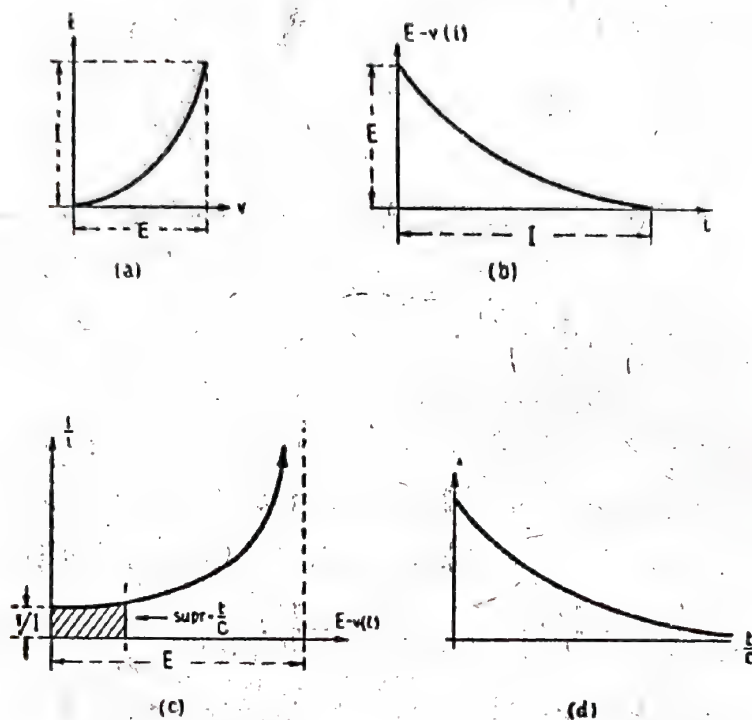


Fig. 15.4

Se obține rezultatul

t/C	0	0,5012	1,0902	1,7965	2,6753	3,8055	5,3315
i	21,6	18,5	15,68	12,90	10,20	7,80	5,65
6,306	7,505	9,034	11,059	13,888	16,252	18,272	mA
4,70	3,75	2,90	2,15	1,50	1,10	0,9	ks/F

Problema poate fi rezolvită pe orice cale, obținându-se rezultate foarte apropiate. Analitic, caracteristica este de forma $i = k v^n$ în care se poate lua $n =$

$3/2$ și $K = 22 \cdot 10^{-6} \text{ Av}^{-3/2}$

15.5. Se rezolvă în același mod, calculându-se integrala

$$\frac{t}{L} = \int_{i_0}^{i_t} \frac{di}{E-v(i)}$$

și obținându-se rezultatul :

$\frac{t}{L}$	0	0,0095	0,0242	0,0465	0,0751	0,1144	0,1684
i	0	0,9	2,15	3,75	5,65	7,80	10,20
	0,2033	0,2466	0,2961	0,3605	0,3964	0,4416	0,4945
	11,50	12,90	14,25	15,68	16,35	17,08	17,80
	0,5575	0,6250	0,7126	0,8376	1,0776	∞	mA
	18,50	19,10	19,70	20,30	20,94	∞	ms/H

15.6. Un circuit serie cu condensator și rezistență neliniară. Problema se rezolvă ca mai sus, prin integrare directă deoarece se cunoaște ecuația caracteristicii rezistenței nelineare.

Se calculează curentul tranzitoriu de descărcare a condensatorului în ambele cazuri și se compară rezultatele.

15.7. Caracteristica volt-ampere a thyritei conduce la ecuația $i = 5 \cdot 10^{-3} u$ și problema se poate rezolva analitic ca și problema precedentă.

15.8. Punctul de coordonate (i, u) se găsește pe curba (1). Aplicând legea lui Kirchhoff se găsește $Ri + u = u_0$ sau $0,4 \cdot 10^6 i + u = 500$, o dreaptă (2) care taie curba (1) în punctul $i = 0,36$ mA și $u = 360$ V. Pentru a doua chestiune $R = 0,35$ M Ω .

15.9. Fie i_1 curentul în elementul nelinear, i_2 curentul din rezistența R și u tensiunea comună. Aplicând legea întâia a lui Kirchhoff rezultă

$$i_1 + \frac{u}{0,5 \cdot 10^6} = 0,84 \cdot 10^{-7}.$$

Punctul de funcționare se găsește la intersecția acestei drepte (3) cu curba (1) (fig. 15.8). Se găsește $u = 320$ V, $i_1 = 0,9$ mA, $i_2 = 0,64$ mA.

15.10. Problema se rezolvă grafic*). Neglijând căderea ohmică din circuit, ecuația de funcționare a transformatorului este $w \frac{d\Phi}{dt} = E \sqrt{2} \sin(\omega t + \psi)$. Un-

ghi ψ se determină scriind că la timpul $t=0$, $E \sqrt{2} \sin \psi = -\frac{1}{2} E \sqrt{2} \therefore \psi = -30^\circ$.

Din ecuația de mai sus se determină expresia fluxului $\Phi = \frac{E \sqrt{2}}{w \omega} \sin\left(\omega t + \psi - \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right)$. Curba fluxului este nesinusoidală având un termen constant.

Curba de magnetizare se construiește pentru întreg ciclul de histerezis. Curba curentului de magnetizare se construiește pe cale grafică, apoi se descompune în armonice.

*) Vezi I. S. Antoniu, Chestiuni speciale de electrotehnică, București, 1952, pag. 429.

15.11. Ecuația de funcționare a circuitului este $L \frac{di}{dt} + u_R + \frac{1}{C} \int idt = e$, în care U_R reprezintă caracteristica neliniară a rezistenței întregului circuit: $U_R = v_1(i) + Ri$.

Notând $u_C(t) = \frac{1}{C} \int idt$ tensiunea la bornele condensatorului, din ecuația de funcționare se deduce $di = \frac{1}{L} [e - u_R - u_C(t)] dt$. Soluția se obține presupunând că în intervalul de timp Δt , suficient de mic, variația curentului (di/dt) este constantă în întreg intervalul. Imediat după închiderea circuitului, care se consideră ca origină de timp, curentul rămâne egal cu zero din cauza prezenței inductanței; rezultă că și $u_R = 0$ și $u_C = 0$. Rezultă $\left(\frac{di}{dt}\right)_0 = \left(\frac{e}{L}\right)_{t=0}$. În ipoteza făcută că (di/dt) rămâne constant în intervalul de timp Δt , curentul la sfârșitul acestui interval va fi

$$\Delta i_1 = i_1 = \left(\frac{di}{dt}\right) \cdot \Delta t.$$

Cunoscând valoarea curentului i_1 , din caracteristica volt-ampere a rezistenței neliniare se deduce u_{R1} . Pentru a găsi și u_C la sfârșitul acestui prim interval se calculează cantitatea de electricitate înmagazinată în condensator în acest interval de timp, care este egală cu suprafața cuprinsă între curba de curent, axa timpurilor și ordonata lui Δt_1 . Pentru intervalul $0 - \Delta t_1$ se găsește

$$q_1 = \frac{i_1}{2} \Delta t_1 \therefore u_{C1} = q_1/C. \text{ Pentru al doilea interval curentul este } \left(\frac{di}{dt}\right)_1 = \frac{e_{t=t_1} - u_{R1} - u_{C1}}{L}.$$

În timpul acestui nou interval curentul crește de la i_1 la $i_2 = i_1 + \Delta i_2$ în care $\Delta i_2 = \left(\frac{di}{dt}\right)_1 \Delta t_2 = \frac{e_{t=t_1} - u_{R1} - u_{C1}}{L} \Delta t_2$. În același inter-

val de timp sarcina condensatorului crește cu $\Delta q_2 = \frac{i_1 + i_2}{2} \Delta t_2 = \left(i_1 + \frac{\Delta i_2}{2}\right) \Delta t_2$, astfel că sarcina condensatorului la sfârșitul celui de al doilea interval este $q_2 = q_1 + \Delta q_2$, iar tensiunea la bornele condensatorului $u_{C2} = q_2/C$. Calculul se urmează la fel pentru oricâte intervale, obținându-se curba curentului. Se va ține seama că dioda nu redresează decât o singură alternanță, cea negativă în cazul de față. Cunoscând curba curentului, printr-o integrare grafică se deduce curba tensiunii la bornele condensatorului și deci la bornele de ieșire ale circuitului.

15.12. (a) Fie i_1 curentul care trece prin redresor și i_2 curentul care trece prin rezistență. Prima lege a lui Kirchhoff dă $i = i_1 + i_2$. Scriind că tensiunea la bornele

comune este aceeași, se obține ecuația $u = 10^2 \sqrt{10^3 i_1^2} = Ri_2$, care, rezolvată în raport cu i_1 dă $i_1 = 0,1$ A, celelalte două rădăcini fiind imaginare $\therefore i_2 = 0,1$ A.

(b) Ecuația de funcționare a circuitului este $i = i_R + C \frac{du}{dt}$, în care i_R este curentul din redresor și i curentul dat de generator. Ținând seama de caracteristica redresorului și separând variabilele, pentru datele numerice ale problemei se obține

$$t = 10^{-2} \int \frac{du}{2 \cdot 10^3 - u^{1,5}}$$

care efectuată dă

$$t = \frac{1}{10\sqrt{2}} \left[\frac{1}{3} \ln \frac{10\sqrt[3]{200} - 20\sqrt{2}\sqrt[3]{u} + u}{10\sqrt[3]{200} + 10\sqrt{2}\sqrt[3]{u} + u} + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \frac{10\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{u}}{10\sqrt{3}\sqrt[3]{2}} \right]$$

Pentru $t = 10^{-3}$ s se determină valoarea lui u din curba de mai sus.

15.13. Problema se rezolvă grafic ca și problema 15.4. Se deduce timpul de încărcare

$$t_1 = C \int_{E_{co}}^{E_{ct}} \frac{d[E - v(i)]}{i}$$

în care, toate elementele integralei sunt cunoscute. Cunoscând timpul t_2 de descărcare a condensatorului rezultă $\Delta t = t_1 - t_2$ și deci $f = 1/\Delta t$.

15.14. Problema se rezolvă analog cu precedentă. Ecuația de funcționare a circuitului este $L \frac{di}{dt} + v(i) = E$ pentru perioada de conectare la sursă și

$L \frac{di}{dt} + v(i) = 0$ pentru perioada de scurtcircuitare. Prin separare de variabile și integrare între limitele de curent date în ambele cazuri, se găsește $t_1 = 0,01045$ s și $t_2 = 0,00169$ s de unde rezultă $f = 114$ Hz.

15.15. Caracteristica volt-ampere a rezistenței este $R\sqrt{i} = u \therefore i = \frac{1}{R^2} u^2$

și ecuația de funcționare a circuitului $L \frac{di}{dt} + R\sqrt{i} = U\sqrt{2} \sin \omega t$, ecuație neliniară care nu se poate rezolva decât grafic sau prin transformarea în ecuația integro-diferențială $i = i_0 - \frac{R}{L} \int_0^t \sqrt{i(t)} dt + \frac{U\sqrt{2}}{L} \int_0^t \sin \omega t dt$ și care se rezolvă prin aproximații succesive.

15.16. Se shuntează intrerupătorul cu o rezistență $p = Kt$. Ecuațiile circuitului sunt

$$\begin{aligned} (R + R_1) i - R_1 i_1 + L \frac{di}{dt} &= 0 \\ -R_1 i + (p + R_1 + R_2) i_1 &= E \end{aligned}$$

din care eliminând pe i , se obține o ecuație diferențială lineară de forma

$$\frac{di}{dt} + p(t) i + q(t) = 0$$

în care

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{R + R_1}{L} - \frac{R_1^2}{R_1 + R_2 + Kt} \\ q(t) &= - \frac{R_1 E}{R_1 + R_2 + Kt} \end{aligned}$$

a cărei soluție este

$$i = e^{-\int p(t) dt} \left[C - \int q(t) e^{\int p(t) dt} dt \right]$$

constanta de integrare C se determină scriind că, la timpul $t = 0$ are valoarea regimului permanent stabilit în problema 13.43. Cunoscând curentul i_1 se deduce curentul i_2 .

15.17. Diodele având o rezistență infinită pentru sensul curentului dela catod către anod (dela filament către placă), la închiderea întrerupătorului K curentul $i_2 = 0$, iar la deschiderea acestuia, curentul $i_1 = 0$.

(a) La închiderea întrerupătorului ecuațiile de funcționare ale circuitului se obțin aplicând metoda circuitelor independente și luând ca bucle (1) RLE și $E(1)$: $v(i_1) = E \therefore i_1 = 7,8 \text{ mA}$. $L \frac{di_3}{dt} + Ri_3 = E \therefore i_3 = 12,5 (1 - e^{-400t}) \text{ mA}$

și $i = i_1 + i_3 = 20,3 - 12,5 e^{-400t} \text{ mA}$.

(b) La deschiderea întrerupătorului $i_1 = 0$, $i = 0$ și $i_2 = i_3$. Ecuația de funcționare este $L \frac{di_3}{dt} + Ri_3 + v(i) = 0$, care prin separarea variabilelor și integrare dă

$$t = -L \int_{i_0}^0 \frac{di_3}{Ri_3 + v(i)}$$

Această integrală se efectuează grafic așa după cum s'a arătat în problema 15.4.

15.18. (a) În timpul unei alternanțe nu funcționează decât o singură diodă. Ecuația de funcționare este

$$L \frac{di_L}{dt} + Ri_L + v(i) = e_1$$

care se rezolvă grafic

(b) Da.

15.19. (a) Ecuația de funcționare a circuitului este analoagă cu ecuația din problema precedentă, și se rezolvă grafic.

(b) Cunoscând curba $i = f(t)$ dedusă mai sus, se calculează pentru fiecare moment produsul $u i t$, u fiind luat din caracteristica arcului. Suma acestor produse dă energie disipată în arc.

(c) Tot din curba de curent se calculează pentru fiecare moment valoarea expresiei $Ri + L \frac{di}{dt} = f(t)$ trasându-se curba corespunzătoare.

(d) Se caută condiția pe care trebuie să o îndeplinească R pentru ca i să devină nul.

15.20. Circuitul comportă acum două bucle și se determină curenții corespunzători, prin integrare grafică.

15.21. Se presupune că mașina nu este saturată și deci se poate scrie $w\Phi = w\Phi_0 + K i$, Φ_0 fiind fluxul remanent. R și L fiind rezistența și inductanța întregului circuit (mașina și sarcina), iar $e = nw\Phi$, forța electromotoare produsă de mașină, ecuația de funcționare a mașinii este

$$(R - K n) i + L \frac{di}{dt} = n w \Phi_0$$

Aplicând criteriul lui Hurwitz, pentru ca curentul să crească cu timpul trebuie ca regimul liber să nu se amortizeze și deci $a_1 < 0$, determinantul lui Hurwitz reducându-se numai la acesta. Se obține $n > \frac{R}{K}$, regimul critic fiind pentru

$n = \frac{R}{K}$, viteză sub care mașina nu se amorsează. Trebuie deci ca R să fie mic

și K suficient mare, K fiind proporțional cu produsul numărului de spire al indusului și inductorului și invers proporțional cu reluctanța circuitului magnetic.

15.22. Dacă r , R , R_e , L și n sunt rezistența inductorului, rezistența indusului, rezistența circuitului exterior, inductanța inductorilor și viteza mașinei, ecuațiile de funcționare ale mașinei sunt

$$e = R(I + i) + R_e I = R(I + i) + ri + L \frac{di}{dt} = n\omega\Phi_0 + Kn i,$$

în care I este curentul principal al mașinei și i curentul de excitație. S'a neglijat inductanța indusului și s'a presupus mașina nesaturată. Eliminând pe I și e între aceste ecuații se obține

$$\left(r + R + \frac{rR}{R_e} - Kn\right)i + L \left(\frac{R + R_e}{R_e}\right) \frac{di}{dt} = n\omega\Phi_0$$

Aplicând criteriul lui Hurwitz, pentru ca curentul să crească cu timpul, trebuie ca

$$a_1 = r + R + \frac{rR}{R_e} - Kn < 0$$

de unde condiția de amorsare a mașinei

$$n > \frac{R + r + \frac{Rr}{R_e}}{K},$$

rezultă că și în acest caz există o viteză critică sub care mașina nu se amorsează. Trebuie de asemenea ca R_e să fie mare.

15.23. Desvoltând produsul se găsește o ecuație de gradul 3 în p . Condiția de funcționare în regim critic este $a_1 a_2 - a_0 a_3 = 0$, de unde se găsește $K_1 K_2 K_3 = 122$.

15.24. Ecuațiile circuitului scrise în cantități complexe sunt

$$\rho \bar{I}_1 = \bar{U} + K \bar{V}$$

$$\bar{U} + L_1 \bar{p} \bar{I}_1 + M_1 \bar{p} \bar{I}_2 = 0$$

$$\bar{V} = M_2 \bar{p} \bar{I}_2$$

$$\left(R + \bar{p} L_2 + \frac{1}{\bar{p} C}\right) \bar{I}_2 + M_1 \bar{p} \bar{I}_1 = 0$$

între care eliminând pe \bar{U} , \bar{V} și \bar{I}_2 și ținând seama că $\bar{I}_2 = 0$, se obține

$$[M_1 (KM_2 - M_1) + L_1 L_2] \bar{p}^3 + (\rho L_2 + RL_1) \bar{p}^2 + \left(\frac{L_1}{C} + \rho R\right) \bar{p} + \frac{\rho}{C} = 0$$

Condiția de producere a undelor autoîntreținute este $a_1 a_2 - a_0 a_3 < 0$, de unde

$$K M_2 > M_1 + \frac{CR\rho}{M_1} \left(L_2 + \frac{R}{\rho} L_1\right) + \frac{L_1^2}{M_1} \frac{R}{\rho}$$

dacă $M_1 > 0$ și $M_2 > 0$. În caz contrariu se schimbă și semnul inegalității de mai sus.

PARTEA V

16. 16.1. a)

1
8
-4
8

 ; b)

-2
-3
4
-5

 ; c) 28 ;

d)

-2	10	0	6
-3	15	0	9
4	-20	0	-12
-5	25	0	15

 ; e)

4	10	0	-4
6	15	0	-6
-8	-20	0	8
10	25	0	-10

 ; f)

34
51
-68
85

 ;

g)

9	19	25	-2
---	----	----	----

16.2. a) $-\frac{1}{9}$

16	-8	1
-14	7	-2
1	-2	1

 b)

1		
	1	
		1

16.3. Se găsește :

$$\begin{aligned} \|e_1\| - \|Z_3\| \cdot \|Z_9\|^{-1} \cdot \|e_3\| &= (\|Z_1\| - \|Z_3\| \cdot \|Z_9\|^{-1} \cdot \|Z_7\|) \cdot \|i_1\| + \\ &+ (\|Z_2\| - \|Z_3\| \cdot \|Z_9\|^{-1} \cdot \|Z_8\|) \cdot \|i_2\| \\ \|e_2\| - \|Z_6\| \cdot \|Z_9\|^{-1} \cdot \|e_3\| &= (\|Z_4\| - \|Z_6\| \cdot \|Z_9\|^{-1} \cdot \|Z_7\|) \cdot \|i_1\| + \\ &+ (\|Z_5\| - \|Z_6\| \cdot \|Z_9\|^{-1} \cdot \|Z_8\|) \cdot \|i_2\|. \end{aligned}$$

16.4. Calculul se face utilizându-se proprietățile matricelor compuse și nu prezintă nicio dificultate.

16.5. Se descompun matricele date în raport cu ultima linie și coloană transformându-se în matrice compuse din care se scot două ecuații matriciale

cu două matrice necunoscute; din acestea se elimină necunoscuta respectivă. Rezultatul obținut se scrie din nou în funcție de elementele date și se procedează apoi în același mod până la obținerea ultimei necunoscute. Eliminantul are forma $\|Z'\| = \|Z_1\| - \|Z_2\| \cdot \|Z_4\|^{-1} \cdot \|Z_3\|$.

16.6. Se scrie ecuația matricială a sistemului dat, care se descompune în matrice în raport cu necunoscutele căutate. Folosind eliminantul dat mai sus, se găsește până la urmă;

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 67 & 63 \\ 101 & 105 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Soluția se găsește, calculând:

$$\|X\| = \|A\|^{-1} \cdot \|B\|.$$

16.7. Se procedează ca mai sus. Se găsește:

$$\begin{bmatrix} 15 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,5 & 11 \\ 3,5 & 26 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$$

16.8. Se aplică relația dată și se găsește:

$$a) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\theta & -\cos\theta \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \end{bmatrix}; \quad b) \omega \times \begin{bmatrix} 0 & -\sin\omega t & 0 \\ \cos\omega t & 0 & \cos\omega t \\ 0 & -\sin\omega t & 0 \end{bmatrix}$$

16.9. Se obține efectuând produsul matricial între cele două matrice, produsul $x_n \cdot A_n$ fiind $\frac{d a_n}{d x_n}$. Se obține:

$$\begin{matrix} m \\ n \\ k \end{matrix} \begin{bmatrix} x_m \\ x_n \\ x_k \end{bmatrix} \cdot \begin{matrix} a & h & c \\ \cos x_m & 2 & \sin x_k \end{matrix} = \begin{matrix} m \\ n \\ k \end{matrix} \begin{matrix} a & h & c \\ -\sin x_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos x_k \end{matrix}$$

16.10 Se aplică relația dată și se găsește :

$$a) \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2\theta + A & -\cos\theta + B & \sin\theta + C \\ \hline \end{array}$$

$$b) \frac{1}{\omega} \begin{array}{|c|c|} \hline & \sin\omega t + B' \\ \hline \omega t + A' & -\cos\omega + C' \\ \hline \end{array}$$

în care A, B, C , etc. sunt constantele de integrare.

16.11. Se calculează făcând produsul matricial :

$$\int \|A\| \cdot \|dx\|$$

Se găsește :

$\|I\| = (\sin x_a + A) + (3x_b + B) - (\cos x_c + C)$, A, B, C , fiind constantele de integrare.

16.12. În același mod se găsește :

$$\int \|B\| \cdot \|dx\| = \frac{1}{\omega} \begin{array}{|c|} \hline (\sin \omega x_a + A) + (\sin \omega x_c + C) \\ \hline (\omega x_a + A_1) - (\cos \omega x_b + B_1) + (2\omega x_c + C_1) \\ \hline \end{array}$$

A, A_1, B, C, C_1 fiind constantele de integrare.

$$16.13. a) \|e\|^* = \begin{array}{|c|} \hline e_1 \\ \hline e_2 + je_3 \\ \hline \end{array} ;$$

$$b) \|e\|^* = \begin{array}{|c|c|} \hline \varepsilon^{-j\theta} & \\ \hline & \varepsilon^{j\theta} \\ \hline \end{array} ; c) \|Z\|^* = \begin{array}{|c|c|} \hline p + jp\theta & Z \varepsilon^{-ja} \\ \hline Z & p - jp\theta \\ \hline \end{array}$$

14.14 Ținând seama de indicii liniilor și coloanelor se găsește :

E R A T Ă

Pag.	Rândul	În loc de	A se citi
222	6 de sus	3.25	4.25
222	9 de sus	3.26	4.26
222	13 de jos	3.27	4.27
222	6 de jos	3.29	4.28
223	16 de sus	3.29	4.29

228 5.18 soluție Se găsește OP_2
proiecția
vectorului

Vectorul \bar{S}_2 obținut, la scara 25 mm =
= 10 MVA, reprezintă puterea aparentă
maximă teoretică pe care o putem obține
pentru cele două tensiuni E și U și
impedanța \bar{Z} date.

Punctul real de funcționare cu putere
maximă corespunde intersecției cercului
cu centrul în O_2 și raza r , cu cercul cu
centrul în O și raza egală cu 5000 kVA.

În acest caz se obține $P_{2 \text{ max. real}} =$
= 4,7 MW ; $\eta_{\text{real}} = 0,88$.

403	1 de sus	$t \geq 1$	$t \geq 0$
404	1 de sus	$t \geq 1$	$t \geq 0$
405	1 de sus	$t \geq 1$	$t \geq 0$
406	1 de sus	$t \geq 1$	$t \geq 0$

Culegere de probleme de electrotehnică

... se obțin n^2 ecuații lineare în a_{jk} (n^2 fiind numărul de elemente

16.14. Ținând seama de indicii liniilor și coloanelor se găsește :

$$\|C\|^{-1} = \frac{1}{3} \|C_t\|^* = \frac{1}{3}$$

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>h</i>	1	1	1
<i>d</i>	1	<i>a</i>	<i>a</i> ²
<i>i</i>	1	<i>a</i> ²	<i>a</i>

$$\|C_t\|^{-1} = \frac{1}{3} \|C\|^* = \frac{1}{3}$$

	<i>h</i>	<i>d</i>	<i>i</i>
<i>a</i>	1	1	1
<i>b</i>	1	<i>a</i>	<i>a</i> ²
<i>c</i>	1	<i>a</i> ²	<i>a</i>

$$\|C_t^*\|^{-1} = \frac{1}{3} \|C\| = \frac{1}{3}$$

	<i>h</i>	<i>d</i>	<i>i</i>
<i>a</i>	1	1	1
<i>b</i>	1	<i>a</i> ²	<i>a</i>
<i>c</i>	1	<i>a</i>	<i>a</i> ²

$$\|C^*\|^{-1} = \frac{1}{3} \|C_t\| = \frac{1}{3}$$

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>h</i>	1	1	1
<i>d</i>	1	<i>a</i> ²	<i>a</i>
<i>i</i>	1	<i>a</i>	<i>a</i> ²

16.15. Fie A_{jk} elementele matricei date și a_{jk} elementele matricei inverse. Se scrie :

$$\|A_{jk}\| \|a_{jk}\| = \|1\|$$

prin identificare se obțin n^2 ecuații lineare în a_{jk} (n^2 fiind numărul de elemente

ale matricei date) din care se calculează elementele matricei inverse și se vede că ele sunt de forma cunoscută $(-1)^{f+k} \frac{\delta_{jk}}{\Delta}$.

17. 17.1. Alegându-se drept curenți independenți curenții din laturile AB, GB, FH și DA, se găsește ușor :

$$\|C\| = \begin{array}{c|cccc} & s & t & u & v \\ \hline a & 1 & & & \\ b & -1 & & & 1 \\ c & 1 & 1 & & \\ d & & & 1 & \\ f & & & -1 & 1 \\ g & & & & 1 \\ h & & 1 & & \\ i & & 1 & -1 & 1 \end{array} ; \quad \|e'\| = \begin{array}{c|c} s & \\ \hline t & e_h \\ \hline u & \\ \hline v & e_g \end{array}$$

$$\|Z'\| = \begin{array}{c|cccc} & s & t & u & v \\ \hline s & Z_a + Z_b + Z_c & Z_c & & -Z_b \\ t & Z_c & Z_c & & \\ u & & & Z_a + Z_f & -Z_f \\ v & -Z_b & & -Z_f & Z_b + Z_f \end{array}$$

Observații: 1° Rezultatele finale depind de curenții independenți aleși. A se verifica.

2° Matricea $\| Z \|$ este diagonală și are ultimele trei linii și coloane nule. Se va profita de aceasta pentru a se simplifica calculul lui $\| Z' \|$ prin utilizarea matricelor compuse.

17.2. Se iau drept curenți independenți curenții din laturile BC , CG , AD și FG . Se găsește :

$$\| C \| =$$

	s	t	u	v
a		1	-1	1
b	1			
c	1	-1		
d	1	-1	1	
f				1
g			1	1
h			1	
j	-1	1	-1	1
k		1		
l			1	
m	1	-1	1	-1
n		-1		

$$\| e' \| =$$

s	t	u	v
		e_t	
			e_f

$$\| Z' \| =$$

	s	t	u	v
s	$Z_b + Z_c + Z_d + Z_j + Z_m$	$-Z_c - Z_d - Z_j - Z_m$	$Z_d + Z_j + Z_m$	$-Z_j - Z_m$
t	$-Z_c - Z_d - Z_j - Z_m$	$Z_a + Z_c + Z_d + Z_j + Z_k + Z_m + Z_n$	$-Z_a - Z_d - Z_j - Z_m$	$Z_a + Z_j + Z_m$
u	$Z_d + Z_j + Z_m$	$-Z_a - Z_d - Z_j - Z_m$	$Z_a + Z_d + Z_g + Z_h + Z_j + Z_i + Z_m$	$-Z_a + Z_g - Z_j - Z_m$
v	$-Z_j - Z_m$	$Z_a + Z_j + Z_m$	$-Z_a + Z_g - Z_j - Z_m$	$Z_a + Z_g + Z_j + Z_m$

17.3. Se aplică prima lege a lui Kirchhoff nodurilor A, B și C . Se găsește sistemul $\|K\| \cdot \|i\| = 0$ în care

	a	b	c	d	f	g	h
A		-1	-1			1	
B			1		-1		1
C	-1			1			-1

17.4. Neglijând curentul de magnetizare se găsește: $n_a i_a + n_b i_b + n_c i_c + n_d i_d + n_f i_f = 0$. Aplicând metoda indicată în breviar (17.5 β) rezultă

	a'	b'	c'	d'
a	1			
b		1		
c			1	
d				1
f	$-\frac{n_a}{n_f}$	$-\frac{n_b}{n_f}$	$-\frac{n_c}{n_f}$	$-\frac{n_d}{n_f}$

17.5. Schema transformatorului și rețeaua primitivă a acestuia sunt date în figura 17.5. Fiind numai doi curenți independenți, se obține

	$1'$	$3'$
1	1	
2		$-a^2$
3		1
4		1

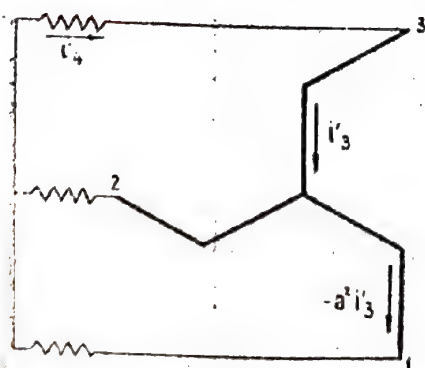
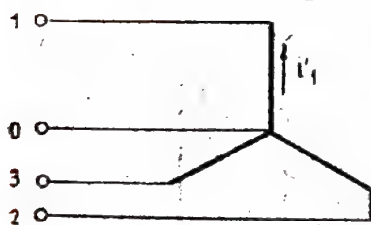
o matrice complexă.

Circuitul magnetic dă

$$\|C_2\| = \begin{array}{c|c} 3'' & \\ \hline 1' & N \\ \hline 3' & 1 \end{array}$$

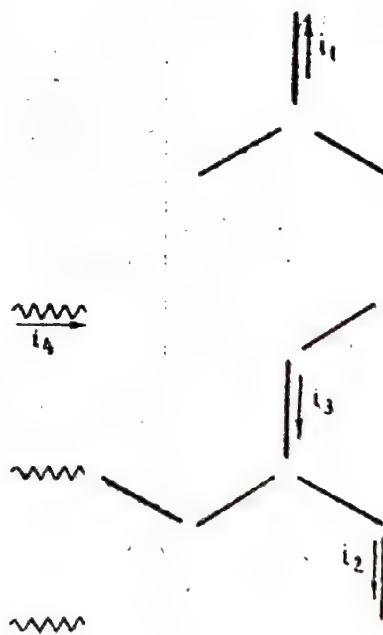
în care s'a notat $N = \frac{n_2 a^2}{n_1} - \frac{n_3}{n_1}$. Rezultă

$$\|C\| = \|C_1\| \cdot \|C_2\| = \begin{array}{c|c} 3'' & \\ \hline 1 & N \\ \hline 2 & -a^2 \\ \hline 3 & 1 \\ \hline 4 & 1 \end{array}$$



(a)

Fig. 17.5



(b)

17.6. Rețeaua primitivă este dată în figura 17.6. Se găsește astfel :

$$\|C_1\| = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} a' & b' \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \\ & a-a^2 \\ & a-a^2 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \|C_2\| = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} b'' \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} a' \\ b' \end{matrix} & \begin{bmatrix} -N \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \|C\| = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} b'' \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} -N \\ 1 \\ a-a^2 \\ a-a^2 \end{bmatrix} \end{array}$$

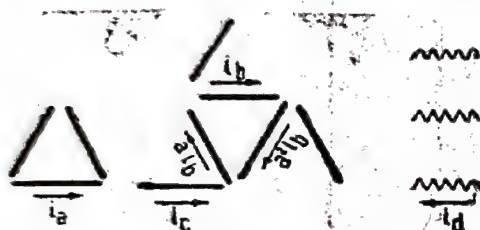


Fig. 17.6.

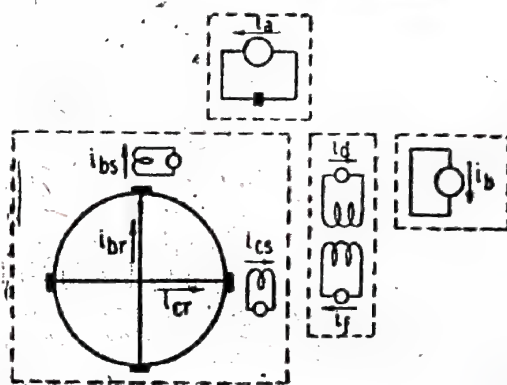


Fig. 17.7

17.7. Rețeaua primitivă este dată în figura 17.7. de unde rezultă imediat matricea de conexiune căutată.

$$\|C\| = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} b'_s & b'_r & c'_r & c'_s & d' \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} b_s \\ b_r \\ c_r \\ c_s \\ a \\ b \\ d \\ f \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & n_d & \\ 1 & & & & \\ 1 & & & & -1 \\ & & & & n_d \\ & & & -n_f & \end{bmatrix} \end{array}$$

17.8. Se iau drept curenți independenți curenții din laturile AB , CD și AC . Se găsește :

$$\|C\| = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ f \\ g \end{array} \begin{array}{c|c|c} p & q & r \\ \hline & & 1 \\ \hline & -1 & 1 \\ \hline & 1 & \\ \hline 1 & & 1 \\ \hline -1 & 1 & -1 \\ \hline 1 & & \end{array} ; \quad \|e'\| = \begin{array}{c} p \\ q \\ r \end{array} \begin{array}{c} e_p \\ e_c \\ \end{array}$$

$$\|Z'\| = \begin{array}{c} p \\ q \\ r \end{array} \begin{array}{c|c|c} p & q & r \\ \hline Z_{aa}-Z_{df}-Z_{fd}+Z_{ff}+Z_{gg} & Z_{df}-Z_{ff} & Z_{aa}-Z_{df}-Z_{fd}+Z_{ff} \\ \hline Z_{fd}-Z_{ff} & Z_{bb}+Z_{cc}+Z_{ff} & -Z_{ba}-Z_{bb}+Z_{fd}-Z_{ff} \\ \hline Z_{aa}-Z_{df}-Z_{fd}+Z_{ff} & -Z_{ab}-Z_{bb}+Z_{df}-Z_{ff} & Z_{aa}+Z_{ab}+Z_{ba}+Z_{bb}+Z_{aa}-Z_{df}-Z_{fd}-Z_{ff} \end{array}$$

Curenții se calculează cu relația (123) de unde rezultă :

$$\|i'\| = \|Z'\|^{-1} \cdot \|e'\|.$$

Se găsesc apoi curenții în laturi cu relația (119) și diferențele de potențiale la bornele fiecărui element cu relația (124).

Pentru a găsi condiția de echilibru a punții Wheatstone se scrie că $e_{AB} = 0$, ceea ce duce la $e_p = 0$; $Z_{ab} = Z_{ba} = 0$; $Z_{df} = Z_{fd} = 0$. Se găsește condiția cu necunoscută $Z_{aa} = Z_{bb} = Z_{aa} \cdot Z_{ff}$.

Observații. Pentru rezolvarea ultimului punct nu este necesar să se facă întreg calculul, în special al matricei inverse. Este suficient să se calculeze numai elementul corespunzător.

Se găsește condiția de echilibru sub forma :

$$\frac{e_{cc}}{\Delta} \cdot \beta \cdot Z_{gg} = 0 \dots \beta = 0$$

în care β este elementul corespunzător al matricei $\|Z'\|^{-1}$.

17.9. Sunt doi curenți independenți. Se găsește :

$$\|C\| = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{c} p \quad q \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline & 1 \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} \end{array} ; \quad \|e'\| = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & p \\ & q \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline e_d \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$\|Z'\| = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & p \quad q \end{array} \\ \begin{array}{c} p \\ q \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline R_a + pL_a & pM_2 + (M_1 + M_3)p\theta \\ \hline -M_3p\theta + pM_6 & R_b + R_c + p(L_b + L_c) + p(M_4 + M_7) + M_5p\theta \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Ecuatiile diferențiale ale mașinii se obțin cu prima relație (120). Se găsește :

$$0 = R_a i_p + L_a \frac{di_p}{dt} + M_2 \frac{di_q}{dt} + (M_1 + M_3) i_q \frac{d\theta}{dt}$$

$$e_d = (R_a + R_c) i_q + (L_b + L_c + M_4 + M_7) \frac{di_q}{dt} + M_5 \frac{di_p}{dt} + (M_5 i_q + M_3 i_p) \frac{d\theta}{dt}$$

17.10. 1^o Deși cubul are cinci curenți independenți, se ia un al șaselea curent independent dat de o sursă fictivă legată între două vârfuri oarecari; aceasta pentru a se putea rezolva a doua parte a problemei. În funcție de alegerea curenților independenți și a vârfurilor cuburilor se găsesc matricele $\|C\|$ corespunzătoare. Se deduc apoi matricele $\|Z'\|$. Calculul se simplifică observând că matricea $\|Z\|$ este o matrice unitate. De asemenea este bine ca primul curent independent să fie luat acel din circuitul fictiv suplimentar.

2^o Din ecuația matricială :

$$\|e\| = \|Z\| \cdot \|i\|$$

rezultă că impedanța căutată va fi aceea care răspunde ecuației algebrice :

$$e_{AB} = Z_{AB} \cdot i_1$$

care se obține prin eliminarea celorlalți curenți (dintr'odată, sau prin două etape). Eliminantul este de forma :

$$\|Z_1\| - \|Z_2\| \cdot \|Z_4\|^{-1} \cdot \|Z_3\|.$$

Se găsește : a) cele două vârfuri sunt adiacente unei muchii a cubului : $Z_{AB} = 0,57 \Omega$; b) cele două vârfuri sunt adiacente diagonalei unei fețe : $Z_{AB} = 0,75 \Omega$; c) cele două vârfuri sunt adiacente unei diagonale a cubului : $Z_{AB} = 0,833 \Omega$.

17.11.

$\|C_4\| =$

	<i>h</i>	<i>k</i>	<i>m</i>	<i>n</i>
<i>p</i>	1			1
<i>q</i>	1	-1	1	
<i>r</i>		-1		
<i>s</i>		-1		-1

17.12. Se scriu vechii curenți în funcție de noii curenți găsindu-se matricea căutată.

17.13. Se scriu curenții rețelelor simple în funcție de curenții independenți ai rețelei interconectate, care are 12 curenți independenți.

17.14. Rețeaua interconectată a complexului de mașini are patru curenți independenți. Alegându-se drept curenți independenți $i_a = i_s$; $i_b = i_r$; $i_c = i_2$ și $i_f = i_q$, se scrie imediat matricea de conexiune căutată

$\|C\| =$

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>f</i>
<i>s</i>	1			
<i>r</i>		1		
1		1		
2			1	
<i>d</i>			-1	
<i>q</i>				1

cu ajutorul căreia, folosind proprietățile matricelor compuse, se găsește :

$$\|e'\| = \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ f \end{matrix} \begin{matrix} e_s \\ \\ \\ e_q \end{matrix}$$

	a	b	c	f
a	$R_s + pL_s$	$M \cos \alpha p$		
b	$M (\cos \alpha p - \sin \alpha p \theta_1)$	$R_R + R_1 + p(L_R + L_1)$	pM_{12}	
c		pM_{12}	$R_2 + R + p(L_2 + L)$	$-Lp\theta_2$
f			$Lp\theta_2$	$R + pL$

17.15. Se desenează circuitul echivalent al montajului dat, care are șase curenți independenți (fig. 17.15) ce se aleg arbitrar. Scriind curenții din laturi

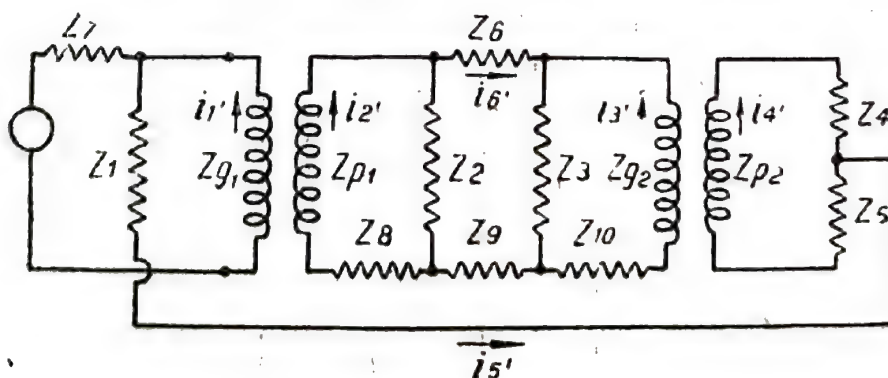


Fig. 17.15

În funcție de noii curenți se găsește matricea de conexiune a circuitului cu ajutorul căreia se calculează $\|Z'\|$. Se găsește:

$$\|Z'\| =$$

	1'	2'	3'	4'	5'	6'
1'	$Z_z + Z_{pp1}$	Z_{pp1}			$-Z_7$	
2'	Z_{pp1}	$Z_2 + Z_8 + Z_{pp1}$			Z_8	$-Z_2$
3'			$Z_3 + Z_{10} + Z_{pp2}$	Z_{pp2}	$-Z_{10}$	Z_3
4'			Z_{pp2}	$Z_4 + Z_5 + Z_{pp2}$	Z_5	
5'	$-Z_7$	Z_8	$-Z_{10}$	Z_5	$Z_1 + Z_5 + Z_7 + Z_8 + Z_9 + Z_{10}$	Z_9
6'		$-Z_2$	Z		Z_9	$Z_2 + Z_3 + Z_4 + Z_9$

17.16. Rețeaua are trei curenți independenți. Alegând curenții din laturile AB, CA și DC, se găsește matricea de conexiune:

$$\|C\| =$$

	p	q	r
a	1		
b		1	
c		-1	1
d	-1	1	
f	1	-1	1
g			1

b) Puterea respectivă :

$$\bar{S} = \| e' \| \cdot \| i' \|^{*} = 65,52 \text{ kVA.}$$

care se repartizează :

$$\bar{S}_d = 57,0 - j 2,0 \text{ kVA și } \bar{S}_f = 8,52 + j 2,0 \text{ kVA}$$

Puterea absorbită de rețea este reală deoarece rețeaua este formată numai din rezistențe ohmice. Puterea reactivă, produsă de un generator este absorbită de al doilea.

c)

a	$106,8 + j 69,6$
b	$-168 - j 78,6$
$\ i \ = c$	$69,7 + j 8,5$
d	$224 + j 122$
f	$130,4 - j 210,4$

V

17.18. Problema se rezolvă ca și precedenta. Se găsește :

a)

a	$-26 - j 34$
b	$-47 + j 2$
$\ i \ = c$	$24 + j 6$
d	$21 - j 36$
f	$50 + j 40$

:

b) $\bar{S} = 27,95 \text{ kW}$, care se repartizează; $\bar{S}_d = 12,54 + j 3,30 \text{ kVA}$ și $\bar{S}_f = 15,4 - j 3,30 \text{ kVA}$.

c)

a	$-26 - j 34$
b	$-94 + j 4$
c	$120 + j 30$
d	$126 - j 216$
f	$100 + j 80$

$\parallel e_t \parallel =$

17.19. a) Se iau cei trei curenți independenți pe laturile CA, AB, CB. Matricea de conexiune este:

	p	q	r
a		1	
b	1	-1	
c		1	1
d	1		
f			1

$\parallel C_i \parallel =$

Se găsește cu ajutorul ei:

p	$100 + j 0$
q	
r	$100 + j 100$

$\parallel e' \parallel =$

și

	p	q	r
p	$2 + j2$	$-2 - j2$	
q	$-2 - j2$	$6 + j3$	$1 - j3$
r		$1 - j3$	$0 + j5$

Ecuațiile de funcționare în regim permanent sunt :

$$100 + j0 = (2 + j2) i_p + (-2 - j2) i_q$$

$$0 = (-2 - j2) i_p + (6 + j3) i_q + (1 - j3) i_r$$

$$100 + j100 = (1 - j3) i_q + (0 + j5) i_r$$

b) Matricea inversă a lui $\|Z'\|$ fiind :

	p	q	r
p	$-6,2 - j44,4$	$-2,2 - j19,0$	$4,6 - j10,2$
q	$-2,2 - j19,0$	$-2,2 - j19,0$	$0,7 - j11,8$
r	$4,6 - j10,2$	$0,7 - j11,8$	$-15,5 - j2$

se găsește :

p	$8,6 - j50,0$
q	$10,3 - j30,1$
r	$-8,9 - j27,7$

și $\|i\| =$

a	$10,3 - j30,1$
b	$-1,9 - j19,9$
c	$1,4 - j57,8$
d	$8,6 - j50,0$
f	$-8,9 - j27,7$

$$e) \bar{S} = \|e_t'\| \cdot \|i'\|^* = 2,74 - j8,66 \text{ kVA.}$$

17.20. a) Rețeaua are trei curenți independenți care se iau pe ramurile BD , AC și CB . Matricea de conexiune este:

$$\|C\| = \begin{array}{c|ccc} & s & t & u \\ \hline a & 1 & & -1 \\ b & & & 1 \\ c & 1 & & \\ d & 1 & 1 & -1 \\ f & & -1 & 1 \\ g & & & 1 \end{array}$$

cu care se deduc:

$$\|e'\| = \begin{array}{c|c} s & 100 \\ \hline t & \\ \hline u & 100 \end{array} \quad \text{și} \quad \|Z'\| = \begin{array}{c|ccc} & s & t & u \\ \hline s & 6 + j & 3 & -5 - j3 \\ t & 3 & 3 + j5 & -3 \\ u & -5 - j3 & -3 & 10 + j6 \end{array}$$

Ecuatiile de funcționare în regim permanent sunt:

$$100 = (6 + j) i_s + 3 i_t - (5 + j3) i_u$$

$$0 = 3 i_s + (3 + j5) i_t - 3 i_u$$

$$220 = -(5 + j3) i_s - 3 i_t + (10 + j6) i_u$$

b) Matricea inversă a lui $\|Z'\|$ este:

$$\|Z'\|^{-1} = 10^{-2} \begin{array}{c|ccc} & s & t & u \\ \hline s & 18,8 + j 1,5 & 2,2 - j 4,2 & 9,5 + j 1,9 \\ t & 2,2 - j 4,2 & 3,8 - j 10,6 & 1,7 + j 0,7 \\ u & 9,5 + j 1,9 & 1,7 + j 0,7 & 8,2 - j 1,6 \end{array}$$

și se deduc curenții căutați:

$$\| i' \| =$$

s	$39,7 + j 5,7$
t	$5,9 - j 2,7$
u	$27,5 - j 1,6$

și $\| i \| =$

a	$12,2 + j 7,3$
b	$27,5 - j 1,6$
c	$39,7 + j 5,7$
d	$18,1 + j 4,6$
f	$21,6 + j 1,1$
g	$27,5 - j 1,6$

c) $\bar{S} = 10020 - j 218 \text{ VA.}$

17.21. Rețeaua interconectată are cinci curenți independenți. Matricea de conexiune este:

$$\| C \| =$$

	a	b	c	d	f
p			1		
q	1				
r		1	-1		
s	-1		1		
t					1
u				1	

$$=$$

$\ C_1 \ $
$\ C_2 \ $

Tensiunea și impedanța rețelelor interconectate fiind :

$$\|e\| = \begin{matrix} p \\ q \\ r \\ s \\ t \\ u \end{matrix} \begin{bmatrix} 100 + j0 \\ \\ 100 + j100 \\ 100 \\ \\ 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|e_1\| \\ \|e_2\| \end{bmatrix}$$

$$\|Z\| = \begin{matrix} & p & q & r & s & t & u \\ \begin{matrix} p \\ q \\ r \\ s \\ t \\ u \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 + j2 & -2 - j2 & & & & \\ -2 - j2 & 6 + j3 & 1 - j3 & & & \\ & 1 - j3 & j5 & & & \\ & & & 6 + j & 3 & -5 - j3 \\ & & & 3 & 3 + j5 & -3 \\ & & & -5 - j3 & -3 & 10 + j6 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

se deduc aceleași matrice pentru noua rețea

a	-100
b	$100 + j100$
$\ e'\ = c$	$100 - j100$
d	200

și $\|Z'\| = c$

	a	b	c	d	f
a	$12 + j4$	$1 - j3$	-9	$5 + j3$	-3
b	$-1 - j3$	$j5$	$-j5$		
c	-9	$-j5$	$8 + j7$	$-5 - j3$	3
d	$5 + j3$		$-5 - j3$	$10 + j6$	-3
f	-3		3	-3	$3 + j5$

Calculul acestor matrice se face ținând seama de proprietățile matricelor compuse. Ecuațiile de funcționare căutate sunt :

$$\begin{aligned}
 100 &= -(12 + j4) i_a - (1 - j3) i_b + 9 i_c - (5 - j3) i_d - 3 i_f \\
 100 + j100 &= (1 - j3) i_a + 5 i_b - j5 i_c \\
 100 - j100 &= -9 i_a - j5 i_b + (8 + j7) i_c - (5 + j3) i_d + 3 i_f \\
 200 &= (5 + j3) i_a - (5 + j3) i_c + (10 + j6) i_d - 3 i_f \\
 0 &= -3 i_a + 3 i_c - 3 i_d + (3 + j5) i_f
 \end{aligned}$$

17.22. Schema circuitului este dată în fig. 17.22. Sunt doi curenți independenți. Problema se rezolvă trecând la rețeaua primitivă reală. Impedanțele

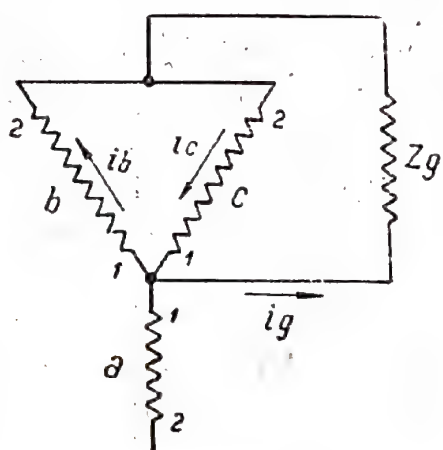


Fig. 17.22.

se calculează cu relația (128) din care se deduce $\|Z_1\|$; tensiunile se calculează cu relația (128) din care se deduce $\|e\|$. Se interconectează apoi cele două rețele

(alternatorul și bobina de stingere), obținându-se matricele impedanță, tensiune și de conexiune. Se găsește:

$$\| e' \| = \begin{array}{c} b' \\ \hline g' \end{array} \begin{array}{c} (a^2 - a) e \\ \hline -ae \end{array}$$

și

$$\| i' \| = \begin{array}{c} b' \\ \hline g' \end{array} \begin{array}{c} 3e [(a^2 - a) (X_0 + 3Z_g) + (a^2 - 1) X_2] \\ \hline 3e [2a X_1 + (1 - 2a^2) X_2] \end{array} \times \frac{1}{\Delta}$$

în care $\Delta = \frac{1}{3} [X_1 X_2 + (X_1 + X_2) (X_0 + 3Z_g)]$ este determinantul matricei $\| Z' \|$.

Numeric se găsește:

$$X_1 = j 0,225 \Omega; X_2 = j 0,34 \Omega; X_0 = j 0,11 \Omega$$

$$e = 3,46 \text{ kV.}$$

$$\| e' \| = \begin{array}{c} b' \\ \hline g' \end{array} \begin{array}{c} 6 \angle -90^\circ \\ \hline 3,46 \angle -60^\circ \end{array} \text{ kV; } \Delta = -8,52$$

și deci:

$$\| i \| = \begin{array}{c} b' \\ \hline g' \end{array} \begin{array}{c} -95,11 + j 0,34 \\ \hline -0,54 - j 1,19 \end{array} \text{ kA}$$

17.23. Schema circuitului este dată în fig. 17.23. Reactanțele alternatorului sunt: $X_s = j 0,6 \Omega$, $X_a = j 0,9 \Omega$, $X_h = j 0,3 \Omega$. Elementele date sunt impedanțele și forțele electromotoare ale alternatorului în coordonate simetrice și

impedanțele sarcinii în mărimi reale. Se trece la rețeaua primitivă reală, transformând impedanțele și tensiunile respective. Se găsește:

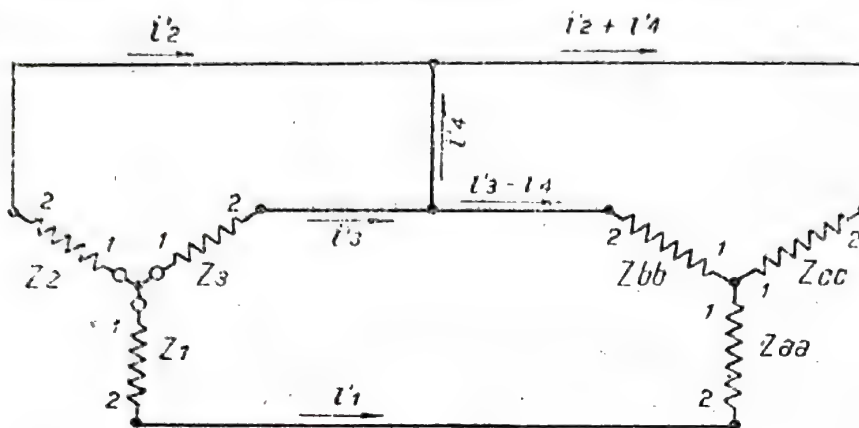


Fig. 17.23.

$$\|Z_1\| = \frac{j}{10}$$

	a	b	c
a	6	$1 + 2a + 3a^2$	$1 + 2a^2 + 3a$
b	$1 + 2a^2 + 3a$	6	$1 + 2a + 3a$
c	$1 + 2a + 3a^2$	$1 + 2a^2 + 3a$	6

și

$$\|e_1\| = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

	a	b	c
a	1		
b	a^2		
c	a		

kV.

Interconectând cele două rețele se obține matricea de conexiune:

$$\|C\| =$$

	1'	2'	3'	4'
1	1			
2		1		
3			1	
a	-1			
b		-1		-1
c			-1	-1

$$=$$

	g'	l'
g	$\ 1\ $	
	$\ -1\ $	$\ A\ $

și se calculează impedanța și tensiunea noii rețele. Se găsește :

$$\|Z'\| = \frac{j}{10}$$

	1'	2'	3'	4'
1'	11	$1+2a+3a^2$	$1+2a^2+3a$	
2'	$1+2a^2+3a$	16	$1+2a+3a^2$	$-j10$
3'	$1+2a+3a^2$	$1+2a^2+3a$	26	$-j20$
4'		$-j10$	$-j20$	$-j30$

$$\|e'\| = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

1'	1
2'	a^2
3'	a
4'	

Pentru calculul curenților se determină matricea $\|Z'\|^{-1}$, apoi se utilizează relațiile (123) și (119).

17.24. Schema defectului este dată în figura 17.24 iar matricele corespunzătoare sistemului sunt

	h'	d'	i'
h'	\bar{Z}_0		
d'		\bar{Z}_s	
i'			\bar{Z}_a

$$\|\bar{Z}_1\| = d'$$

	h''	d''	i''
h''			
d''		\bar{Z}_d	
i''			\bar{Z}_i

$$\|\bar{Z}\| = h^{IV}$$

h^{IV}	
$3 \bar{Z}_g$	

h'	
d'	e_1
i'	

$$\|e\| = d'$$

Interconectând sistemul, se obține matricele de impedanță și tensiune corespunzătoare.

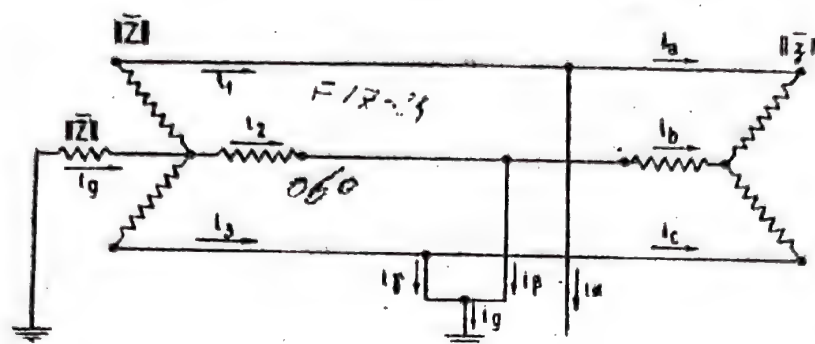


Fig. 17.24

$\| Z_{33} \| =$

	h'	d'	i'	h''	d''	i''	h'''	d'''	i'''	h^{IV}
h'	\bar{Z}_0									
d'		\bar{Z}_s								
i'			\bar{Z}_a							
h''										
d''					\bar{Z}_d					
i''						\bar{Z}_i				
h'''										
d'''										
i'''										
h^{IV}										$3\bar{Z}_g$

$$\| e_3 \| =$$

h'	
d'	e_1
i'	
h''	
d''	
i''	
h'''	
d'''	
i'''	
h^{IV}	

Scriind curenții din rețeaua primitivă în funcție de curenții din rețeaua echivalentă se găsește

$$i'_h = -i_d - i_i$$

$$i'_d = i_d$$

$$i'_i = i_i$$

$$i''_h = -i_d - i_i$$

$$i''_d = i_d$$

$$i''_i = i_i$$

$$i'''_h = -i_d - i_i$$

$$i'''_d = i_d$$

$$i'''_i = i_i$$

$$i^{IV}_h = -i_d - i_i$$

de unde
 $\| C_4^3 \| =$

	d	i
h'	-1	-1
d'	1	
i'		1
h''	-1	-1
d''	1	
i''		1
h'''	-1	-1
d'''	1	
i'''		1
h^{IV}	-1	-1

De aici, elementele rețelei echivalente

$$\|Z_4\| = \begin{array}{c} d \\ i \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline \bar{Z}_0 + \bar{Z}_s + \bar{Z}_d + 3\bar{Z}_g & \bar{Z}_0 + 3\bar{Z}_g \\ \hline \bar{Z}_0 + 3\bar{Z}_g & \bar{Z}_0 + \bar{Z}_a + \bar{Z}_i + 3\bar{Z}_g \\ \hline \end{array}$$

$$\|e_4\| = \begin{array}{c} d \\ i \end{array} \begin{array}{|c|} \hline e_1 \\ \hline \end{array}$$

Componentele simetrice ale curenților se găsesc resolvind ecuația

$$\|e_4\| = \|Z_4\| \cdot \|i_4\|.$$

Rezultă :

$$\|i_4\| = \frac{e_1}{\Delta} \begin{array}{c} d \\ i \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \bar{Z}_0 + \bar{Z}_a + \bar{Z}_i + 3\bar{Z}_0 \\ \hline -\bar{Z}_0 - 3\bar{Z}_g \\ \hline \end{array}$$

În care

$$\Delta = \bar{Z}_0 (\bar{Z}_g + \bar{Z}_a + \bar{Z}_d + \bar{Z}_i) + (\bar{Z}_a + \bar{Z}_i) (\bar{Z}_s + \bar{Z}_d + 3\bar{Z}_g) + 3\bar{Z}_g (\bar{Z}_s + \bar{Z}_d)$$

Pentru a se putea calcula curenții căutați trebuie determinată matricea

$$\|C_4^1\| = \|C_2^1\| \cdot \|C_3^2\| \cdot \|C_4^3\|.$$

Se găsește

$$\|C_2^1\| = \begin{array}{c} 1' \\ 2' \\ 3' \\ 1'' \\ 2'' \\ 3'' \\ 1''' \\ 2''' \\ 3''' \\ 3IV \end{array} \begin{array}{|ccccc|} \hline 1 & 2 & 3 & b & c \\ \hline 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ 1 & & & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \\ & & & & \\ & & & & \\ & 1 & & -1 & \\ & & 1 & & -1 \\ 1 & 1 & 1 & & \\ \hline \end{array}$$

$\| C_8^2 \| =$

	h'	d'	i'	h''	d''	i''	h'''	d'''	i'''	h^{IV}
$1'$	1	1	1							
$2'$	1	a^2	a							
$3'$	1	a	a^2							
$1''$				1	1	1				
$2''$				1	a^2	a				
$3''$				1	a	a^2				
$1'''$							1	1	1	
$2'''$							1	a^2	a	
$3'''$							1	a	a^2	
3^{IV}										3

și rezultă

	d	i
$1'$	0	0
$2'$	$-1 + a^2$	$-1 + a$
$3'$	$-1 + a$	$-1 + a^2$
$1''$	0	0
$2''$	0	0
$3''$	$-1 + a^2$	$-1 + a$
$1'''$	0	0
$2'''$	$-1 + a^2$	$-1 + a$
$3'''$	$a - a^2$	$a^2 - a$
3^{VI}	-3	-3

$\| C_4^1 \| =$

Curenții căutați sunt dați de relația

$$\| i_1 \| = \| C_4^1 \| \cdot \| i_4 \|.$$

iar diferențele de potențial la bornele fiecărui element prin relația

$$\| e_1 \| = \frac{1}{3} \| C_4^1 \|_i^* \cdot \| e_4 \|.$$

17.25. Problema se rezolvă ca și precedenta.

17.26. Se obține ușor, combinând cuadripolii simpli :

$$\| \gamma \| = \frac{-1}{Z_2 - Z_1}$$

$Z_1 + Z_2$	$-2Z_1 Z_2$
$-2Z_1 Z_2$	$Z_1 + Z_2$

$$\| \zeta \| = \frac{1}{2}$$

$Z_1 + Z_2$	$Z_1 - Z_2$
$Z_2 - Z_1$	$-Z_1 - Z_2$

$$\| \eta \| = \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$	$\frac{1}{Z_2} - \frac{1}{Z_1}$
$\frac{1}{Z_1} - \frac{1}{Z_2}$	$-\frac{1}{Z_1} - \frac{1}{Z_2}$

17.27. Scriind ecuațiile transformatorului, se deduce imediat :

$$\| \zeta \| = \begin{array}{|c|c|} \hline \bar{Z}_1 & \mathfrak{M} \\ \hline \mathfrak{M} & \bar{Z}_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\| \eta \| = \frac{1}{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2 - \mathfrak{M}^2}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \bar{Z}_2 & -\mathfrak{M} \\ \hline -\mathfrak{M} & \bar{Z}_1 \\ \hline \end{array}$$

$$\| \gamma \| = \frac{1}{\mathfrak{M}}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \bar{Z}_2 & \mathfrak{M}^2 - \bar{Z}_1 \bar{Z}_2 \\ \hline 1 & -\bar{Z}_1 \\ \hline \end{array}$$

în care :

$$\bar{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1, \quad \bar{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2, \quad \mathfrak{M} = j\omega M.$$

17.28. Cu aceleași notații ca mai sus se găsește :

$$\| \gamma \| = \frac{\bar{Z}_2 - \bar{Z}_3}{\mathfrak{M}_{12} \mathfrak{M}_{34}}$$

$\bar{Z}_4 + \frac{\mathfrak{M}_{34}^2}{\bar{Z}_2 - \bar{Z}_3}$	$-\bar{Z}_1 \bar{Z}_4 + \frac{\bar{Z}_4 \mathfrak{M}_{12}^2 - \bar{Z}_1 \mathfrak{M}_{34}^2}{\bar{Z}_2 - \bar{Z}_3}$
1	$-\bar{Z}_1 + \frac{\mathfrak{M}_{12}^2}{\bar{Z}_2 - \bar{Z}_3}$

17.29. Cuadripolii fiind în lanț, matricea caracteristică a cuadripolului rezultat este egală cu produsul matricelor caracteristice ale fiecărui cuadripol. Se găsește :

$$\|Y\| = \|Y_1\| \cdot \|Y_2\| = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} A_1 A_2 + B_1 C_2 & A_1 B_2 + B_1 D_2 \\ C_1 A_2 + D_1 C_2 & C_1 B_2 + D_1 D_2 \end{bmatrix}$$

Numeric se obține același rezultat.

17.30. Același procedeu ca mai sus, matricea caracteristică fiind produsul celor trei matrice componente.

17.31. Ca mai sus.

17.32. Cuadripolul dat este format dintr'un cuadripol în T legat în paralel cu un cuadripol format dintr'o impedanță în serie. Se găsește

$$\| \eta \| = \frac{1}{R\bar{Z}(R + 2\bar{Z})} \begin{bmatrix} R^2 + 2R\bar{Z} + 2\bar{Z}^2 & -2\bar{Z}(R + \bar{Z}) \\ 2\bar{Z}(R + \bar{Z}) & -(R^2 + 2R\bar{Z} + 2\bar{Z}^2) \end{bmatrix}$$

Din care se deduc și celelalte matrice

$$\|Y\| = \frac{1}{2\bar{Z}(R + \bar{Z})} \begin{bmatrix} R^2 + 2R\bar{Z} + 2\bar{Z}^2 & R(R + 2\bar{Z})\bar{Z} \\ \frac{R(R + 2\bar{Z})}{\bar{Z}} & R^2 + 2R\bar{Z} + 2\bar{Z}^2 \end{bmatrix}$$

$$\| \zeta \| = \frac{1}{R(R + 2\bar{Z})} \begin{bmatrix} R^2 + 2R\bar{Z} + 2\bar{Z}^2 & -2\bar{Z}(R + \bar{Z}) \\ 2\bar{Z}(R + \bar{Z}) & -(R^2 + 2R\bar{Z} + 2\bar{Z}^2) \end{bmatrix}$$

Observație : Pentru calculul determinantului $|\eta|$ se va ține seama de impedanța de undă, $Z_1 = \pm \sqrt{Z_{10} Z_{1sc}}$ sau $Z_2 = \pm \sqrt{Z_{20} Z_{2sc}}$, și de condiția de simetrie a cuadripolului.

17.33. Rețeaua are $L = 15$, $N = 6$, $S = 1$, deci $B = 10$ circuite independente și $P = 5$ perechi de noduri independente. Cum $P < B$ se va aplica metoda perechilor de noduri*). Se alege s. ex. perechile de noduri AB , BC , CD , DE , EF . Matricele rețelei primitive sunt

*) Vezi I. S. Antoniu, Introducerea în aplicarea calculului matricial la studiul circuitelor electrice, Editura Academiei RPR, 1953 pag. 94.

$\| \bar{Y} \| =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1														
2		1													
3			1												
4				1											
5					1										
6						1									
7							1								
8								1							
9									1						
10										1					
11											1				
12												1			
13													1		
14														1	
15															1

$\| I \| =$

1	
2	
3	
4	
5	5
6	
7	-10
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	

Matricea de conexiune este

	1'	2'	3'	4'	5'
1	1				
2		1			
3			1		
4				1	
5					1
6	1	1	1	1	1
7	1	1			
8	1	1	1		
9	1	1	1	1	
10		1	1		
11		1	1	1	
12		1	1	1	1
13			1	1	
14			1	1	1
15				1	1

$\|C_t\|^{-1} =$

Se găsește

	1'	2'	3'	4'	5'
1'	5	4	3	2	1
2'	4	8	6	4	2
3'	3	6	9	6	3
4'	2	4	6	8	4
5'	1	2	3	4	5

$$\|Y'\| = \|C^{-1}\| \cdot \|Y\| \cdot \|C_t\|^{-1} =$$

și noua matrice a curenților

$$\|I'\| = \begin{matrix} 1' \\ 2' \\ 3' \\ 4' \\ 5' \end{matrix} \begin{bmatrix} -10 \\ -10 \\ \\ \\ 5 \end{bmatrix} \mathbf{A.}$$

Aplicând relația $\| \bar{I}' \| = \| Y' \| \cdot \| E' \|$, rezultă $\| \bar{E}' \| = \| Y' \|^{-1} \cdot \| I' \|$.
Calculând matricea inversă a lui se găsește

$$\| Y' \|^{-1} = \frac{1}{6} \begin{array}{c|ccccc} & 1' & 2' & 3' & 4' & 5' \\ \hline 1' & 2 & 1 & & & \\ 2' & 1 & 2 & 1 & & \\ 3' & & 1 & 2 & 1 & \\ 4' & & & 1 & 2 & 1 \\ 5' & & & & 1 & 2 \end{array}$$

De unde rezultă :

$$\| E' \| = \begin{array}{c|c} & \text{V} \\ \hline 1' & -30 \\ 2' & -30 \\ 3' & -10 \\ 4' & 5 \\ 5' & 10 \end{array}$$

și deci $E_{AB} = -60 \text{ V}$ și $E_{EF} = 10 \text{ V}$.

17.34. Fie o punte Wheatstone, având laturile AB , BC , CD , DA , de rezistențe respectiv R_1 , R_2 , R_3 , R_4 și străbătute de curenți I_1 , I_2 , I_3 , I_4 ; diagonala galvanometru BD de rezistență R_5 și străbătută de curentul I_5 ; diagonala pilă AC , de rezistență R_6 și străbătută de curentul I_6 . Luând drept curenți independenți curenții $I_4 = J_2$, $I_5 = J_1$ și $I_6 = J_3$, matricele de conexiune și de impedanță sunt

$$\| C \| = \begin{array}{c|ccc} & 1' & 2' & 3' \\ \hline 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & \\ 3 & & -1 & 1 \\ 4 & & 1 & \\ 5 & 1 & & \\ 6 & & & 1 \end{array}$$

$$\| R \| = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & R_1 & & & & & \\ 2 & & R_2 & & & & \\ 3 & & & R_3 & & & \\ 4 & & & & R_4 & & \\ 5 & & & & & R_5 & \\ 6 & & & & & & R_6 \end{array}$$

Rezultă noua matrice de impedanță

$$\| R' \| = \begin{array}{c|ccc} & 1' & 2' & 3' \\ \hline 1' & R_1 + R_2 + R_5 & -R_1 - R_2 & R_1 \\ 2' & -R_1 - R_2 & R_1 + R_2 + R_3 + R_4 & -R_1 - R_3 \\ 3' & R_1 & -R_1 - R_3 & R_1 + R_3 + R_6 \end{array}$$

de unde ecuația de funcționare a punții $\|E'\| = \|R'\| \cdot \|J\|$. Matricea arată că se iau ca circuite independente ABD , $ADCB$, $\Delta BCEA$, ordinea literelor indicând și sensul curentului.

17.35. Problema se rezolvă cu ajutorul calculului matricial folosind calculul operațional. Ecuațiile de funcționare ale circuitului sunt :

$$Z_{11} \mathcal{E}i_1 + Z_{12} \mathcal{E}i_2 = \mathcal{E}e$$

$$Z_{21} \mathcal{E}i_1 + Z_{22} \mathcal{E}i_2 = 0$$

în care :

$$Z_{11} = pL_1 + \frac{S_1 + S}{p}$$

$$Z_{22} = pL_2 + \frac{S_2 + S}{p}$$

$$Z_{12} = Z_{21} = -\frac{S}{p}$$

$$S_1 = \frac{1}{C_1}, \quad S_2 = \frac{1}{C_2}, \quad S = \frac{1}{C}$$

Ecuația matricială a acestui sistem este :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E}e \\ \hline \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ \hline Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathcal{E}i_1 \\ \hline \mathcal{E}i_2 \end{bmatrix}$$

care rezolvat în raport cu $\|\mathcal{E}i\|$ dă :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E}i_1 \\ \hline \mathcal{E}i_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} Z_{22} & -Z_{12} \\ \hline -Z_{21} & Z_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathcal{E}e \\ \hline \end{bmatrix}$$

$$(\Delta = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21})$$

Punând :

$$\omega_{11}^2 = \frac{S_1 + S}{L_1}, \quad \omega_{22}^2 = \frac{S_2 + S}{L_2}, \quad \omega_{12}^2 = \frac{S}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

$$\omega_1^2 = \frac{\omega_{11}^2 + \omega_{22}^2}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\omega_{11}^2 - \omega_{22}^2)^2 + 4\omega_{12}^4}$$

$$\omega_2^2 = \frac{\omega_{11}^2 + \omega_{22}^2}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\omega_{11}^2 - \omega_{22}^2)^2 + 4\omega_{12}^4}$$

$$\text{rezultă } \Delta = (p^2 + \omega_1^2)(p^2 + \omega_2^2)$$

și deci :

$$\mathcal{E}i_1 = \frac{E_0}{L_1} \cdot \frac{p^2 + \omega_2^2}{(p^2 + \omega_1^2)(p^2 + \omega_2^2)}$$

$$\mathcal{E}i_2 = -\frac{E_0 S}{L_1 L_2} \frac{1}{(p^2 + \omega_1^2)(p^2 + \omega_2^2)}$$

de unde se deduce :

$$i_1 = \frac{E_0}{L_1} \left[\frac{1}{\omega_1} \cdot \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \sin \omega_1 t - \frac{1}{\omega} \frac{\omega_2^2 - \omega_2^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \cdot \sin \omega_2 t \right]$$

$$i_2 = -\frac{E_0 S}{L_1 L_2} \left[\frac{1}{\omega_1} \cdot \frac{1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \sin \omega_1 t - \frac{1}{\omega_2} \cdot \frac{1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \sin \omega_2 t \right] .$$

A N E X E

**TABELE NUMERICE, NOMOGRAME,
TABELE PENTRU ANALIZA ARMONICĂ
ȘI
FORMULE PENTRU CALCULUL OPERAȚIONAL**

Funcții trigonometrice, exponențiale și hiperbolice

x radiani	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	e^x	e^{-x}	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{th} x$	x în grade
0,00	0,00000	1,00000	0,00000	1,00000	1,00000	0,00000	1,00000	0,00000	0,00°
01	0,01000	0,99995	0,01000	1,01005	0,99005	0,01000	0,10005	0,01000	0,57
02	0,02000	0,99980	0,02000	1,02020	0,98020	0,02000	1,00020	0,02000	1,15
03	0,03000	0,99955	0,03001	1,03045	0,97045	0,03000	1,00045	0,02999	1,72
04	0,03999	0,99920	0,04002	1,04081	0,96079	0,04001	1,00080	0,03998	2,29
05	0,04998	0,99875	0,05004	1,05127	0,95123	0,05002	1,00125	0,04996	2,86
06	0,05996	0,99820	0,06007	1,06184	0,94176	0,06004	1,00180	0,05993	3,44
07	0,06994	0,99755	0,07011	1,07251	0,93239	0,07006	1,00245	0,06989	4,01
08	0,07991	0,99680	0,08017	1,08329	0,92312	0,08009	1,00320	0,07983	4,58
09	0,08988	0,99595	0,09024	1,09417	0,91393	0,09012	1,00405	0,08976	5,16
0,10	0,09983	0,99500	0,10033	1,10517	0,90484	0,10017	1,00500	0,09967	5,73
11	0,10978	0,99396	0,11045	1,11628	0,89583	0,11022	1,00606	0,10956	6,30
12	0,11971	0,99281	0,12058	1,12750	0,88692	0,12029	1,00721	0,11943	6,88
13	0,12963	0,99156	0,13074	1,13883	0,87810	0,13037	1,00846	0,12927	7,45
14	0,13954	0,99022	0,14092	1,15027	0,86936	0,14046	1,00982	0,13909	8,02
15	0,14944	0,98877	0,15114	1,16183	0,86071	0,15056	1,01127	0,14889	8,59
16	0,15932	0,98723	0,16138	1,17351	0,85214	0,16068	1,01283	0,15865	9,17
17	0,16918	0,98558	0,17166	1,18530	0,84366	0,17082	1,01448	0,16838	9,74
18	0,17903	0,98384	0,18197	1,19722	0,83527	0,18097	1,01624	0,17808	10,31
19	0,18886	0,98200	0,19232	1,20925	0,82696	0,19115	1,01810	0,18775	10,89
0,20	0,19867	0,98007	0,20271	1,22140	0,81873	0,20134	1,02007	0,19738	11,46
21	0,20846	0,97803	0,21314	1,23368	0,81058	0,21155	1,02213	0,20697	12,03
22	0,21823	0,97590	0,22362	1,24608	0,80252	0,22178	0,02430	0,21652	12,61
23	0,22798	0,97367	0,23414	1,25860	0,79453	0,23203	1,02657	0,22603	13,18
24	0,23770	0,97134	0,24472	1,27152	0,78663	0,24231	1,02894	0,23550	13,75

25	0,24740	0,96891	0,25534	1,28403	0,77880	0,25261	1,03141	0,24492	14,32
26	0,25708	0,96639	0,26602	1,29693	0,77105	0,26294	1,03399	0,25430	14,90
27	0,26673	0,96377	0,27676	1,30996	0,76338	0,27329	1,03667	0,26362	15,47
28	0,27636	0,96106	0,28755	1,32313	0,75578	0,28367	1,03946	0,27291	16,04
29	0,28595	0,95824	0,29841	1,33643	0,74826	0,29408	1,04235	0,28213	16,62
30	0,29552	0,95534	0,30934	1,34986	0,74082	0,30452	1,04534	0,29131	17,19
31	0,30506	0,95233	0,32033	1,36343	0,73345	0,31499	1,04844	0,30044	17,76
32	0,31457	0,94924	0,33139	1,37713	0,72615	0,32549	1,05164	0,30951	18,33
33	0,32404	0,94604	0,34252	1,39097	0,71892	0,33602	1,05495	0,31852	18,91
34	0,33349	0,94275	0,35374	1,40495	0,71177	0,34659	1,05836	0,32748	19,48
35	0,34290	0,93937	0,36503	1,41907	0,70469	0,35719	1,06188	0,33638	20,05
36	0,35227	0,93590	0,37640	1,43333	0,69768	0,36783	1,06550	0,34521	20,63
37	0,36162	0,93233	0,38786	1,44773	0,69073	0,37850	1,06923	0,35399	21,20
38	0,37092	0,92866	0,39941	1,46228	0,68386	0,38921	1,07307	0,36271	21,77
39	0,38019	0,92491	0,41105	1,47698	0,67706	0,39996	1,07702	0,37136	22,35
40	0,38942	0,92106	0,42279	1,49182	0,67032	0,41075	1,08107	0,37995	22,92
41	0,39861	0,91712	0,43463	1,50682	0,66365	0,42158	1,08523	0,38847	23,49
42	0,40776	0,91309	0,44657	1,52196	0,65705	0,43246	1,08950	0,39693	24,06
43	0,41687	0,90897	0,45862	1,53726	0,65051	0,44337	1,09388	0,40532	24,64
44	0,42594	0,90475	0,47078	1,55271	0,64404	0,45434	1,09837	0,41364	25,21
45	0,43497	0,90045	0,48306	1,56831	0,63763	0,46534	1,10297	0,42190	25,78
46	0,44395	0,89605	0,49545	1,58407	0,63128	0,47640	1,10768	0,43008	26,36
47	0,45289	0,89157	0,50797	1,59999	0,62500	0,48750	1,11250	0,43820	26,93
48	0,46178	0,88699	0,52061	1,61607	0,61878	0,49865	1,11743	0,44624	27,50
49	0,47063	0,88233	0,53339	1,63232	0,61263	0,50984	1,12247	0,45422	28,07
50	0,47943	0,87758	0,54630	1,64872	0,60653	0,52110	1,12763	0,46212	28,65
51	0,48818	0,87274	0,55936	1,66529	0,60050	0,53240	1,13289	0,46995	29,22
52	0,49688	0,86782	0,57256	1,68203	0,59452	0,54375	1,13821	0,47770	29,79

α radiani	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	α^2	$e^{-\alpha}$	$\operatorname{sh} \alpha$	$\operatorname{ch} \alpha$	$\operatorname{th} \alpha$	α in grade
53	0,50553	0,86281	0,58592	1,69893	0,58860	0,55516	1,14377	0,48538	30,37°
54	0,51414	0,85771	0,59943	1,71601	0,58275	0,56663	1,14938	0,49299	30,94
55	0,52269	0,85252	0,61311	1,73325	0,57695	0,57815	1,15510	0,50052	31,51
56	0,53119	0,84726	0,62695	1,75067	0,57121	0,58973	1,16094	0,50798	32,09
57	0,53963	0,84190	0,64097	1,76827	0,56553	0,60137	1,16690	0,51536	32,66
58	0,54802	0,83646	0,65517	1,78604	0,55990	0,61307	1,17297	0,52267	33,23
59	0,55636	0,83094	0,66956	1,80399	0,55433	0,62483	1,17916	0,52990	33,80
0,60	0,56464	0,82534	0,68414	1,82212	0,54881	0,63665	1,18547	0,53705	34,38
61	0,57287	0,81965	0,69892	1,84043	0,54335	0,64854	1,19189	0,54413	34,95
62	0,58104	0,81388	0,71391	1,85893	0,53794	0,66049	1,19844	0,55113	35,52
63	0,58914	0,80803	0,72911	1,87761	0,53259	0,67251	1,20510	0,55805	36,10
64	0,59720	0,80210	0,74454	1,89648	0,52729	0,68459	1,21189	0,56490	36,67
65	0,60519	0,79608	0,76020	1,91554	0,52205	0,69675	1,21879	0,57167	37,24
66	0,61312	0,78999	0,77610	1,93479	0,51685	0,70897	1,22582	0,57836	37,82
67	0,62099	0,78382	0,79225	1,95424	0,51171	0,72126	1,23297	0,58498	38,39
68	0,62879	0,77757	0,80866	1,97388	0,50662	0,73363	1,24025	0,59152	38,96
69	0,63654	0,77125	0,82534	1,99372	0,50158	0,74607	1,24765	0,59798	39,53
0,70	0,64422	0,76484	0,84229	2,01375	0,49659	0,75858	1,25517	0,60437	40,11
71	0,65183	0,75836	0,85953	2,03399	0,49164	0,77117	1,26282	0,61068	40,68
72	0,65938	0,75181	0,87707	2,05443	0,48675	0,78384	1,27059	0,61691	41,25
73	0,66687	0,74517	0,89492	2,07508	0,48191	0,79659	1,27849	0,62307	41,83
74	0,67429	0,73847	0,91309	2,09594	0,47711	0,80941	1,28652	0,62915	42,40
75	0,68164	0,73169	0,93160	2,11700	0,47237	0,82232	1,29468	0,63515	42,97
76	0,68892	0,72484	0,95045	2,13828	0,46767	0,83530	1,30297	0,64108	43,54
77	0,69614	0,71791	0,96967	2,15977	0,46301	0,84838	1,31139	0,64693	44,12
78	0,70328	0,71091	0,98926	2,18147	0,45841	0,86153	1,31994	0,65271	44,69
79	0,71035	0,70385	1,00925	2,20340	0,45384	0,87478	1,32862	0,65841	45,26

0,80	0,71736	0,69671	1,02964	2,22554	0,44933	0,88811	1,33743	0,66404	45,84
81	0,72429	0,68950	1,05046	2,24791	0,44486	0,90152	1,34638	0,66959	46,41
82	0,73115	0,68222	1,07171	2,27050	0,44043	0,91503	1,35547	0,67507	46,98
83	0,73793	0,67488	1,09343	2,29332	0,43605	0,92863	1,36468	0,68048	47,56
84	0,74464	0,66746	1,11563	2,31637	0,43171	0,94233	1,37404	0,68581	48,13
85	0,75128	0,65998	1,13833	2,33965	0,42741	0,95612	1,38353	0,69107	48,70
86	0,75784	0,65244	1,16156	2,36316	0,42316	0,97000	1,39316	0,69626	49,27
87	0,76433	0,64483	1,18532	2,38691	0,41895	0,98398	1,40293	0,70137	49,85
88	0,77074	0,63715	1,20966	2,41090	0,41478	0,99806	1,41284	0,70642	50,42
89	0,77707	0,62941	1,23460	2,43513	0,41066	1,01224	1,42289	0,71139	50,99
0,90	0,78333	0,62161	1,26016	2,45960	0,40657	1,02652	1,43309	0,71630	51,57
91	0,78950	0,61375	1,28637	2,48432	0,40252	1,04090	1,44342	0,72113	52,14
92	0,79560	0,60582	1,31326	2,50929	0,39852	1,05539	1,45390	0,72590	52,71
93	0,80162	0,59783	1,34087	2,53451	0,39455	1,06998	1,46453	0,73059	53,29
94	0,80756	0,58979	1,36923	2,55998	0,39063	1,08468	1,47530	0,73522	53,86
95	0,81342	0,58168	1,39838	2,58571	0,38674	1,09948	1,48623	0,73978	54,43
96	0,81919	0,57352	1,42836	2,61170	0,38289	1,11440	1,49729	0,74428	55,00
97	0,82489	0,56530	1,45920	2,63794	0,37908	1,12943	1,50851	0,74870	55,58
98	0,83050	0,55702	1,49096	2,66446	0,37531	1,14457	1,51988	0,75307	56,15
99	0,83603	0,54869	1,52368	2,69123	0,37158	1,15983	1,53141	0,75736	56,72
1,00	0,84147	0,54030	1,55741	2,71828	0,36788	1,17520	1,54308	0,76159	57,30
01	0,84683	0,53186	1,59221	2,74560	0,36422	1,19069	1,55491	0,76576	57,87
02	0,85211	0,52337	1,62813	2,77319	0,36059	1,20630	1,56689	0,76987	58,44
03	0,85730	0,51482	1,66524	2,80107	0,35701	1,22203	1,57904	0,77391	59,01
04	0,86240	0,50622	1,70361	2,82922	0,35345	1,23788	1,59134	0,77789	59,59
05	0,86742	0,49757	1,74332	2,85765	0,34994	1,25386	1,60379	0,78181	60,16
06	0,87236	0,48887	1,78442	2,88637	0,34646	1,26996	1,61641	0,78566	60,73
07	0,87720	0,48012	1,82703	2,91538	0,34301	1,28619	1,62919	0,78946	61,31
08	0,88196	0,47133	1,87122	2,94468	0,33960	1,30251	1,64214	0,79320	61,88
09	0,88663	0,46249	1,91709	2,97427	0,33622	1,31903	1,65525	0,79688	62,45

α radian	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$	$\sec \alpha$	$\csc \alpha$	$\cot \alpha$	$\operatorname{sh} \alpha$	$\operatorname{ch} \alpha$	$\operatorname{th} \alpha$	α in grads
1,10	0,89121	0,45360	1,96476	3,00417	0,33287	1,33565	1,66852	0,80050	63,03°	
11	0,89570	0,44466	2,01434	3,03436	0,32956	1,35240	1,68196	0,80406	63,60	
12	0,90010	0,43568	2,06596	3,05485	0,32628	1,36929	1,69557	0,80757	64,17	
13	0,90441	0,42666	2,11975	3,09566	0,32303	1,38631	1,70934	0,81102	64,74	
14	0,90863	0,41759	2,17588	3,12677	0,31982	1,40347	1,72329	0,81441	65,32	
15	0,91276	0,40849	2,23450	3,15819	0,31664	1,42078	1,73741	0,81775	65,89	
16	0,91680	0,39934	2,29580	3,18993	0,31349	1,43822	1,75171	0,82104	66,46	
17	0,92075	0,39015	2,35998	3,22199	0,31037	1,45581	1,76618	0,82427	67,04	
18	0,92561	0,38092	2,42727	3,25437	0,30728	1,47355	1,78083	0,82745	67,61	
19	0,92837	0,37166	2,49790	3,28708	0,30422	1,49143	1,79565	0,83058	68,18	
1,20	0,93204	0,36236	2,57215	3,32012	0,30119	1,50946	1,81066	0,83365	68,75	
21	0,93562	0,35302	2,65033	3,35348	0,29820	1,52764	1,82584	0,83668	69,33	
22	0,93910	0,34365	2,73275	3,38719	0,29523	1,54598	1,84121	0,83965	69,90	
23	0,94249	0,33424	2,81982	3,42123	0,29229	1,56447	1,85676	0,84258	70,47	
24	0,94578	0,32480	2,91193	3,45561	0,28938	1,58311	1,87250	0,84546	71,05	
25	0,94898	0,31532	3,00957	3,49034	0,28650	1,60192	1,88842	0,84828	71,62	
26	0,95209	0,30582	3,11327	3,52542	0,28365	1,62088	1,90454	0,85106	72,19	
27	0,95510	0,29628	3,22363	3,56085	0,28083	1,64001	1,92084	0,85380	72,77	
28	0,95802	0,28672	3,34135	3,59664	0,27804	1,65930	1,93734	0,85648	73,34	
29	0,96084	0,27712	3,46721	3,63279	0,27527	1,67876	1,95403	0,85913	73,91	
1,30	0,96356	0,26750	3,60210	3,66930	0,27253	1,69838	1,97091	0,86172	74,48	
31	0,96618	0,25785	3,74708	3,70617	0,26982	1,71818	1,98800	0,86428	75,06	
32	0,96872	0,24818	3,90335	3,74342	0,26714	1,73814	2,00528	0,86678	75,63	
33	0,97115	0,23848	4,07231	3,78104	0,26448	1,75828	2,02276	0,86925	76,20	
34	0,97348	0,22875	4,25562	3,81904	0,26185	1,77800	2,04044	0,87167	77,78	

35	0,97572	0,21901	4,46522	3,85743	0,25924	1,79959	2,05833	0,87405	77,55
36	0,97786	0,20924	4,67344	3,89619	0,25666	1,81977	2,07643	0,87639	77,92
37	0,97991	0,19945	4,91306	3,93535	0,25411	1,84062	2,09473	0,87869	78,50
38	0,98185	0,18964	5,17744	3,97490	0,25158	1,86166	2,11324	0,88095	79,07
39	0,98370	0,17981	5,47069	4,01485	0,24908	1,88289	2,13196	0,88317	79,64
1,40	0,98545	0,16997	5,79789	4,05520	0,24660	1,90430	2,15090	0,88535	80,21
41	0,98710	0,16010	6,16536	4,09596	0,24414	1,92591	2,17005	0,88749	80,79
42	0,98865	0,15023	6,58112	4,13712	0,24171	1,94770	2,18942	0,88960	81,36
43	0,99010	0,14033	7,05547	4,17870	0,23931	1,96970	2,20900	0,89167	81,93
44	0,99146	0,13042	7,60183	4,22070	0,23693	1,99188	2,22881	0,89370	82,51
45	0,99271	0,12050	8,23810	4,26311	0,23457	2,01427	2,24884	0,89569	83,08
46	0,99387	0,11057	8,98861	4,30596	0,23224	2,03686	2,26910	0,89765	83,65
47	0,99492	0,10063	9,91550	4,34924	0,22993	2,05965	2,28958	0,89958	84,22
48	0,99588	0,09067	10,98338	4,39295	0,22764	2,08265	2,31029	0,90147	84,80
49	0,99674	0,08071	12,34986	4,43710	0,22537	2,10586	2,33123	0,90332	85,37
1,50	0,99749	0,07074	14,10142	4,48169	0,22313	2,12928	2,35241	0,90515	85,94
51	0,99815	0,06076	16,42809	4,52673	0,22091	2,15291	2,37382	0,90694	86,52
52	0,99871	0,05077	19,66966	4,57223	0,21871	2,17676	2,39547	0,90870	87,09
53	0,99917	0,04079	24,49841	4,61818	0,21654	2,20082	2,41736	0,91042	87,66
54	0,99953	0,03079	32,46114	4,66459	0,21438	2,22510	2,43949	0,91212	88,24
55	0,99978	0,02079	48,07849	4,71147	0,21225	2,24961	2,46186	0,91379	88,81
56	0,99994	0,01080	92,62050	4,75882	0,21014	2,27434	2,48448	0,91542	89,37
57	1,00000	+0,00080	+1255,766	4,80665	0,20805	2,29930	2,50735	0,91703	89,95
58	0,99996	-0,00920	-108,6492	4,85496	0,20598	2,32449	2,53047	0,91860	90,53
59	0,99982	-0,01920	-52,06698	4,90375	0,20393	2,34991	2,55384	0,92015	91,10
1,60	0,99957	-0,02920	-34,23254	4,95303	0,20190	2,37557	2,57746	0,92167	91,67
70	0,99166	-0,12884	-7,69660	5,47395	0,18268	2,64563	2,82832	0,93541	97,40
80	0,97385	-0,22720	-4,28626	6,04965	0,16530	2,94217	3,10747	0,94681	103,13
90	0,94630	-0,32329	-2,92710	6,68589	0,14957	3,26816	3,41773	0,95624	108,86

x radian	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	e^x	e^{-x}	$\sinh x$	$\cosh x$	$\tanh x$	x in grade
2,00	0,90930	-0,41615	-2,18504	7,38906	0,13534	3,62686	3,76220	0,96403	114,59°
10	0,86321	-0,50485	-1,70985	8,16617	0,12246	4,02186	4,14431	0,97045	120,32
20	0,80850	-0,58850	-1,37382	9,02501	0,11080	4,45711	4,56791	0,97574	126,05
30	0,74571	-0,66628	-1,11921	9,97418	0,10026	4,93696	5,03722	0,98010	131,78
40	0,67546	-0,73739	-0,91601	11,02318	0,09072	5,46623	5,55695	0,98367	137,51
2,50	0,59847	-0,80114	-0,74702	12,18249	0,08208	6,05020	6,13229	0,98661	143,24
60	0,51550	-0,85689	-0,60160	13,46374	0,07427	6,69473	6,76901	0,98903	148,97
70	0,42738	-0,90407	-0,47273	14,87973	0,06721	7,40626	7,47347	0,99101	154,70
80	0,33499	-0,94222	-0,35553	16,44465	0,06081	8,19192	8,25273	0,99263	160,43
90	0,23925	-0,97096	-0,24641	18,17415	0,05502	9,05956	9,11458	0,99396	166,16
3,00	0,14112	-0,98999	-0,14255	20,08554	0,04979	10,01787	10,06766	0,99505	171,89
10	+0,04158	-0,99914	-0,04162	22,19795	0,04505	11,07645	11,12150	0,99595	177,62
20	-0,05837	-0,99829	+0,05847	24,53253	0,04076	12,24588	12,28665	0,99668	183,35
30	-0,15775	-0,98748	0,15975	27,11264	0,03688	13,53788	13,57476	0,99728	189,08
40	-0,25554	-0,96680	0,26442	29,96410	0,03337	14,96536	14,99874	0,99777	194,81
50	-0,35078	-0,93646	0,37470	33,11545	0,03020	16,54263	16,57282	0,99818	200,54
60	-0,44252	-0,89676	0,49347	36,59823	0,02732	18,28546	18,31278	0,99851	206,26
70	-0,52984	-0,84810	0,62473	40,44730	0,02472	20,21129	20,23601	0,99878	211,99
80	-0,61186	-0,79097	0,77356	44,70118	0,02237	22,33941	22,36178	0,99900	217,72
90	-0,68777	-0,72593	0,94742	49,40245	0,02024	24,69110	24,71135	0,99918	223,45
4,00	-0,75680	-0,65364	1,15782	54,59815	0,01832	27,28992	27,30823	0,99933	229,18
10	-0,81828	-0,57482	1,42353	60,34029	0,01657	30,16186	30,17843	0,99945	234,91
20	-0,87158	-0,49026	1,77778	66,68633	0,01500	33,33567	33,35066	0,99955	240,64
30	-0,91617	-0,40080	2,28585	73,69979	0,01357	36,84311	36,85668	0,99963	246,37
40	-0,95160	-0,30733	3,09632	81,45087	0,01228	40,71930	40,73157	0,99970	252,10

50	-0,97753	-0,21080	4,63733	90,01713	0,91111	45,00301	45,01412	0,99975	257,83
60	-0,99369	-0,11215	8,86018	99,48432	0,01005	49,73713	49,74718	0,99980	263,56
70	-0,99992	-0,01239	+80,71280	109,9472	0,00910	54,96904	54,97813	0,99983	269,29
80	-0,99616	+0,08750	-11,38487	121,5104	0,00823	60,75109	60,75932	0,99986	275,02
90	-0,98245	0,18651	-5,26749	134,2898	0,00745	67,14117	67,14861	0,99989	280,75
5,00	-0,95892	0,28366	-3,38052	148,4132	0,00674	74,20321	74,20995	0,99991	286,48
10	-0,92581	0,37798	-2,44939	164,0219	0,00610	82,00791	82,01400	0,99993	292,21
20	-0,88345	0,46852	-1,88564	181,2722	0,00552	90,63336	90,63888	0,99994	297,94
30	-0,83227	0,55437	-1,50128	200,3368	0,00499	100,1659	100,1709	0,99995	303,67
40	-0,77276	0,63469	-1,21754	221,4064	0,00452	110,7069	110,7055	0,99996	309,40
5,50	-0,70554	0,70867	-0,99558	244,6919	0,00409	122,3439	122,3480	0,99997	315,13
60	-0,63127	0,77557	-0,81394	270,4264	0,00370	135,2114	135,2150	0,99997	320,86
70	-0,55069	0,83471	-0,65973	298,8674	0,00335	149,4320	149,4354	0,99998	326,59
80	-0,46460	0,88552	-0,52467	330,2996	0,00303	165,1483	165,1513	0,99998	332,32
90	-0,37388	0,92748	-0,40311	365,0375	0,00274	182,5174	182,5201	0,99999	338,05
6,00	-0,27942	0,96017	-0,29101	403,4288	0,00248	201,7132	201,7156	0,99999	343,77
30	+0,01681	0,99986	+0,01681	544,5719	0,00184	272,2850	272,2869	0,99999	360,96

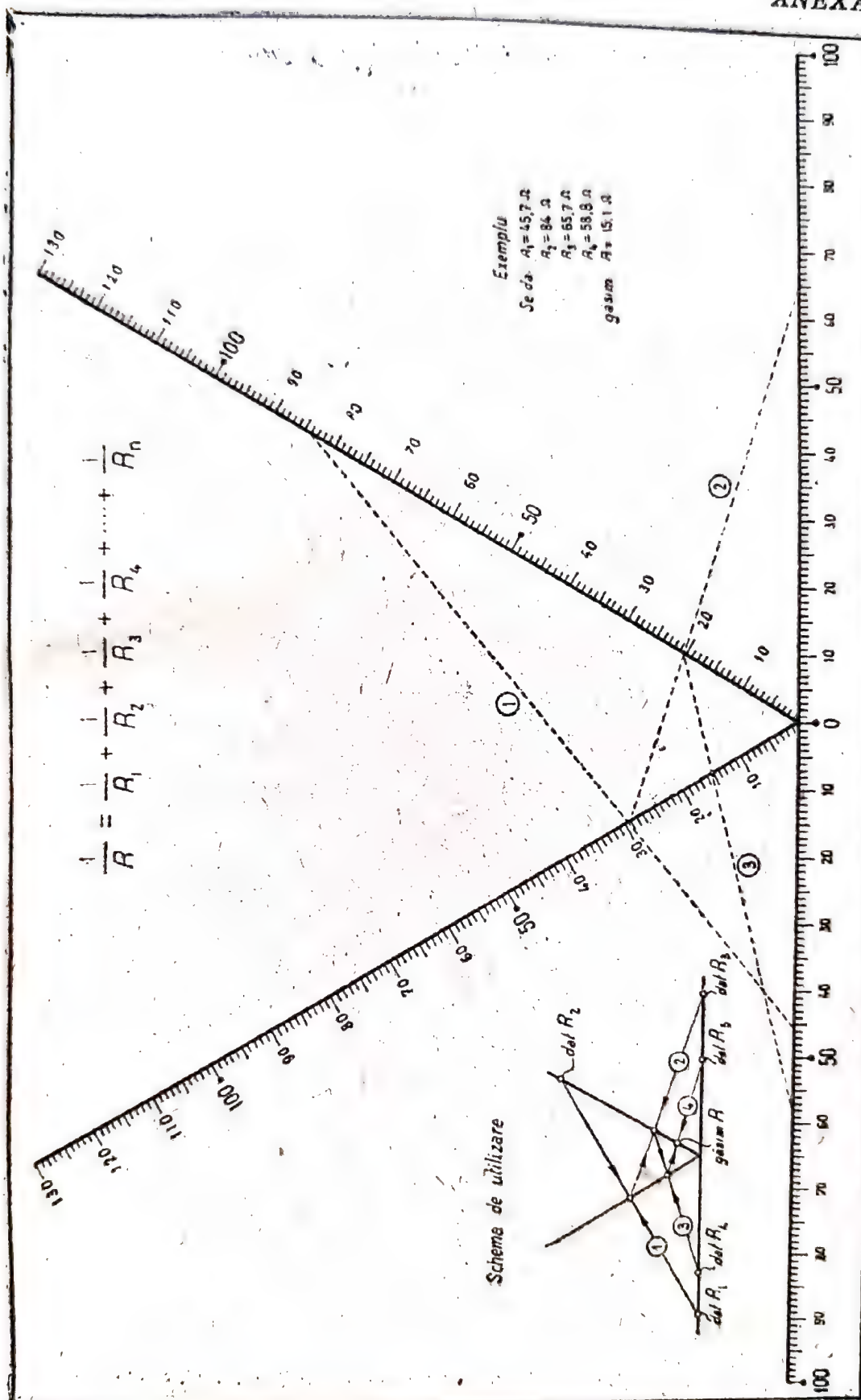
Tabelă suplimentară pentru argumentele $\pi/4$, $\pi/2$, $3\pi/4$, π , $5\pi/4$, $3\pi/2$, $7\pi/4$, 2π

(Argumentul în radiani și grade vechi)

α radiani	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	e^{α}	$e^{-\alpha}$	$\operatorname{sh} \alpha$	$\operatorname{ch} \alpha$	$\operatorname{th} \alpha$	α în grade
$1/4 \pi = 0,7854$	0,70711	0,70711	1	2,19328	0,45594	0,86867	1,32461	0,65579	45,00°
$1/2 \pi = 1,5708$	1,00000	0,00000	$\pm \infty$	4,81049	0,20788	2,30130	2,50918	0,91715	90,00
$3/4 \pi = 2,3562$	0,70711	-0,70711	-1	10,55072	0,09478	5,22797	5,32275	0,98219	135,00
$\pi = 3,1416$	0,00000	-1,00000	0	23,14069	0,04321	11,54874	11,59195	0,99627	180,00
$5/4 \pi = 3,9270$	-0,70711	-0,70711	1	50,75402	0,01970	25,36716	25,38686	0,99922	225,00
$3/2 \pi = 4,7124$	-1,00000	0,00000	$\pm \infty$	111,3178	0,00898	55,65440	55,66338	0,99984	270,00
$7/4 \pi = 5,4978$	-0,70711	0,70711	-1	244,1511	0,00410	122,0735	122,0776	0,99997	315,00
$2 \pi = 6,2832$	0,00000	1,00000	0	535,4917	0,00187	267,7449	267,7468	0,99999	360,00

SCHEMĂ PENTRU DETERMINAREA REZISTENȚEI ECHIVALENTE A UNOR CONDUCTORI LEGAȚI ÎN PARALEL

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

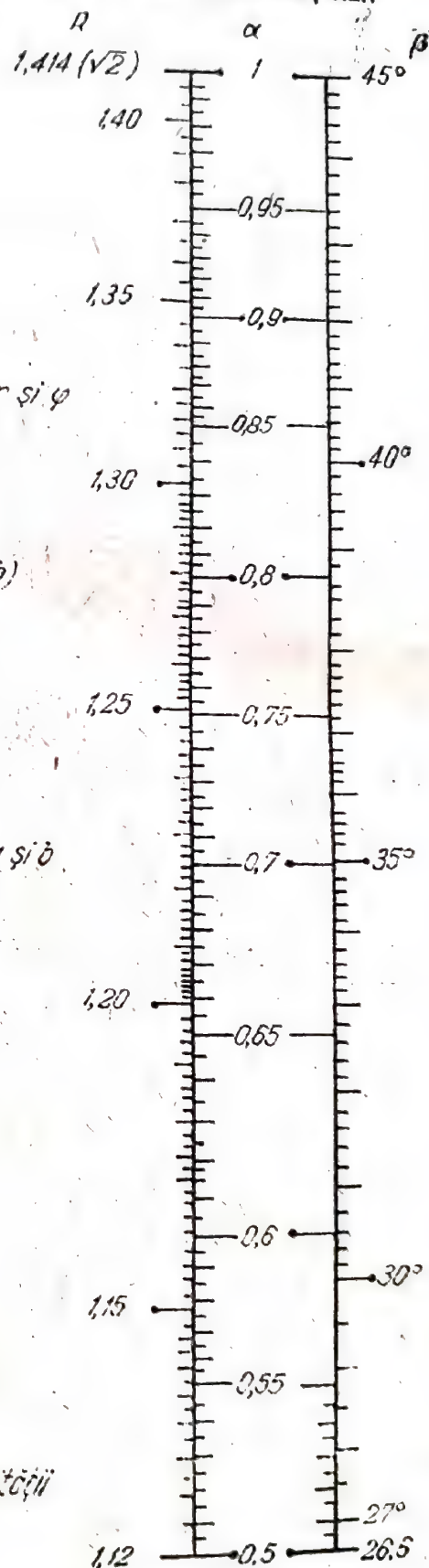
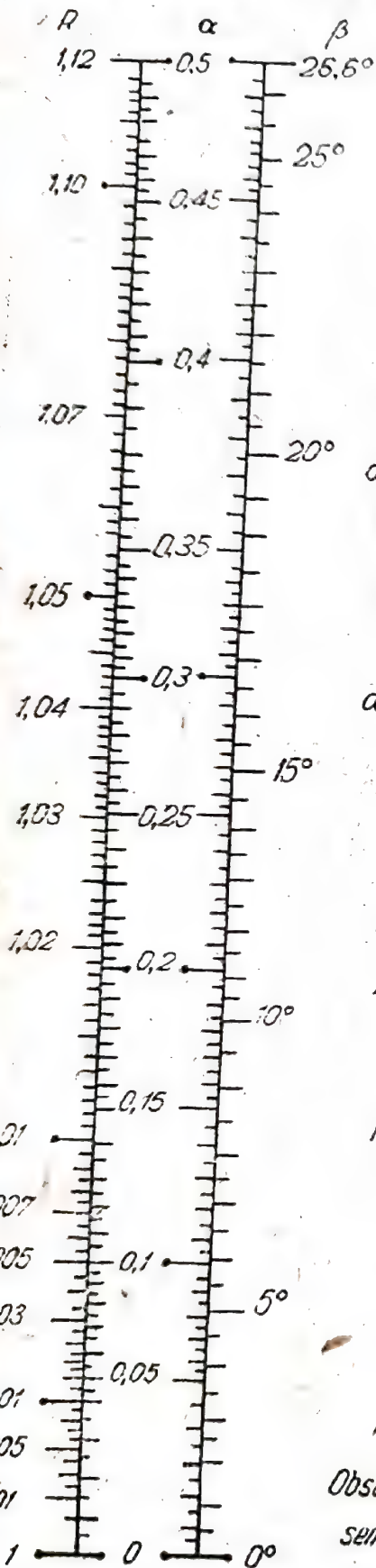


ANEXA II

Informații D. E. LEVIT
ELECTRICIST NR. 1 1951

NOMOGRAMĂ PENTRU CONVERTIREA NUMĂRULUI COMPLEX ÎN FORMĂ EXPONENȚIALĂ

ANEXA III



$$z = a + jb = re^{j\varphi}$$

1. Se dă a și b se determină r și φ
 $0 < b < a$
 $\alpha = \frac{b}{a}$; $r = aR$;

$$\begin{cases} \varphi = \beta \text{ (în cazul } a + jb) \\ \varphi = 180^\circ - \beta \text{ (în cazul } -a + jb) \end{cases}$$

$0 < \alpha < 1$

$$\alpha = \frac{a}{b}$$
; $r = bR$;

$$\begin{cases} \varphi = 90^\circ + \beta \text{ (în cazul } a + jb) \\ \varphi = 90^\circ - \beta \text{ (în cazul } -a + jb) \end{cases}$$

2. Se dă r și φ se determină a și b
 $0 < \varphi < 45^\circ$

$$\beta = \varphi$$
; $a = \frac{r}{R}$; $b = \alpha \frac{r}{R}$

$$45^\circ < \varphi < 90^\circ$$

$$\beta = 90^\circ - \varphi$$
; $a = \alpha \frac{r}{R}$; $b = \frac{r}{R}$

$$90^\circ < \varphi < 135^\circ$$

$$\beta = \varphi - 90^\circ$$
; $-a = \alpha \frac{r}{R}$; $b = \frac{r}{R}$

$$135^\circ < \varphi < 180^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - \varphi$$
; $-a = \frac{r}{R}$; $b = \alpha \frac{r}{R}$

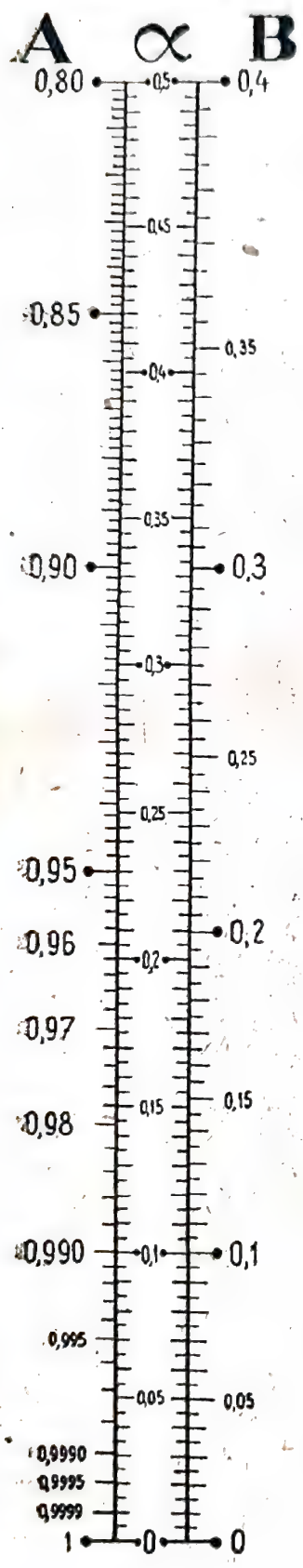
Observație: în ambele părți ale egalității
 semnul $+j$ poate fi înlocuit cu $-j$

Electricestvo 11/1951

Intocmită: D. E. Levit

NOMOGRAMĂ PENTRU DETERMINAREA INVERSULUI UNUI NUMĂR COMPLEX

ANEXA IV



$$\frac{1}{\pm a + j b} = \pm c - j d$$

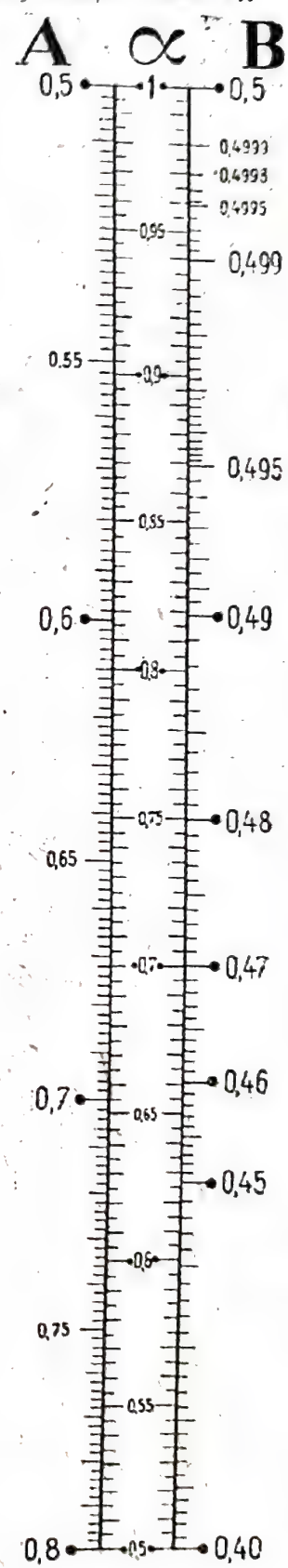
$$0 < b < a$$

$$\alpha = \frac{b}{a}; c = \frac{A}{a}; d = \frac{B}{a}$$

$$0 < a < b$$

$$\alpha = \frac{a}{b}; c = \frac{B}{b}; d = \frac{A}{b}$$

In ambele părți ale egalității se poate înlocui +j cu -j



Informații D. E. LEVIT
ELECTRICISTVO NR. 12 1950

NOMOGRAMĂ PENTRU DETERMINAREA CĂTULUI A DOUĂ NUMERE COMPLEXE $a + jb$ ȘI $c + jd$

Cățul a două numere complexe $(a + jb)/(c + jd)$ se determină prin nomograma dată sub forma $Q = p + jq$.

Nomograma este construită pentru a, b, c, d numere întregi, ele putând fi aduse întotdeauna la această formă, în care caz

$$p = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} \quad \text{și} \quad q = \frac{bc + ad}{c^2 + d^2}$$

se înmulțesc cu 10^n , unde n este un număr întreg (vezi exemplul). În nomogramă mărimile variabile c și d sunt date ca drepte, a și b sunt date prin două familii de curbe. Pentru determinarea lui p , valorile a sunt date în partea stângă a nomogramei, C în dreapta. Pentru determinarea lui q , a este dat în partea dreaptă (în paranteze) (valorile pozitive jos), b în stânga (în paranteze).

Exemplu: Se dă $a + jb = 50 + j10$; $c + jd = 0,3 + j0,16$. Împărțim $a + jb$ la 10:

$$\frac{50 + j10}{10} = 5 + j1$$

și înmulțim $c + jd$ cu 10

$$10(0,3 + j0,16) = 3 + j1,6$$

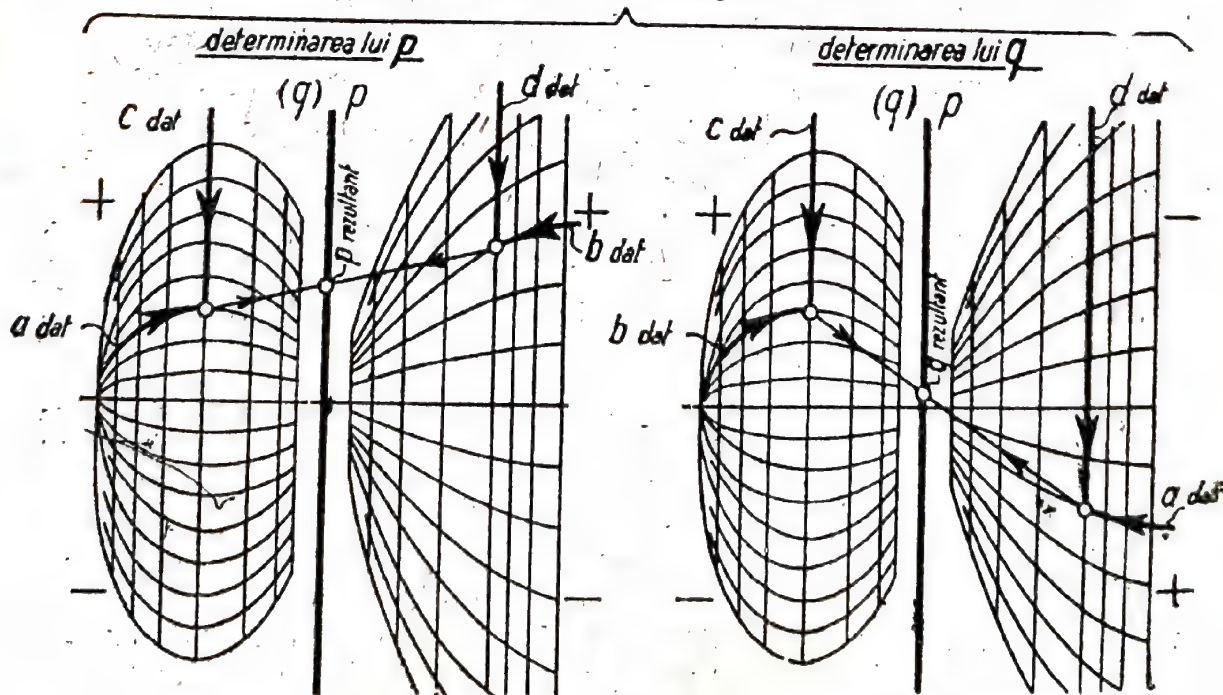
Prin urmare, prin aceasta Q se înmulțește cu 10^{-2} .

În stânga nomogramei găsim punctul comun pentru curba $a = 5$ și dreapta $c = 3$, iar în dreapta punctul $b = 1,0$, $d = 1,6$. Dreapta, care unește aceste puncte, determină pe scara $p(q)$ punctul $p = 0,468$.

Mai departe, găsim în stânga nomogramei punctul $(b) = 1$, $c = 3$, iar în dreapta $(a) = 5$; $d = 1,6$. Dreapta, care unește aceste puncte, determină pe scara $p(q)$ punctul $(q) = -0,6$.

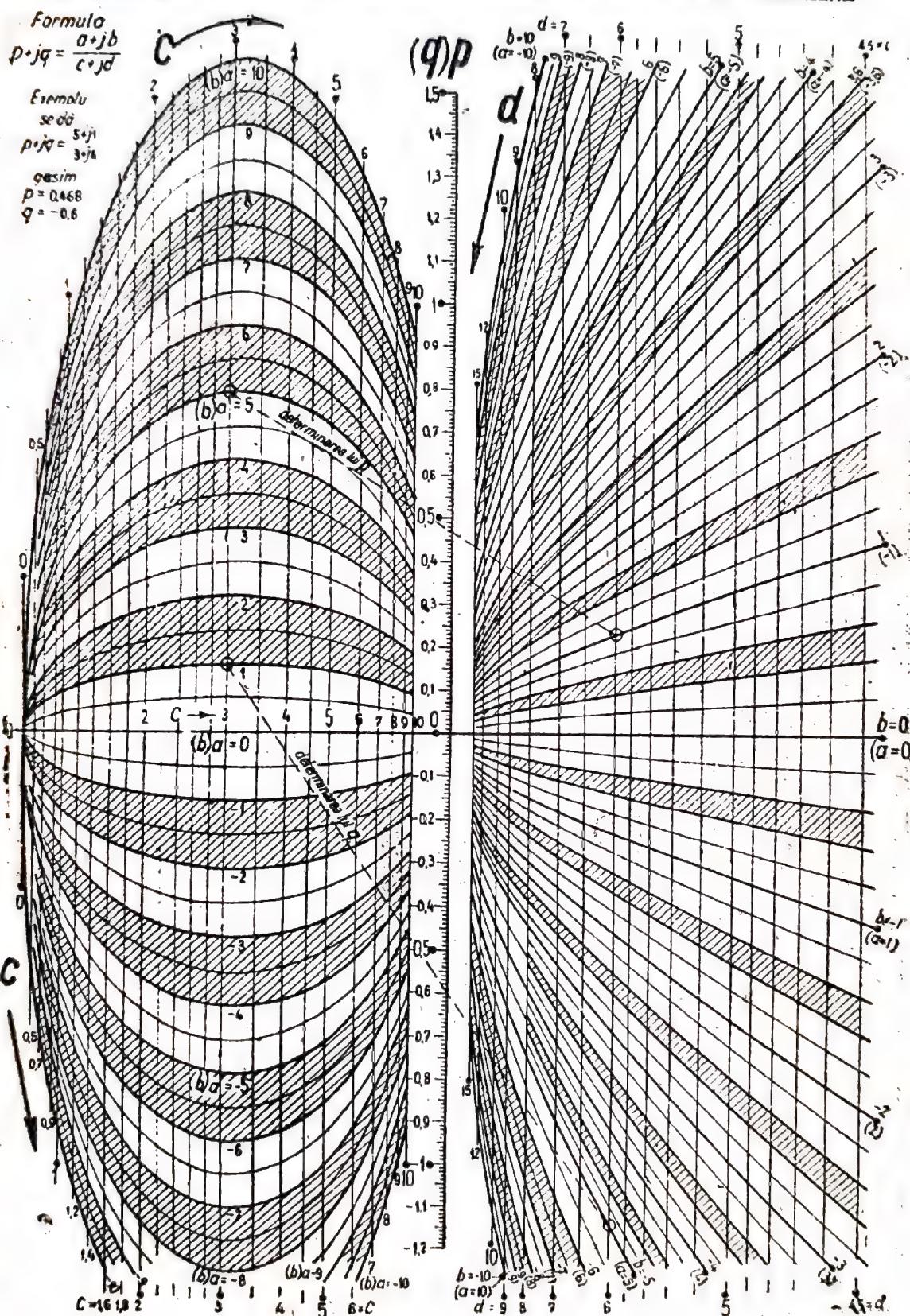
$$Q = (p + jq) 100 = 100(0,468 + j0,6) = 46,8 + j60.$$

Schema de utilizare a nomogramei



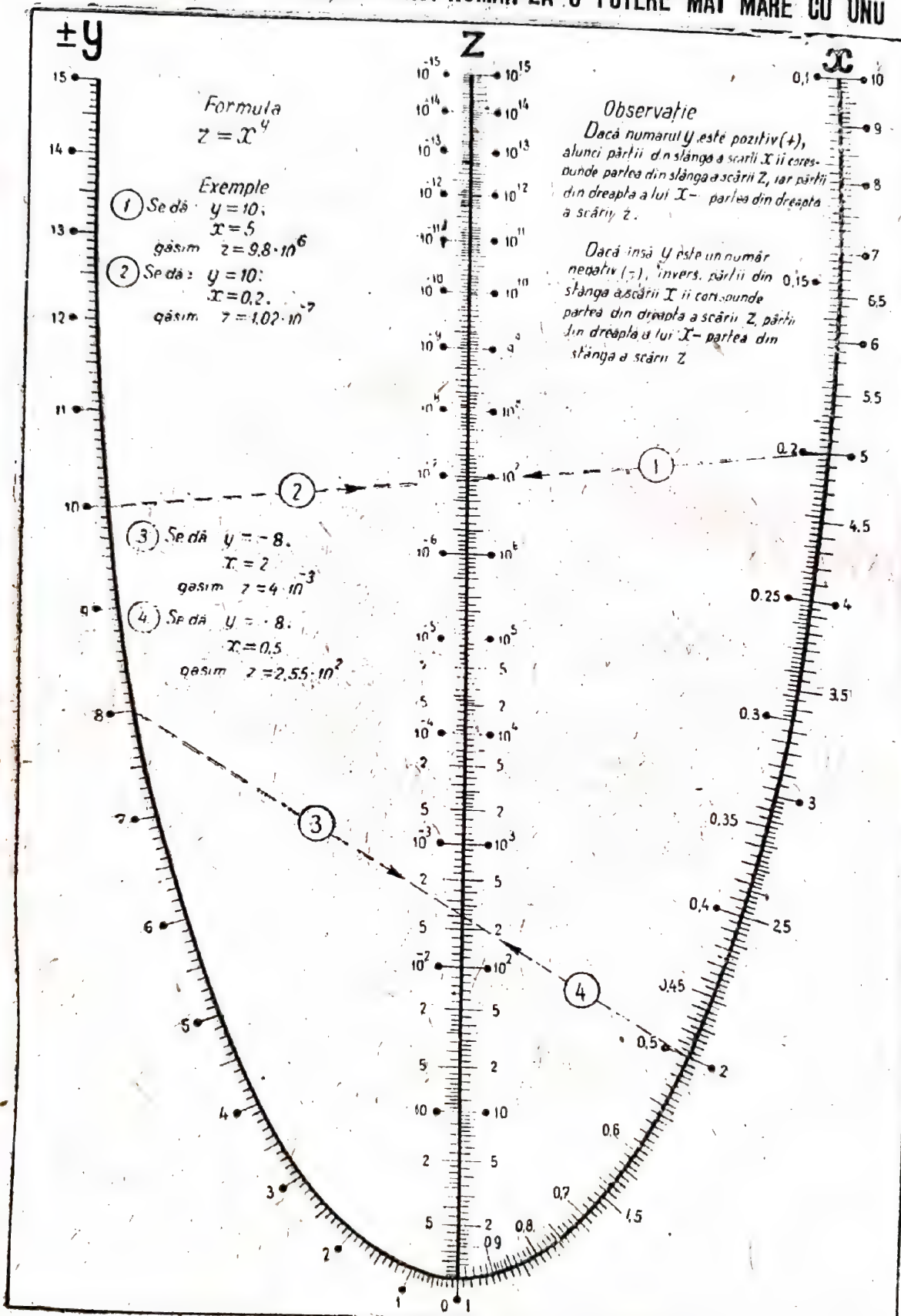
Pentru determinarea lui q seiau
cifrele din paranteze

ANEXA V NOMOGRAMĂ PENTRU DETERMINAREA CĂTULUI A DOUĂ NUMERE COMPLEXE



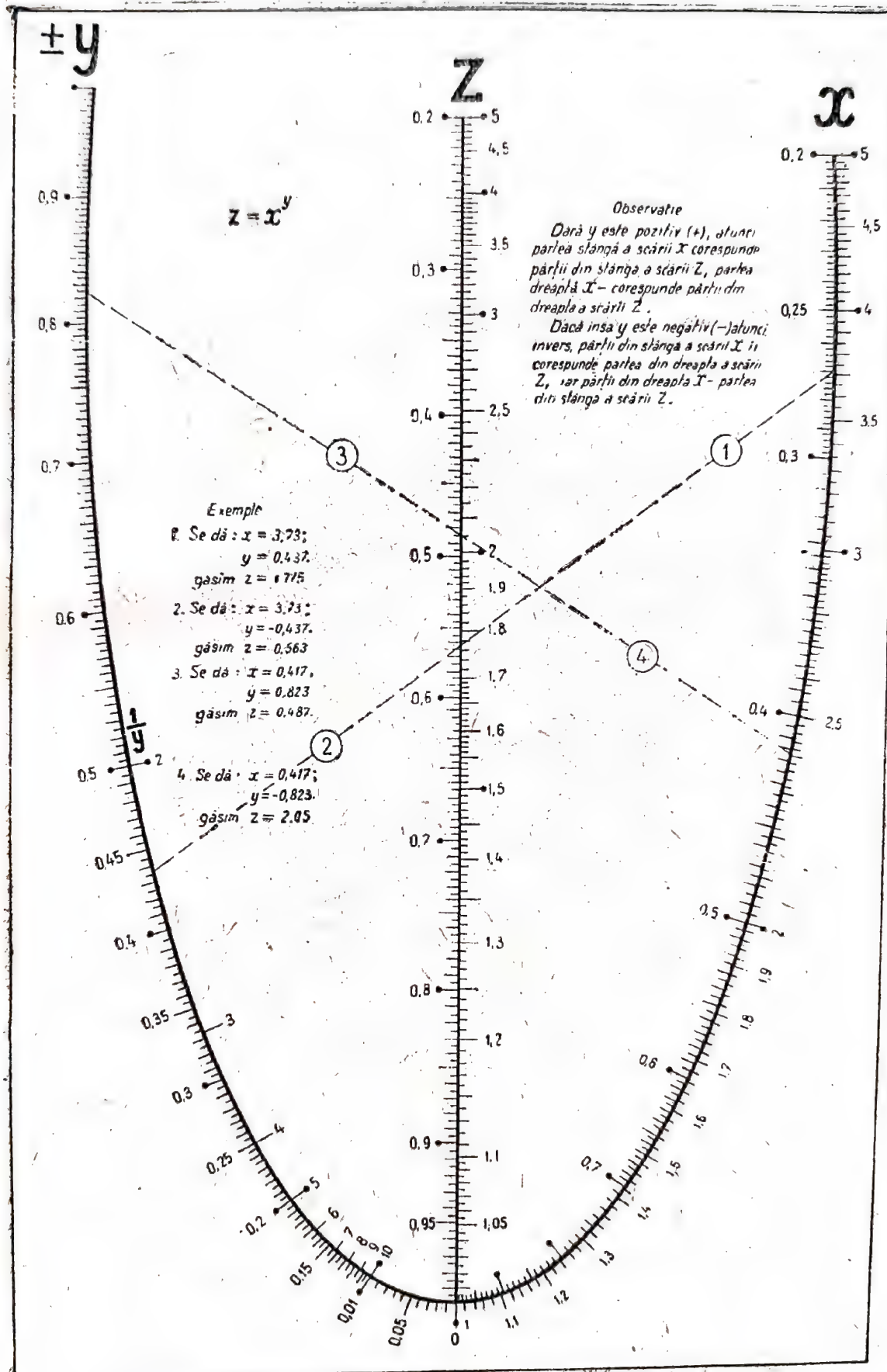
NOMOGRAMĂ PENTRU RIDICAREA UNUI NUMĂR LA O PUTERE MAI MARE CU UNU

ANEXA VI



Informații D. E. LEVIT
ELECTRICISTVO NR. 2 1953

ANEXA VII NOMOGRAMĂ PENTRU RIDICAREA UNUI NUMĂR LA PUTERI MAI MICI CU UNU



TABLOUL I

CALCULUL SUMELOR $S_K = Y_K + Y_{2p-K}$ SI DIFERENTELOR $d_K = Y_K - Y_{2p-K}$

Y_K		1	2	3	4	5	6	7	8
Y_{2p-K}	36	35	34	33	32	31	30	29	28
S_K	0	1	2	3	4	5	6	7	8
d_K		1	2	3	4	5	6	7	8
	9	10	11	12	13	14	15	16	17
	27	26	25	24	23	22	21	20	19
	9	10	11	12	13	14	15	16	17
	9	10	11	12	13	14	15	16	17

TABLOUL II

CALCULUL SUMELOR SUMELOR $S_K = S_K + S_{p-K}$ SI AL DIFERENTELOR SUMELOR $M = S_K - S_{p-K}$

S_K	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
S_{p-K}	18	17	16	15	14	13	12	11	10	
S_K	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
M_K	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

TABLOUL III

CALCULUL SUMELOR DIFERENTELOR $E_K = d_K + d_{p-K}$ SI AL DIFERENTELOR DIFERENT. $D_K = d_K - d_{p-K}$

d_K	1	2	3	4	5	6	7	8	9
d_{p-K}	17	16	15	14	13	12	11	10	
E_K	1	2	3	4	5	6	7	8	9
D_K	1	2	3	4	5	6	7	8	9

ANEXA IX

TABLOUL IV

CALCULUL ARMONICILOR FUNCȚIUNILOR IMPARE

Y_k		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y_{p-k}	18	17	16	15	14	13	12	11	10	
M_k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
E_k		1	2	3	4	5	6	7	8	9

TABLOUL V

CALCULUL ARMONICILOR FUNCȚIUNILOR PARE

Y_k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y_{p-k}	18	17	16	15	14	13	12	11	10	
S_k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
D_k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

E

CALCULUL ARMONICE IMPARE A_n ÎN SIN
TABLOUL PRODUSELOR DINTRE
SUMELE DIFERENȚELOR $E_k = d_p + d_{p-k}$
ȘI $\sin k \frac{\pi}{p}$ [$k = 1$ LA $k = \frac{p}{2}$]

	$\sin 90^\circ$ 1	$\sin 80^\circ$ 0.9848	$\sin 70^\circ$ 0.9397	$\sin 60^\circ$ 0.866	$\sin 50^\circ$ 0.766	$\sin 40^\circ$ 0.6428	$\sin 30^\circ$ 0.500	$\sin 20^\circ$ 0.342	$\sin 10^\circ$ 0.1736	$\sin 0^\circ$ 0	
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											
8											
9											

M

CALCULUL ARMONICE IMPARE B_n ÎN COS
TABLOUL PRODUSELOR DINTRE
DIFERENȚELE SUMELOR $M_k = S_k - S_{p-k}$
ȘI $\cos k \frac{\pi}{p}$ [$k=0$ LA $k=\frac{p}{2}$]

	$\cos 0^\circ$ 1	$\cos 10^\circ$ 0.9848	$\cos 20^\circ$ 0.9397	$\cos 30^\circ$ 0.866	$\cos 40^\circ$ 0.766	$\cos 50^\circ$ 0.6428	$\cos 60^\circ$ 0.500	$\cos 70^\circ$ 0.342	$\cos 80^\circ$ 0.1736	$\cos 90^\circ$ 0	
0											
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											
8											
9											

D

CALCULUL ARMONICE PARE A_n ÎN SIN
TABLOUL PRODUSELOR DINTRE
DIFERENȚELE DIFERENȚELOR $D_k = d_k - d_{p-k}$
ȘI $\sin k \frac{\pi}{p}$ [$k=1$ LA $k = \frac{p}{2}$]

	$\sin 90^\circ$ 1	$\sin 80^\circ$ 0,9848	$\sin 70^\circ$ 0,9397	$\sin 60^\circ$ 0,866	$\sin 50^\circ$ 0,766	$\sin 40^\circ$ 0,6428	$\sin 30^\circ$ 0,500	$\sin 20^\circ$ 0,342	$\sin 10^\circ$ 0,1736	$\sin 0^\circ$ 0	
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											
8											
9											

S

ANEXA XIII

CALCULUL ARMONICE PARE B_n ÎN COS
 TABLOUL PRODUSELOR DINTRE
 SUMELE SUMELOR $S_k = s_k + s_p - k$
 ȘI $\cos k \frac{\pi}{p}$ [$k = 0$ LA $k = \frac{p}{2}$]

	$\cos 0^\circ$ 1	$\cos 10^\circ$ 0.9848	$\cos 20^\circ$ 0.9397	$\cos 30^\circ$ 0.866	$\cos 40^\circ$ 0.766	$\cos 50^\circ$ 0.6428	$\cos 60^\circ$ 0.500	$\cos 70^\circ$ 0.342	$\cos 80^\circ$ 0.1736	$\cos 90^\circ$ 0
0										
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										

Tabel de corespondență pentru funcții imagină și original *)
(Transformarea Laplace)

Nr.	$F(p)$	$f(t)$ pentru $t \geq 0$
1	$aF(p)$ a — mărime constantă sau variabilă care nu depinde de t și p $F_1(p) \pm F_2(p)$	$af(t)$ $f_1(t) \pm f_2(t)$
2	$pF(p) - f(0+)$	$\frac{df(t)}{dt} \equiv f'(t)$
3	$pF(p)$	$f'(t)$ dacă $f(0+) = 0$
4	$\frac{F(p)}{p} + \frac{f^{(-1)}(0+)}{p}$	$\int f(t)dt \equiv f^{(-1)}(t)$
5	$\frac{F(p)}{p}$	$\int_0^t f(t)dt \equiv f^{(-1)}(t) - f^{(-1)}(0+)$
6	$aF(ap)$ a — mărime pozitivă constantă sau variabilă care nu depinde de t și p	$f\left(\frac{t}{a}\right)$
7	$F(p+a)$ $F(p-a)$ a — număr complex cu partea reală pozitivă	$e^{-at} f(t)$ $e^{at} f(t)$
8	$-\frac{d}{dp} F(p)$	$tf(t)$
9	$\int_p^\infty F(p)dp$	$\frac{1}{t} f(t)$
10	$\frac{A(p)}{B(p)}$ Frație rațională regulată cu poli de ordinul I	$\sum_{k=1}^n \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}$

*) In aceste tabele e reprezintă baza logaritmilor neperieni.

Nr.	$F(p)$	$f(t)$ pentru $t \geq 1$
11	$\frac{A(p)}{B(p)}$ Idem, cu poli de ordine superioare	$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{m_k} \frac{K_{kj}}{(m_k-j)!} t^{m_k-j} e^{p_k t}; m_1 + m_2 + \dots + m_n = q;$ $K_{kj} \equiv \frac{1}{(j-1)!} \left[\frac{d^{j-1}}{dp^{j-1}} \frac{(p-p_k)^{m_k} A(p)}{B(p)} \right]_{p=p_k};$ $B(p) = (p-p_1)^{m_1} (p-p_2)^{m_2} \dots (p-p_k)^{m_k} \dots (p-p_n)^{m_n}$
12	1	$f'(t) \equiv \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1(t) - f(t-a)}{a}$ funcție de impuls de ordinul I pentru $t = 0$.
13	$\frac{1}{p}$	1 sau $1(t)$ salt unitar pentru $t = 0$
14	$\frac{1}{p + \alpha}$	$e^{-\alpha t}$
15	$\frac{1}{(p + \alpha)(p + \gamma)}$	$\frac{e^{-\alpha t} - e^{-\gamma t}}{\gamma - \alpha}$
16	$\frac{p + a_0}{(p + \alpha)(p + \gamma)}$	$\frac{(a_0 - \alpha) e^{-\alpha t} - (a_0 - \gamma) e^{-\gamma t}}{\gamma - \alpha}$
17	$\frac{1}{p(p + \alpha)(p + \gamma)}$	$\frac{1}{\alpha\gamma} + \frac{\gamma e^{-\alpha t} - \alpha e^{-\gamma t}}{\alpha\gamma(\alpha - \gamma)}$
18	$\frac{p + a_0}{p(p + \alpha)(p + \gamma)}$	$\frac{a_0}{\alpha\gamma} + \frac{a_0 - \alpha}{\alpha(\alpha - \gamma)} e^{-\alpha t} + \frac{a_0 - \gamma}{\gamma(\gamma - \alpha)} e^{-\gamma t}$
19	$\frac{p^2 + a_1 p + a_0}{p(p + \alpha)(p + \gamma)}$	$\frac{a_0}{\alpha\gamma} + \frac{\alpha^2 - a_1 \alpha + a_0}{\alpha(\alpha - \gamma)} e^{-\alpha t} - \frac{\gamma^2 - a_1 \gamma + a_0}{\gamma(\alpha - \gamma)} e^{-\gamma t}$
20	$\frac{1}{(p + \alpha)(p + \gamma)(p + \delta)}$	$\frac{e^{-\alpha t}}{(\gamma - \alpha)(\delta - \alpha)} + \frac{e^{-\gamma t}}{(\alpha - \gamma)(\delta - \gamma)} + \frac{e^{-\delta t}}{(\alpha - \delta)(\gamma - \delta)}$
21	$\frac{p + a_0}{(p + \alpha)(p + \gamma)(p + \delta)}$	$\frac{a_0 - \alpha}{(\gamma - \alpha)(\delta - \alpha)} e^{-\alpha t} + \frac{a_0 - \gamma}{(\alpha - \gamma)(\delta - \gamma)} e^{-\gamma t} +$ $+ \frac{a_0 - \delta}{(\alpha - \delta)(\gamma - \delta)} e^{-\delta t}$

Nr.	$F(p)$	$f(t)$ pentru $t \geq 1$
22	$\frac{p^2 + a_1 p + a_0}{(p + \alpha)(p + \gamma)(p + \delta)}$	$\frac{\alpha^2 - a_1 \alpha + a_0}{(\gamma - \alpha)(\delta - \alpha)} e^{-\alpha t} + \frac{\gamma^2 - a_1 \gamma + a_0}{(\alpha - \gamma)(\delta - \gamma)} e^{-\gamma t} + \frac{\delta^2 - a_1 \delta + a_0}{(\alpha - \delta)(\gamma - \delta)} e^{-\delta t}$
23	$\frac{1}{p^2 + \beta^2}$	$\frac{1}{\beta} \sin \beta t$
24	$\frac{1}{p^2 - \beta^2}$	$\frac{1}{\beta} \operatorname{sh} \beta t$
25	$\frac{p}{p^2 + \beta^2}$	$\cos \beta t$
26	$\frac{p}{p^2 - \beta^2}$	$\operatorname{ch} \beta t$
27	$\frac{p + a_0}{p^2 + \beta^2}$	$\frac{1}{\beta} \sqrt{a_0^2 + \beta^2} \sin(\beta t + \psi)$ unde $\psi \equiv \operatorname{arc tg} \frac{\beta}{a_0}$
28	$\frac{1}{p(p^2 + \beta^2)}$	$\frac{1}{\beta^2} (1 - \cos \beta t)$
29	$\frac{p + a_0}{p(p^2 + \beta^2)}$	$\frac{a_0}{\beta^2} - \frac{1}{\beta^2} \sqrt{a_0^2 + \beta^2} \cos(\beta t + \psi)$ unde $\psi \equiv \operatorname{arc tg} \frac{\beta}{a_0}$
30	$\frac{p^2 + a_1 p + a_0}{p(p^2 + \beta^2)}$	$\frac{a_0}{\beta^2} - \frac{1}{\beta^2} \sqrt{(a_0 - \beta^2)^2 + a_1^2 \beta^2} \cos(\beta t + \psi)$ unde $\psi \equiv \operatorname{arc tg} \frac{a_1 \beta}{a_0 - \beta^2}$
31	$\frac{p}{(p^2 + \beta^2)(p^2 + \lambda^2)}$	$\frac{\cos \beta t - \cos \lambda t}{\lambda^2 - \beta^2}$
32	$\frac{p}{[p^2 + (\beta + \lambda)^2][p^2 + (\beta - \lambda)^2]}$	$\frac{1}{2\lambda\beta} \sin \lambda t \cdot \sin \beta t$

Nr.	$F(p)$	$f(t)$ pentru $t \geq 1$
33	$\frac{1}{(p + \alpha)^2 + \beta^2}$	$\frac{1}{\beta} e^{-\alpha t} \sin \beta t$
34	$\frac{p + a_0}{(p + \alpha)^2 + \beta^2}$	$\frac{1}{\beta} \sqrt{(a_0 - \alpha)^2 + \beta^2} e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \psi),$ unde $\psi \equiv \arctan \frac{\beta}{a_0 - \alpha}$
35	$\frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \beta^2}$	$e^{-\alpha t} \cos \beta t$
36	$\frac{1}{p^2}$	t
37	$\frac{1}{p^n}$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1}$, unde n este un număr întreg pozitiv
38	$\frac{1}{(p + \alpha) p^2}$	$\frac{e^{-\alpha t} + \alpha t - 1}{\alpha^2}$
39	$\frac{p + a_0}{(p + \alpha) p^2}$	$\frac{a_0 - \alpha}{\alpha^2} e^{-\alpha t} + \frac{a_0}{\alpha} t + \frac{\alpha - a_0}{\alpha^2}$
40	$\frac{p^2 + a_1 p + a_0}{(p + \alpha) p^2}$	$\frac{\alpha^2 - a_1 \alpha + a_0}{\alpha^2} e^{-\alpha t} + \frac{a_0}{\alpha} t + \frac{a_1 \alpha - a_0}{\alpha^2}$
41	$\frac{1}{(p + \alpha)^2}$	$t e^{-\alpha t}$
42	$\frac{p + a_0}{(p + \alpha)^2}$	$[(a_0 - \alpha) t + 1] e^{-\alpha t}$
43	$\frac{1}{(p + \alpha)^n}$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\alpha t}$, unde n este un număr întreg pozitiv
44	$\frac{p^n}{(p + \alpha)^{n+1}}$	$e^{-\alpha t} \sum_{k=0}^n \frac{n! (-\alpha)^k}{(n-k)! (k!)^2} t^k$, unde n este un număr întreg pozitiv
45	$\frac{1}{p(p + \alpha)^2}$	$\frac{1 - (t + \alpha t) e^{-\alpha t}}{\alpha^2}$
46	$\frac{p + a_0}{p(p + \alpha)^2}$	$\frac{a_0}{\alpha^2} + \left(\frac{\alpha - a_0}{\alpha} t - \frac{a_0}{\alpha^2} \right) e^{-\alpha t}$

Nr.	$F(p)$	$f(t)$ pentru $t \geq 0$
47	$\frac{p^2 + a_1 p + a_0}{p(p + \alpha)^2}$	$\frac{a_0}{\alpha^2} + \left(\frac{a_1 \alpha - a_0 - \alpha^2}{\alpha} t + \frac{\alpha^2 - a_0}{\alpha^2} \right) e^{-\alpha t}$
48	$\frac{1}{(p + \gamma)(p + \alpha)^2}$	$\frac{1}{(\gamma - \alpha)^2} e^{-\gamma t} + \frac{(\gamma - \alpha)t - 1}{(\gamma - \alpha)^2} e^{-\alpha t}$
49	$\frac{1}{(p^2 + \beta^2)p^2}$	$\frac{1}{\beta^2} t - \frac{1}{\beta^3} \sin \beta t$
50	$\frac{1}{(p^2 - \beta^2)p^2}$	$\frac{1}{\beta^3} \operatorname{sh} \beta t - \frac{1}{\beta^2} t$
51	$\frac{1}{(p^2 + \beta^2)p^3}$	$\frac{1}{\beta^4} (\cos \beta t - 1) + \frac{1}{2\beta^2} t^2$
52	$\frac{1}{(p^2 - \beta^2)p^3}$	$\frac{1}{\beta^4} (\operatorname{ch} \beta t - 1) - \frac{1}{2\beta^2} t^2$
53	$\frac{1}{(p^2 + \beta^2)^2}$	$\frac{1}{2\beta^3} (\sin \beta t - \beta t \cos \beta t)$
54	$\frac{p}{(p^2 + \beta^2)^2}$	$\frac{1}{2\beta} t \sin \beta t$
55	$\frac{p^2}{(p^2 + \beta^2)^2}$	$\frac{1}{2\beta} (\sin \beta t + \beta t \cos \beta t)$
56	$\frac{p^2 - \beta^2}{(p^2 + \beta^2)^2}$	$t \cos \beta t$
57	$\frac{1}{p(p^2 + \beta^2)^2}$	$\frac{1}{\beta^4} (1 - \cos \beta t) - \frac{1}{2\beta^3} t \sin \beta t$
58	$\frac{1}{[(p + \alpha)^2 + \beta^2]^2}$	$\frac{1}{2\beta^3} e^{-\alpha t} (\sin \beta t - \beta t \cos \beta t)$
59	$\frac{p + \alpha}{[(p + \alpha)^2 + \beta^2]^2}$	$\frac{1}{2\beta} t e^{-\alpha t} \sin \beta t$

Nr.	$F(p)$	$f(t)$ pentru $t \geq 1$
60	$\frac{(p + \alpha)^2 - \beta^2}{[(p + \alpha)^2 + \beta^2]^2}$	$te^{-\alpha t} \cos \beta t$
61	$\arctg \frac{\beta}{p}$	$\frac{\sin \beta t}{t}$
62	$\ln \frac{p + \beta}{p + \alpha}$	$\frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t}$

Am fost !
 Sunt la servici
 Rodica

Vin la 10

BIBLIOGRAFIE

1. Angol, A. : Complimente de matematici. Paris 1949.
2. Antoniu, I. S. : Chestiuni speciale de electrotehnică. București 1952.
3. Antoniu, I. S. : Introducere în aplicarea calculului matricial la studiul circuitelor electrice. București, 1953.
4. Aronson, G. S. : Culegere de probleme privind bazele electrotehnice. Moscova 1948.
5. Atabecov, G. I. : Protecția prin relee a rețelelor de înaltă tensiune. Moscova 1949.
6. Budeanu, C. I. : Puteri reactive și fictive. București 1927.
7. Budeanu, C. I. : Câteva considerații asupra spațiilor superioare. (Bul. de Mat. și Fiz. a Sc. Politehnice din București, VIII, 38, 1936—37).
8. Contorovici, M. I. : Calculul operațional și fenomenele tranzitorii în circuitele electrice. Moscova 1949.
9. Costenco, M. P. : Mașini electrice. Moscova, 1949.
10. Crug, C. A. : Bazele electrotehnice. T. II. Teoria curenților alternativi. Moscova, 1946.
11. Crug, C. A., Lomonosov, V. I., Perecalin, M. A., Polivanov, C. M. : Culegere de probleme privind bazele teoretice ale electrotehnice. Moscova, 1948.
12. Ditchin, V. A. și Cuznețov, P. I. : Indreptar de calcul operațional. Moscova, 1951.
13. Fraenkel, A. : Teoria curenților alternativi. Berlin, 1930.
14. Gutenmaher, L. I. : Modele electrice, Moscova, 1949.
15. Ionchin, P. A., Pantiușin, V. G., Smirnov, V. A. : Culegere de probleme și exerciții de electrotehnică generală. Moscova, 1951.
16. Janet, P. : Probleme și exerciții de electricitate generală, Paris, 1921.
17. Kron, G. : Analiza tensorială a rețelelor electrice. New-York, 1939.
18. Kron, G. : Scurt curs de analiză tensorială pentru inginerii electricieni. New-York, 1942.
19. Mansurov, N. N. și Popov, V. C. : Electrotehnica teoretică. Moscova, 1950.
20. Neiman, L. P. și Calantarov, P. L. : Bazele teoretice ale electrotehnice. Lenin-grad, 1948.
21. Perecalin, M. A. : Circuite electrice. Moscova, 1950.
22. Popescu, A. T. : Curs de electrotehnică II (Chestiuni speciale). Partea I. Analiza armonică a funcțiilor periodice nesinusoidale. București, 1947.
23. Teumin, I. I. : Indreptar asupra fenomenelor tranzitorii în electricitate. Moscova, 1951.
24. Ulianov, S. A. : Scurtcircuite în rețelele electrice. Moscova, 1949.
25. Wagner, C. F. și Evans, R. D. : Componentele simetrice, New-York, 1933.
26. Zaițev, I. A. și Lurie, A. G. : Culegere de probleme privind bazele teoretice de electrotehnice. Moscova 1952.

LISTA SIMBOLURILOR MAI DES UTILIZATE IN CULEGERE

α	operatorul de rotire al vectorilor cu 120° .
a, b, c, \dots	mărimi reale
A, B, \dots, Y, Z	mărimi reale.
$\bar{A}, \bar{B}, \dots, \bar{Y}, \bar{Z}$	mărimi complexe (vectori).
$ \bar{A} $	modulul unui vector
$\ A\ $	matrice
$ A $	determinantul unei matrice
$\alpha, \beta, \gamma, \dots$	argumentul unui vector.
α	factor de formă
B	susceptanță.
C	capacitate.
$\ C\ $	matricea de conexiune a rețelelor.
d (indice)	direct (componente simetrice).
D	putere deformantă.
δ	coeficient de atenuare (regim tranzitoriu).
δ	coeficient de distorsiune (regim deformant).
e	forță electromotoare, valoare instantanee.
E	forță electromotoare, valoare eficace.
ε, e	baza logaritmilor neperieni.
f	frecvență.
f_v	factor de vârf (unde nesinusoidale).
$\varphi, \psi, \theta,$	unghi de fază.
G	conductanță.
h (indice)	homopolar (componente simetrice).
i	curent, valoare instantanee.
i (indice)	inversă (componente simetrice).
I	curent, valoare eficace.
$j = \sqrt{-1}$	operatorul de rotire a vectorilor cu 90° .
k	ordinul unei armonice.
K	factor de putere.
L	inductanță proprie.
\mathcal{L}	simbolul funcției imagine
M	inductanță mutuală.
ω	pulsanța unui curent alternativ.
p	simbolul operațional $\frac{d}{dt}$.
\bar{p}	simbolul $-\delta + j\Omega$.
P	pierderi de putere activă.
P	putere activă.
q	pierderi de putere reactivă.
Q	putere reactivă.
R	rezistența electrică n general.

ρ	factor reactiv.
s	alunecarea motorului asincron.
S	putere aparentă.
t, τ	timp.
T	perioadă.
τ	constantă de timp.
τ	factor deformant.
u, v	tensiune, valoare instantanee.
U, V	tesione, valoare eficace.
\bar{V}	vector.
V_c, V^*	vector conjugat.
X	reactanță în general.
X_L	reactanță inductivă.
X_C	reactanță capacitivă.
Y	admitanță în general.
\bar{Y}	admitanță, mărime complexă.
Y_d	rezidiul deformant.
Y_d	valoarea eficace a unei mărimi nesinusoidale.
Y_k	valoarea eficace a unei armonice de ordinul k .
Z	impedanță în general.
\bar{Z}	impedanță, mărime complexă.
$\$$	impedanța de calcul (componente simetrice).
$ $	semnul argumentului unei mărimi complexe

Redactor de carte: Ing. Elgeles S.
 Tehnoredactor: Vasilescu O.
 Corector: Pășărin Constanța

*Dat la cules 15.II.1954. Bun de tipar 16.III.1954. Hârtie semivellină
 65 g/m², format 61×88/16. Coli editoriale 30, coli tipografice 27. Prețul
 unui exemplar cartonat 1/2 până lei 19,30. Comanda 307 A 339.
 Pentru bibliotecile mari indicile de clasificare zecimală 621.3.01.
 Pentru bibliotecile mici 621.*

Tiparul executat la Intreprinderea Poligrafică 8
 B-dul 6 Martie, București R. P. R.

și apoi :

	p	q	r
p	4,5	-3,5	2
q	-3,5	3,5	-2
r	2	-2	4

$\| Z' \| =$

și

$\| e' \| =$

p	
q	100
r	100

Din relația (123) se deduce :

p	100
q	160
r	55

$\| i' \| =$

și rezultă

$\| i \| =$

a	100
b	160
c	-55
d	60
f	-5
g	55

Puterea absorbită de circuit este :

$$P' = P = \begin{bmatrix} & p & q & r \\ p & & & \\ q & & & \\ r & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = 21500 \text{ W}$$

care se repartizează : $P_b = 32000 \text{ W}$ și $P_c = -10500 \text{ W}$. Deci P_c este motor și numai P_b este generator.

17.17. a) Rețeaua are trei curenți independenți care se iau în laturile CA, AB, CB. Matricea de conexiune este:

$$\|C\| = \begin{array}{c|ccc} & p & q & r \\ \hline a & & 1 & \\ b & -1 & 1 & \\ c & & 1 & 1 \\ d & 1 & & \\ f & & & 1 \end{array}$$

cu care se găsește:

$$\|Z'\| = \begin{array}{c|ccc} & p & q & r \\ \hline p & 5 & -3 & \\ q & -3 & 6 & 1 \\ r & & 1 & 9 \end{array}$$

$$\text{și } \|e'\| = \begin{array}{c|c} p & 400 + j200 \\ \hline q & \\ \hline r & 200 - j200 \end{array}$$

apoi:

$$\|i'\| = \begin{array}{c|c} p & 112 + j61 \\ \hline q & 53,4 + j34,8 \\ \hline r & 16,3 - j26,3 \end{array}$$

$$\text{și } \|i\| = \begin{array}{c|c} a & 53,4 + j34,8 \\ \hline b & -59 - j26,2 \\ \hline c & 63,7 + j8,5 \\ \hline d & 112 + j61 \\ \hline f & 16,3 - j26,3 \end{array}$$

b) Puterea respectivă :

$$\bar{S} = \| e' \| \cdot \| i' \| ^* = 65,52 \text{ kVA.}$$

care se repartizează :

$$\bar{S}_d = 57,0 - j 2,0 \text{ kVA și } \bar{S}_f = 8,52 + j 2,0 \text{ kVA}$$

Puterea absorbită de rețea este reală deoarece rețeaua este formată numai din rezistențe ohmice. Puterea reactivă, produsă de un generator este absorbită de al doilea.

c)

a	$106,8 + j 69,6$	
b	$-168 - j 78,6$	
$\ i_e \ = c$	$69,7 + j 8,5$	V
d	$224 + j 122$	
f	$130,4 - j 210,4$	

17.18. Problema se rezolvă ca și precedenta. Se găsește :

a)

a	$-26 - j 34$	
b	$-47 + j 2$	
$\ i \ = c$	$24 + j 6$	$;$
d	$21 - j 36$	
f	$50 + j 40$	

b) $\bar{S} = 27,95 \text{ kW}$, care se repartizează; $\bar{S}_d = 12,54 + j 3,30 \text{ kVA}$ și $\bar{S}_f = 15,4 - j 3,30 \text{ kVA}$.

c)

a	$-26 - j 34$
b	$-94 + j 4$
$\parallel e_t \parallel = c$	$120 + j 30$
d	$126 - j 216$
f	$100 + j 80$

17.19. a) Se iau cei trei curenți independenți pe laturile CA, AB, CB. Matricea de conexiune este:

	p	q	r
a		1	
b	1	-1	
$\parallel C \parallel = c$		1	1
d	1		
f			1

Se găsește cu ajutorul ei:

p	$100 + j 0$
q	
r	$100 + j 100$